

# Логарифмическая функция, её свойства и график

*Потому-то словно пена,  
Опадают наши рифмы.  
И величие степенно  
Отступает в логарифмы.  
Борис Слуцкий*

остроумная алгебраическая  
головоломка,  
которой развлекались участники  
одного съезда физиков в Одессе.  
Некоторым  
учащимся на дом предлагалось  
творческое  
задание: число 3, целое и  
положительное,  
изобразить с помощью трех двоек и  
математических символов.

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

То есть любое целое положительное число  
можно изобразить с помощью трех двоек и  
математических символов.

$$5 = \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$



# Устная работа

**Вычисли**

$$\log_9 81 =$$

$$2^{\log_2 18} =$$

$$\log_4 16 =$$

$$3^{\log_9 25} =$$

$$\log_{0.2} 5 =$$

$$\log_9 1 =$$

$$8^{\log_2 5} =$$

$$\log_9 9 =$$

$$\log_{0.3} 0.0081 =$$

$$0.5^{\log_1 16} =$$

$$\log_9 81 =$$

## Определение.

*Логарифмом положительно числа  $b$  по положительному и отличному от 1 основанию  $a$  называют показатель степени, в которую нужно возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$ .*

$$\text{Log}_a b = c, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1$$

$$a^c = b$$

$$\log_a a^c = c$$

$$a^{\log_a c} = c$$

$$\log_a 1 = 0$$

# Теорема об обратных функциях

Если функция  $f(x)$  определена и  
монотонна на некотором промежутке  $X$ ,  
причем  $D(f)=X$ ,  
 $E(f)=Y$ , то

существует обратная ей функция  $g(x)$ ,  
определенная на  $Y$ , т.е.  $D(g)=Y$   
 $E(g)=X$ ,

причем, монотонность сохраняется.

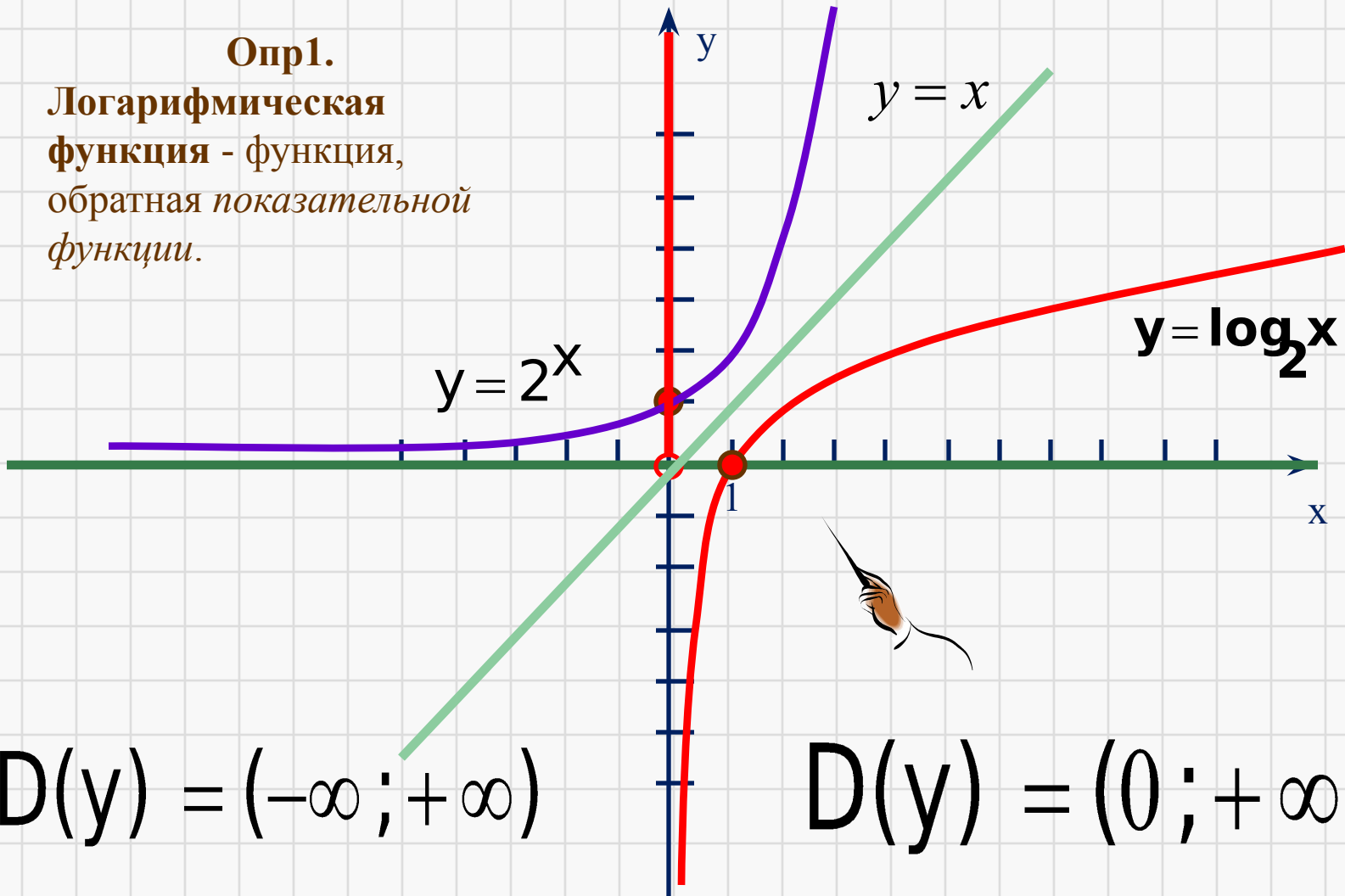
Графики взаимнообратных функций  
симметричны относительно прямой  $y=x$



