Логарифмическая функция, её свойства и график

Потому-то словно пена,
Опадают наши рифмы.
И величие степенно
Отступает в логарифмы.
Борис Слуцкий

остроумная алгебраическая головоломка, которой развлекались участники одного съезда физиков в Одессе. Некоторым учащимся на дом предлагалось творческое задание: число 3, целое и положительное, изобразить с помощью трех двоек и математических символов.

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

То есть любое целое положительное число можно изобразить с помощью трех двоек и математических символов.

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$$

Устная работа

Вычисли

$\log_9 81=$

$\log_4 16=$

$\log_{0.2} 5=$

$\log_9 1=$

$\log_9 9=$

$\log_{0.3} 0.0081=$

$\log_9 81=$

$$2^{\log_2 18}=$$

$$3^{\log_9 25}=$$

$$8^{\log_2 5}=$$

$$0.5^{\log_{\frac{1}{4}} 16}=$$

Определение.

Логарифмом положительно числа b по положительному и отличному от 1 основанию а называют показатель степени, в которую нужно возвести число а, чтобы получить число b.

$$\log_a b = c,\ a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1$$

$$a^c = b$$

$$\log_a a^c = c \qquad \boxed{a^{\log_a c} = c} \qquad \log_a 1 = 0$$

Теорема об обратных функциях

Если функция f(x) определена и монотонна на некотором промежутке X, причем D(f)=X,

E(f)=Y, то

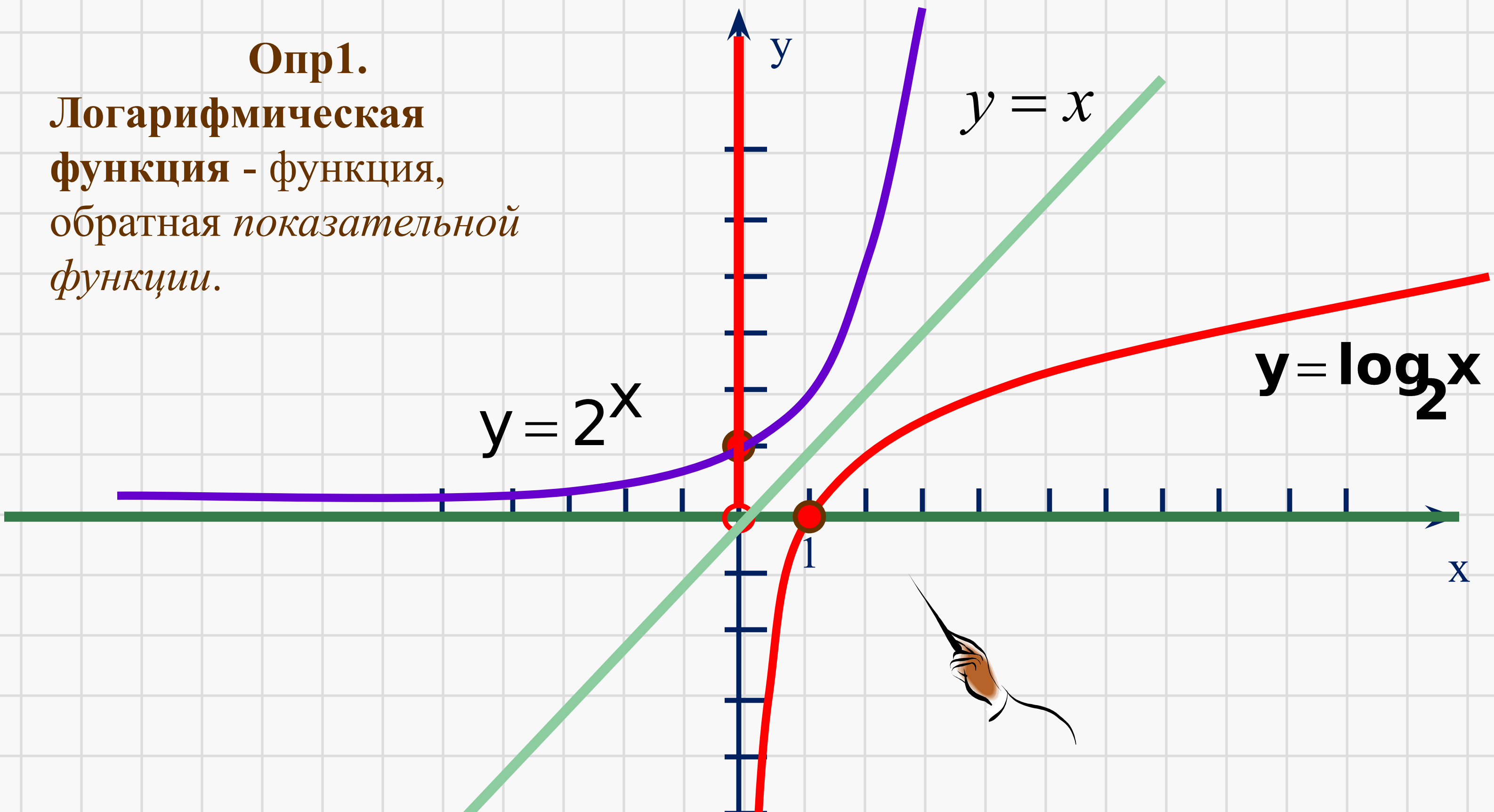
существует обратная ей функция g(x), определенная на Y, т.е. D(g)=Y