Построим график функции  $y=2^x$

**Опр1.**

**Логарифмическая функция** - функция, обратная *показательной* функции.



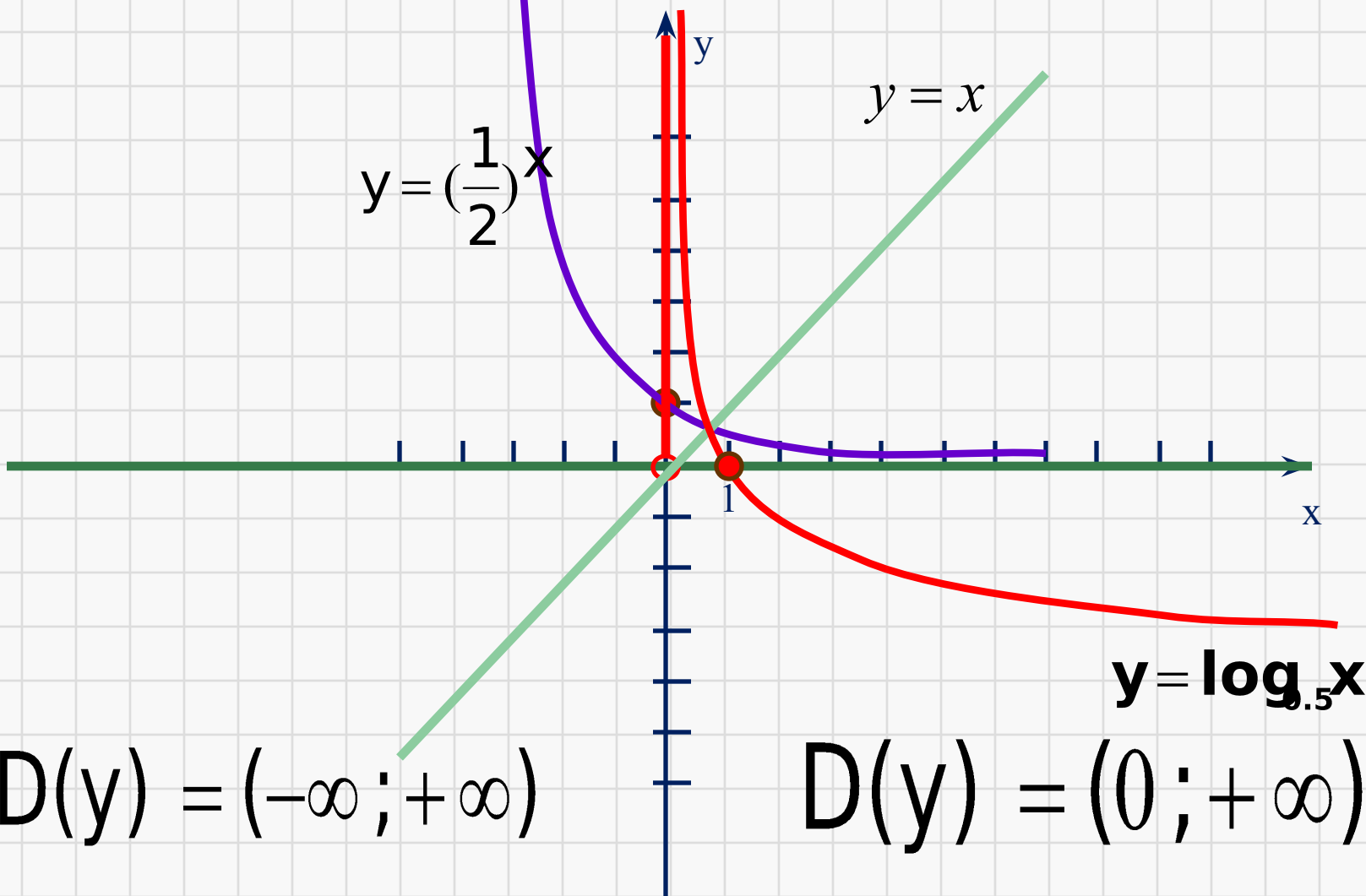
$$D(y) = (-\infty ; +\infty)$$

$$E(y) = (0 ; +\infty)$$

$$D(y) = (0 ; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty ; +\infty)$$

Построим график функции  $y=(0.5)^x$



$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = x$$

$$y = \log_5 x$$

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

## Опр.2

Функция вида  $y = \log_a x$

(где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) называется логарифмической.

1)  $D(y): (0; +\infty)$

Это следует из определения логарифма, так как выражение  $\log_a x$  имеет смысл только при  $x > 0$ .

### Устная работа

Найти  $D(y)$ , если известно, что

$a > 0$ ,  $a \neq 1$

а)  $y = \log_a x + 1$

б)  $y = \log_a (x+1)$

в)  $y = \log_a (1-x)$



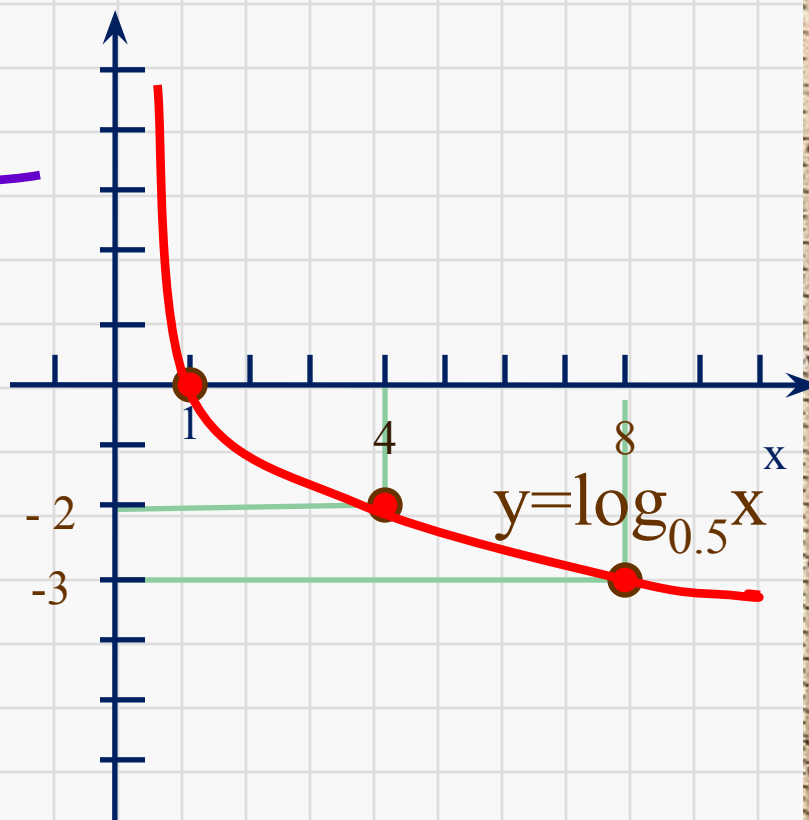
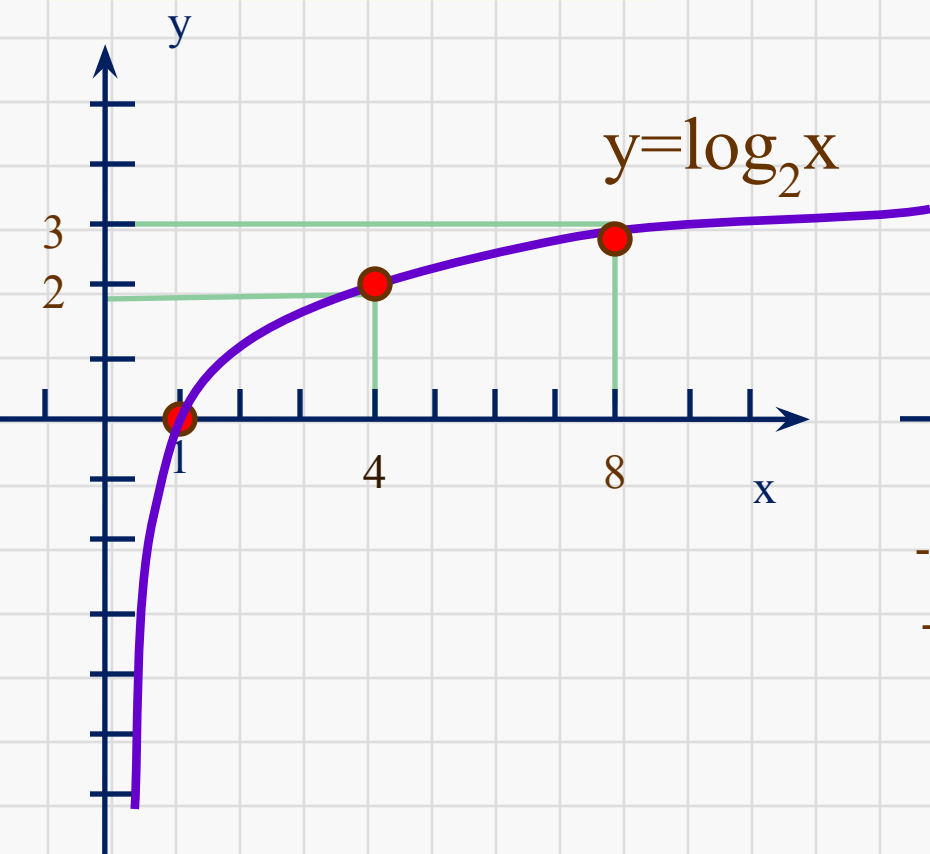
# Построим график функции

$$y = \log_2 x$$

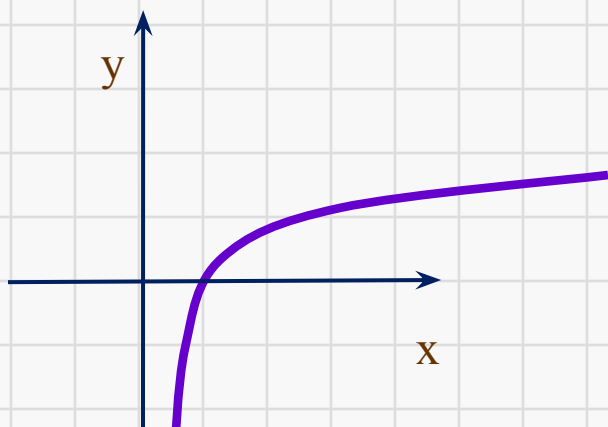
x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

$$y = \log_{0.5} x$$

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	2	1	0	-1	-2	-3



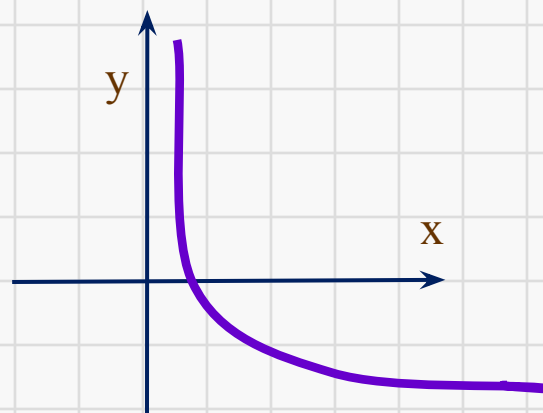
# Свойства функции



$$y = \log_a x \quad a > 1$$

## Свойства функции $y = \log_a x$ , при $a > 1$

- 1)  $D(F): (0; +\infty)$
- 2) не является ни четной, ни нечетной
- 3) **возрастает** на своей области определения
- 4) не ограничена ни сверху, ни снизу
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений
- 6) непрерывна
- 7)  $E(F): (-\infty; +\infty)$
- 8) **выпукла вверх**



$$y = \log_a x \quad 0 < a < 1$$

## Свойства функции $y = \log_a x$ , при $0 < a < 1$

- 1)  $D(F): (0; +\infty)$
- 2) не является ни четной, ни нечетной
- 3) **убывает** на своей области определения
- 4) не ограничена ни сверху, ни снизу
- 5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений
- 6) непрерывна
- 7)  $E(F): (-\infty; +\infty)$
- 8) **выпукла вниз**

Устно

Выполняем задание 15.12

# Логарифмическая комедия математический софизм

«2>3»

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} \text{ — очевидно}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\cancel{2 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right)} > \cancel{3 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right)}$$

2 > 3 — неверно!!!

# Работа в группах

№1 Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке  $y = \lg x$   $x \in [1; 1000]$

[подсказка](#)

№2 Решите уравнение и неравенства

а)  $\log_4 x = 0$ ; б)  $\log_4 x > 0$  в)  $\log_4 x < 0$

[подсказка](#)

№3 Решите уравнение  $\log_4 x = 5 - x$

[подсказка](#)

№4 Постройте графики функций а)  $y = \log_x x$

б)  $y = 2^{\log_2 x}$  в)  $y = x^{\log_x 2}$

[подсказка](#)

[подсказка](#)

[подсказка](#)



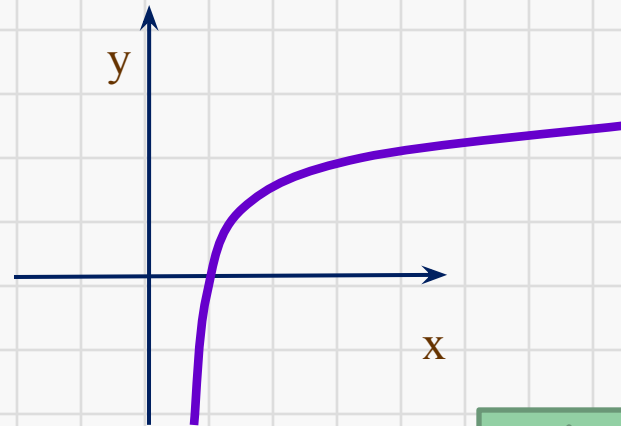
Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке

$$y = \lg x \quad x \in [1; 1000]$$

- **Решение:** функция  $y = \lg x$  непрерывная и возрастающая.
- Следовательно своего наименьшего и наибольшего значения достигает на концах отрезка

$$y_{\text{наим}} = \lg 1 = 0$$

$$y_{\text{наиб}} = \lg 1000 = 3$$



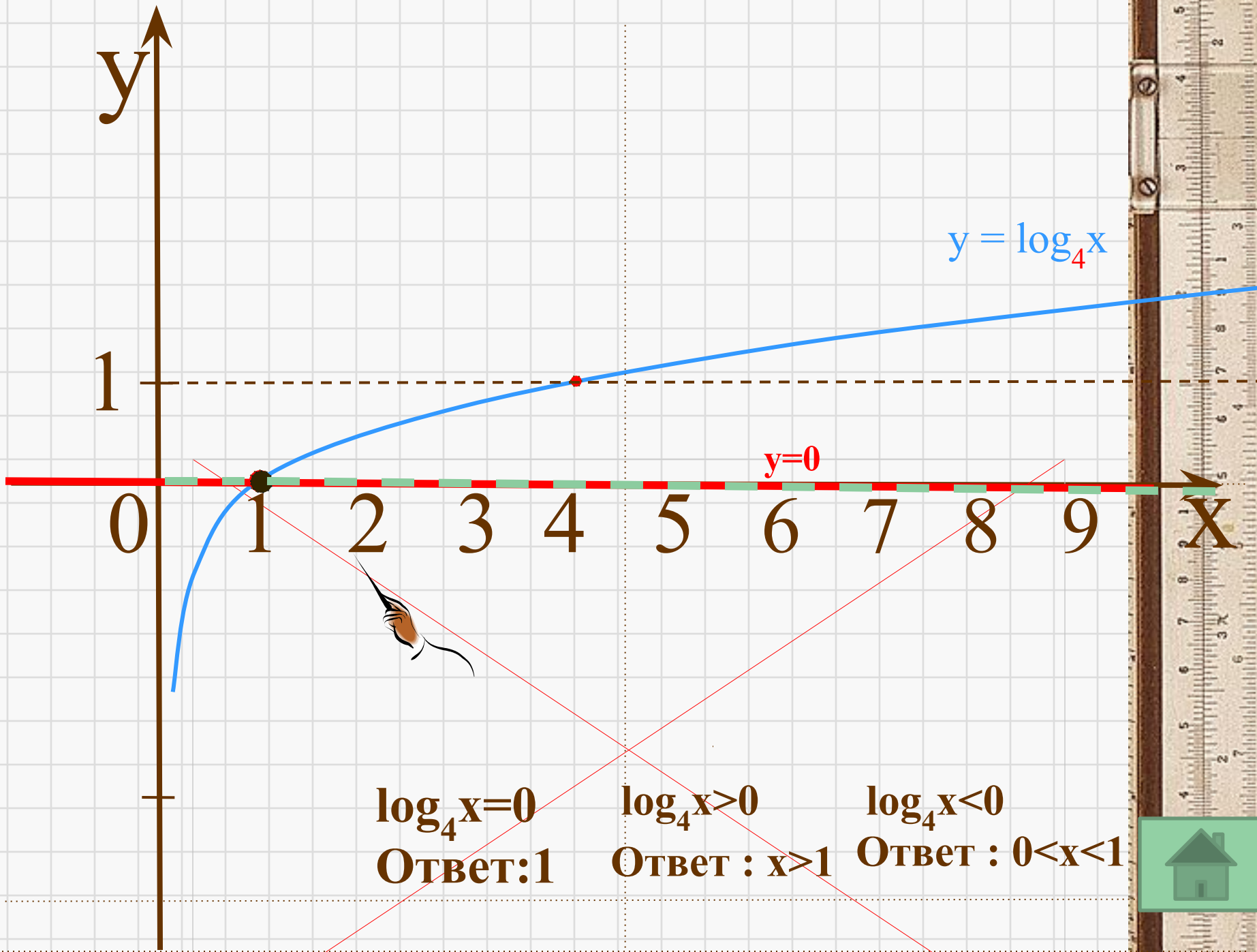


Решить уравнения и неравенства

а)  $\log_4 x = 0$ ; б)  $\log_4 x > 0$  в)  $\log_4 x < 0$

- Решаем графически.

В одной системе координат строим график функции  $y = \log_4 x$  и  $y = 0$



$\log_4 x = 0$   
**Ответ: 1**

$\log_4 x > 0$   
**Ответ :  $x > 1$**

$\log_4 x < 0$   
**Ответ :  $0 < x < 1$**

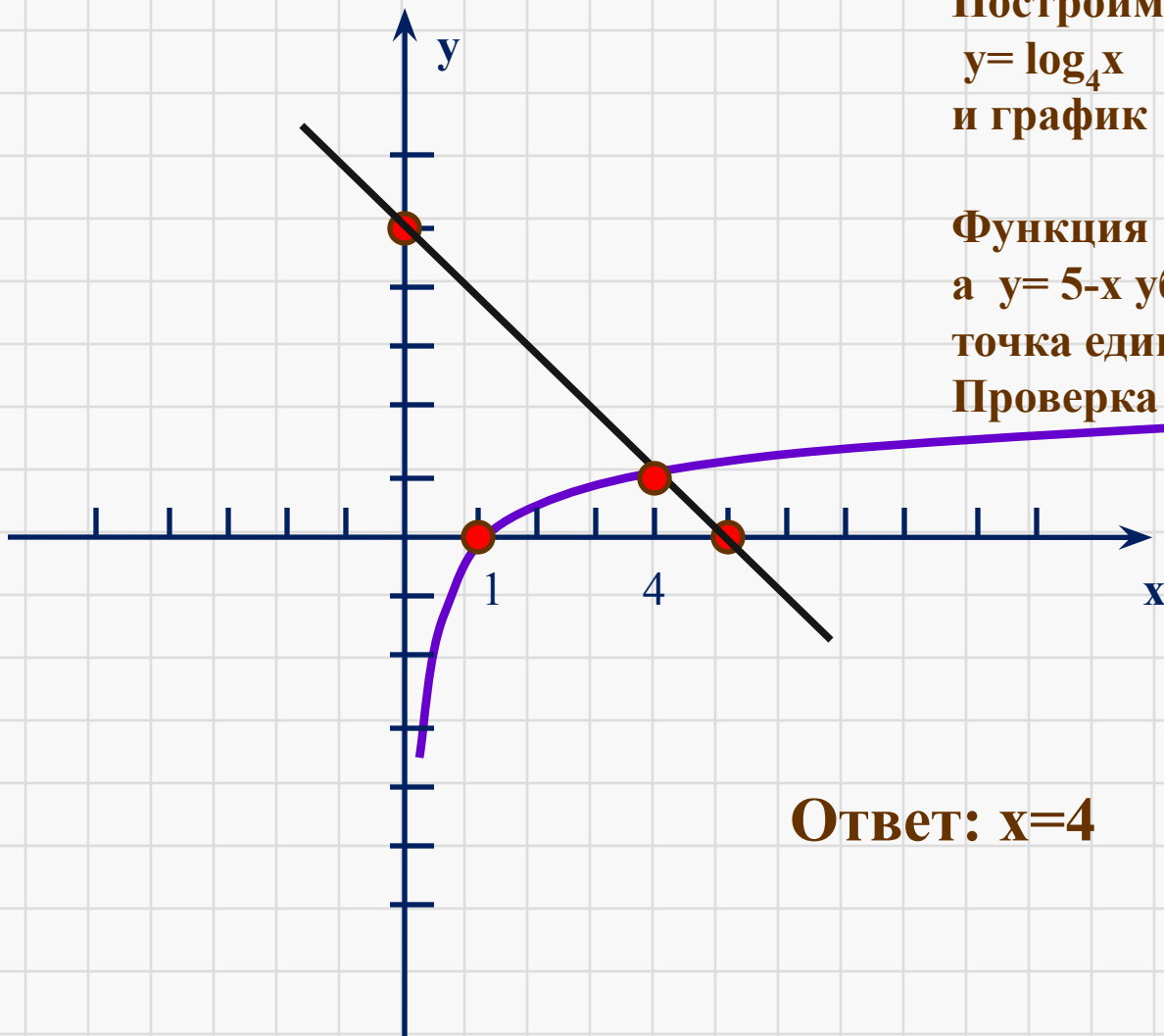


# Решить уравнение

$$\log_4 x = 5 - x$$

Построим график функции  
 $y = \log_4 x$   
и график  $y = 5 - x$

Функция  $y = \log_4 x$  возрастает,  
а  $y = 5 - x$  убывает. То есть  
точка единственная.  
Проверка  $\log_4 4 = 5 - 4$



**Ответ:  $x=4$**

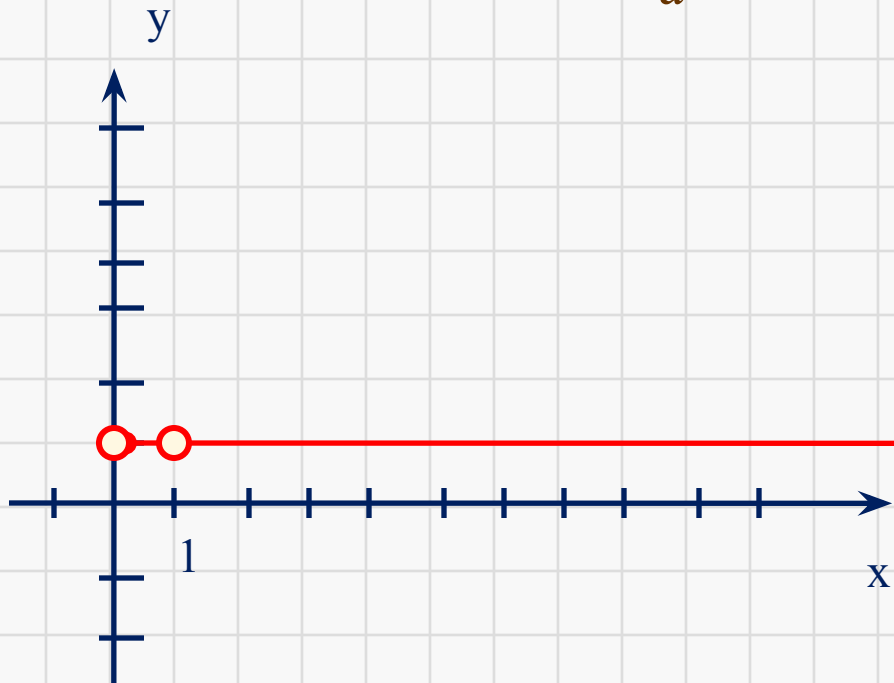


# Построить графики функции функции

$$y = \log_x x$$

$$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

учитывая, что  $\log_a a = 1$ , строим график  $y = 1$

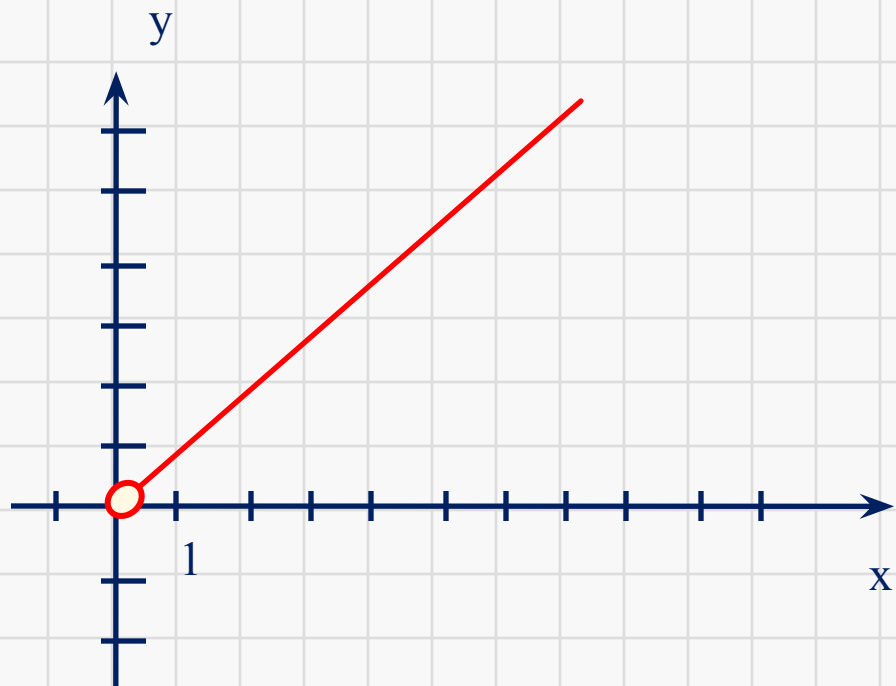


# Построить графики функции функции

$$y=2^{\log_2 x}$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

учитывая, что  $a^{\log_a c} = c$ , строим график  $y=x$



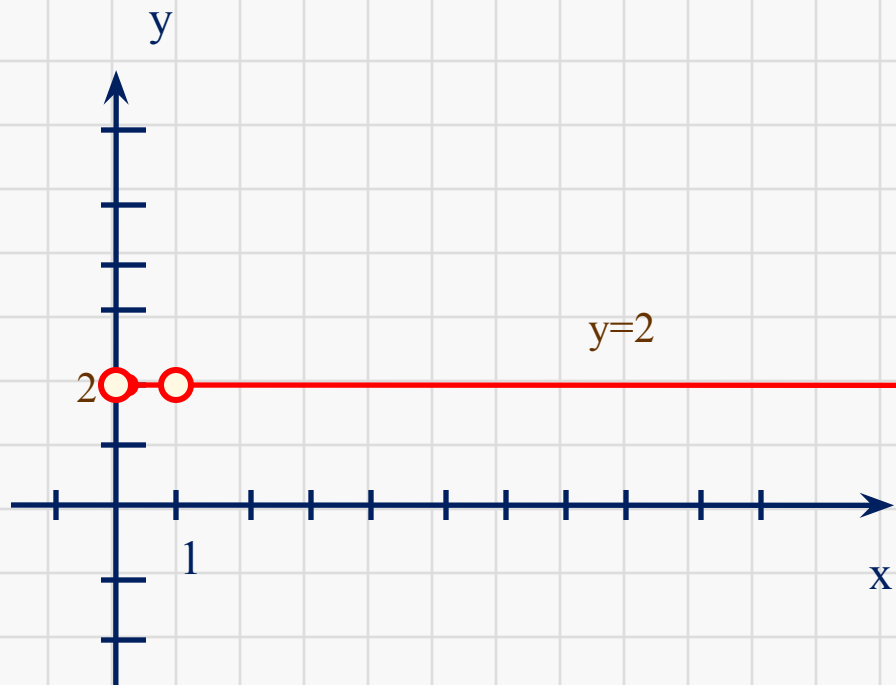


# Построить графики функции функции

$$y = x^{\log x^2}$$

$$D(y) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

учитывая, что  $a^{\log a^c} = c$ , строим график  $y=2$

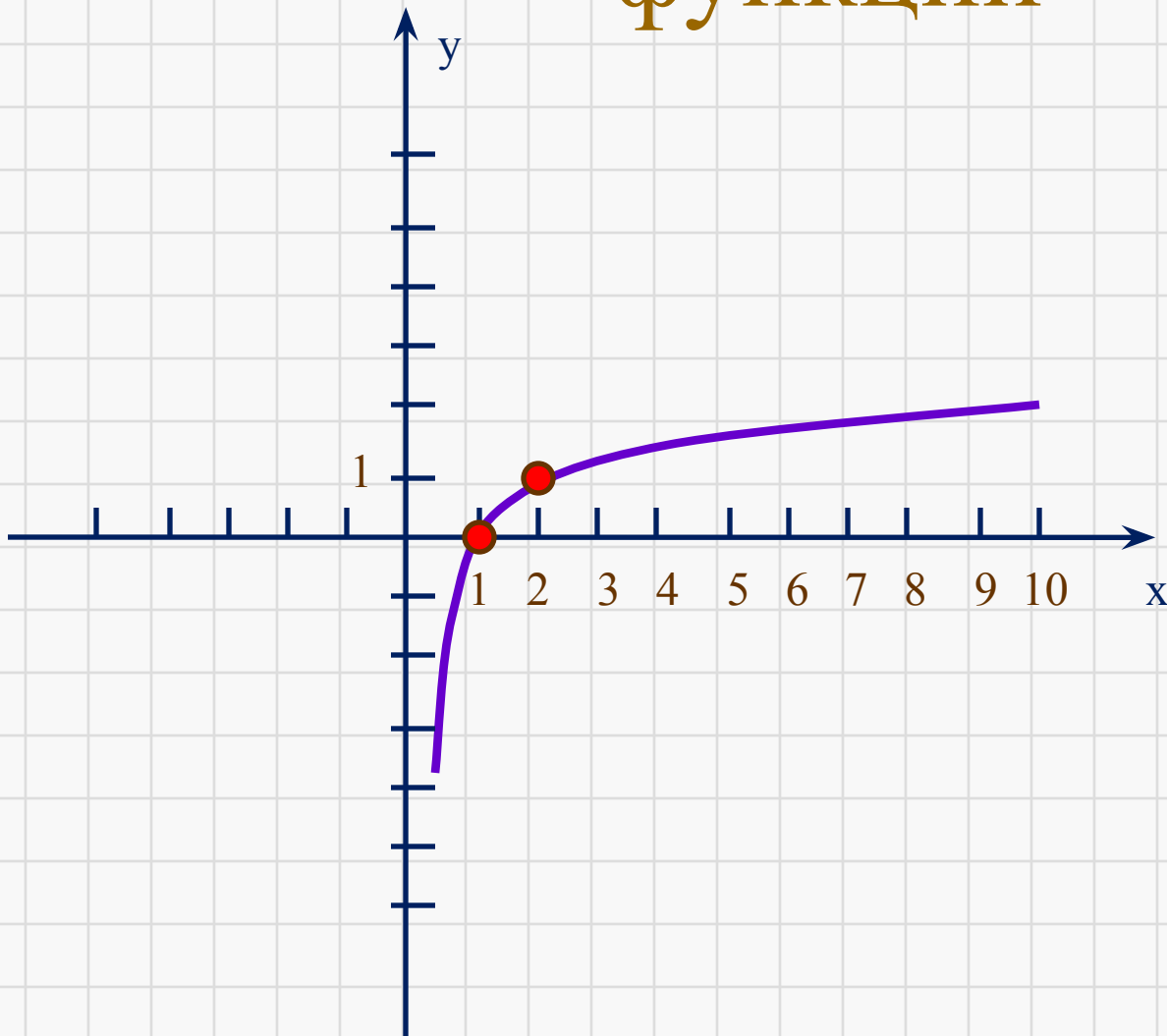


# Применение логарифмов в физике, химии, биологии



- Физики шутят: “ Математика – царица всех наук, но служанка физики”. Так пошутить могут и музыканты, и биологи, и психологи и др. А это еще раз подтверждает правильность слов Карла Маркса “ *Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой*”.

# Преобразование графиков функции

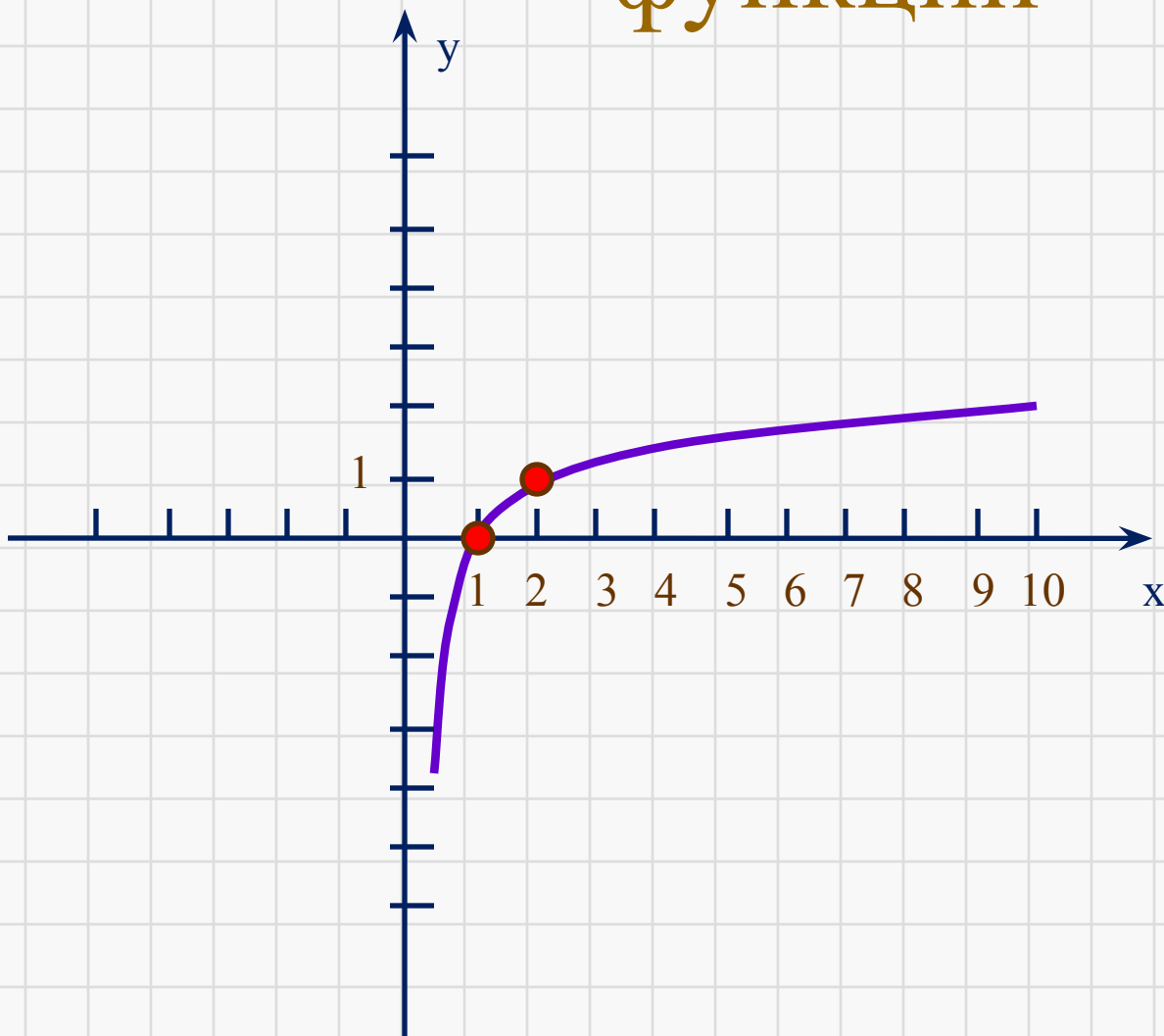


$$y = \log_2 x + 2$$

$$D(y): (0; +\infty)$$

$$E(y): (-\infty; +\infty)$$

# Преобразование графиков функции



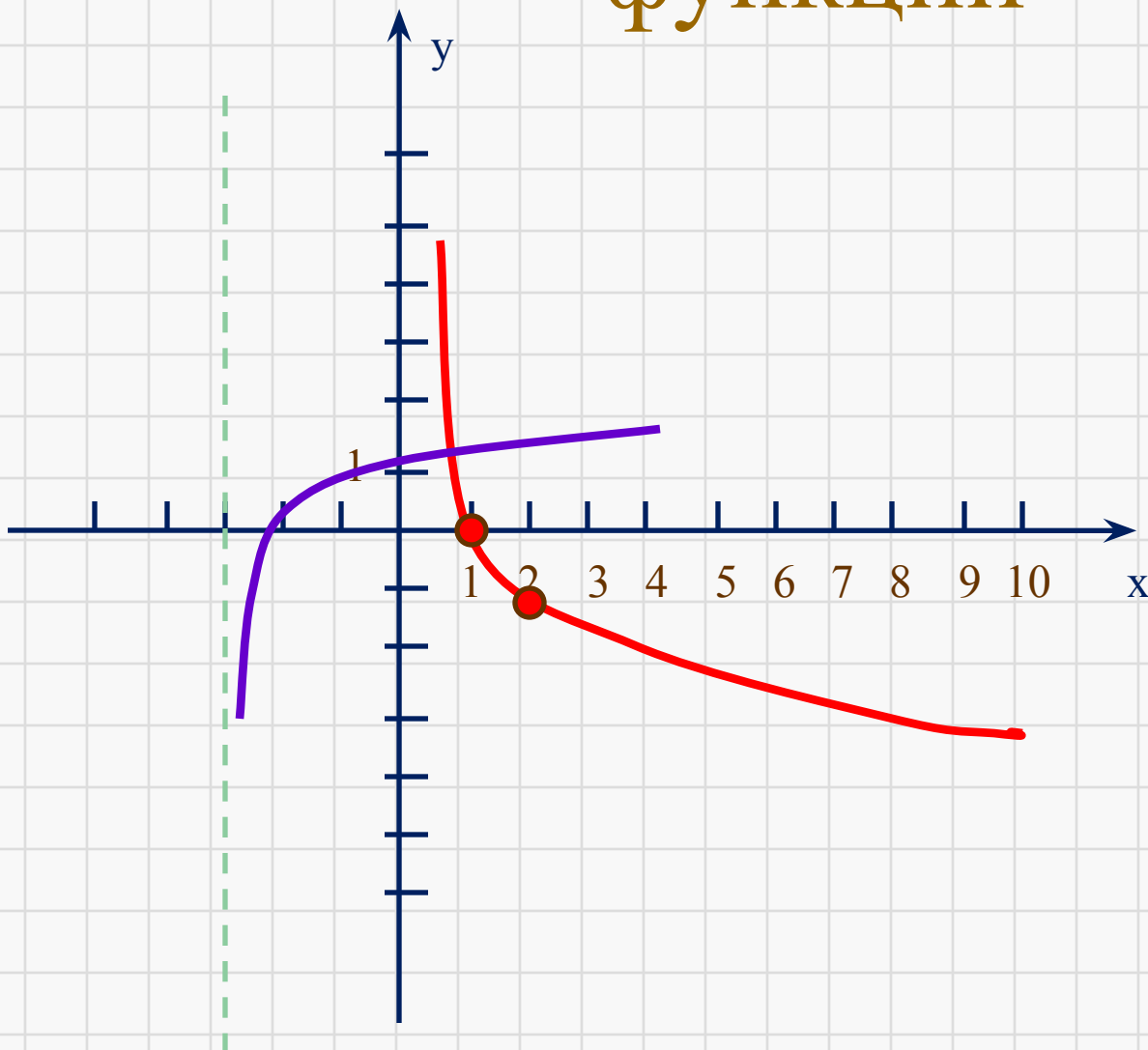
$$y = \log_2(x+2)$$

$$D(y): (-2; +\infty)$$

$$E(y): (-\infty; +\infty)$$



# Преобразование графиков функции



$$y = \log_{0.5}(x+3)$$

$$D(y): (-3; +\infty)$$

$$E(y): (-\infty; +\infty)$$

$$y = -\log_{0.5}(x+3)$$

$$D(y): (-3; +\infty)$$

$$E(y): (-\infty; +\infty)$$

Известно завещание знаменитого американского государственного деятеля Бенджамина Франклина. Вот отрывок из него:  
«Препоручаю 1000 фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их с процентами, по 5 на сто в год, в заем молодым ремесленникам. Сумма эта через сто лет возвысится до 131000 фунтов стерлингов. Я желаю тогда 100000 фунтов были употреблены на постройку общественных зданий, остальные же 31000 фунтов отданы в проценты на 100 лет...». Оставляя всего 1000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Математический расчет это подтверждает

$$x = 1000 \cdot 1,05^{100}$$

# Вычисления с помощью логарифма

14.02.2015

$$x = 1000 \cdot 1,05^{100}$$

$$\lg x = \lg(1000 \cdot 1,05^{100})$$

$$\lg x = \lg 1000 + \lg 1,05^{100}$$

$$\lg x = 3 + 100 \lg 1,05$$

$$\lg x = 3 + 100 \cdot 0,021$$

$$\lg x = 5,1$$

$$x = 131000$$

# Используемая литература:

- Задача на 2 слайде: [http://www.bankrabort.com/part2/work\\_12766.html](http://www.bankrabort.com/part2/work_12766.html)
- Учебник: Мордкович А.Г., «Алгебра и начала анализа», профильный уровень
- Задачник: Мордкович А.Г., «Алгебра и начала анализа», профильный уровень
- <http://www.matica.info/material1.html> -завещание Франклина.