E(g)=X,

причем, монотонность сохраняется. Графики взаимнообратных функций симметричны относительно прямой y=x

Построим график функции $y=2^x$

Опр1. Логарифмическая функция - функция, обратная *показательной функции.*



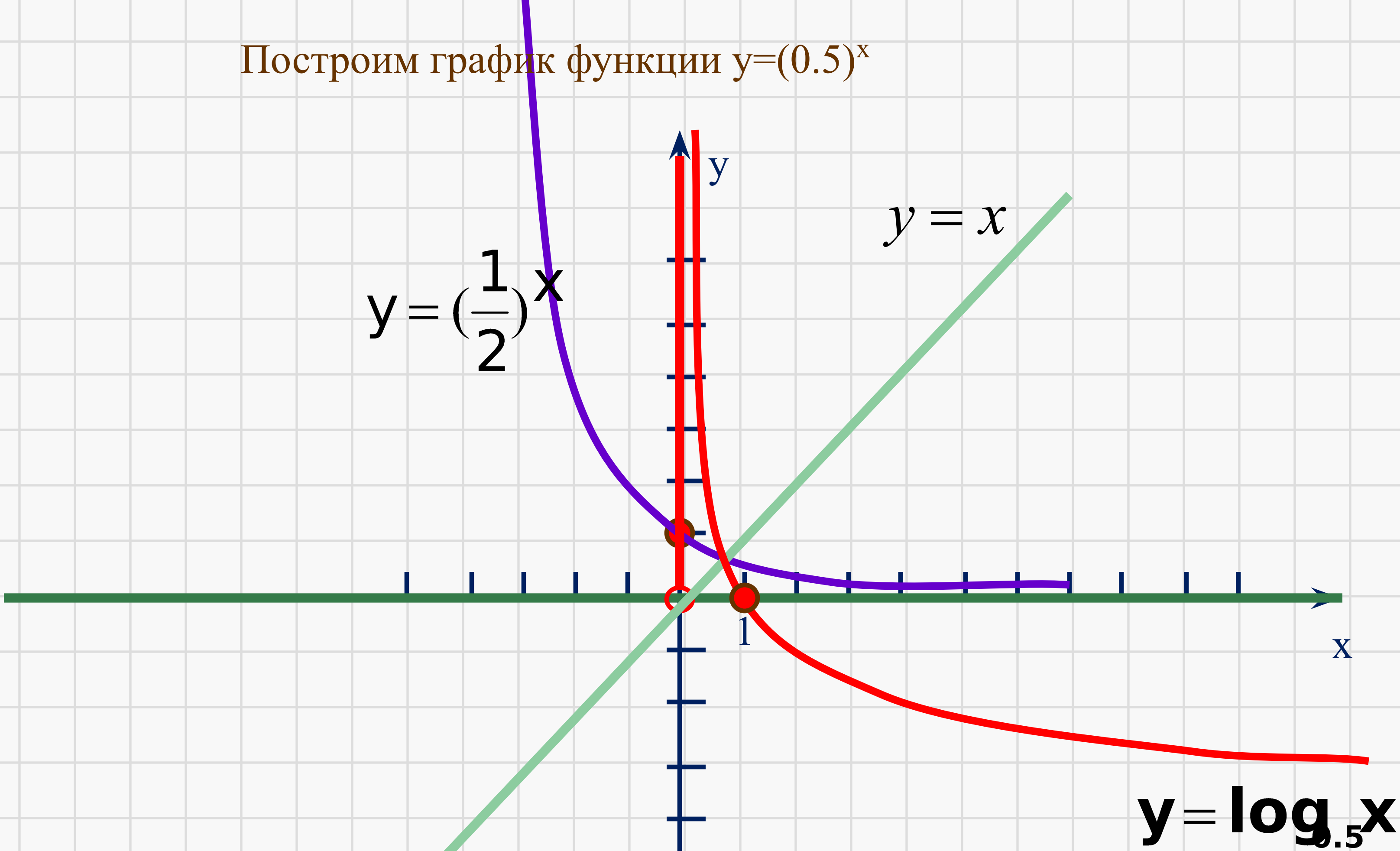
$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

$$E(y) = (0; +\infty)$$

$$D(y) = (0; +\infty)$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

Построим график функции $y=(0.5)^x$



$D(y) = (-\infty; +\infty)$

$E(y) = (0; +\infty)$

$D(y) = (0; +\infty)$

$E(y) = (-\infty; +\infty)$

Опр.2

Функция вида **$y = \log_a x$** (где **$a > 0$, $a \neq 1$**) называется **логарифмической.**

1) D(y):(0;+∞)

Это следует из определения логарифма, так как выражение **$\log_a x$** имеет смысл только при **$x > 0$.**

Устная работа

Найти D(y), если известно, что

$a > 0$, $a \neq 1$

а) **$y = \log_a x + 1$**

б) $y = \log_a (x+1)$

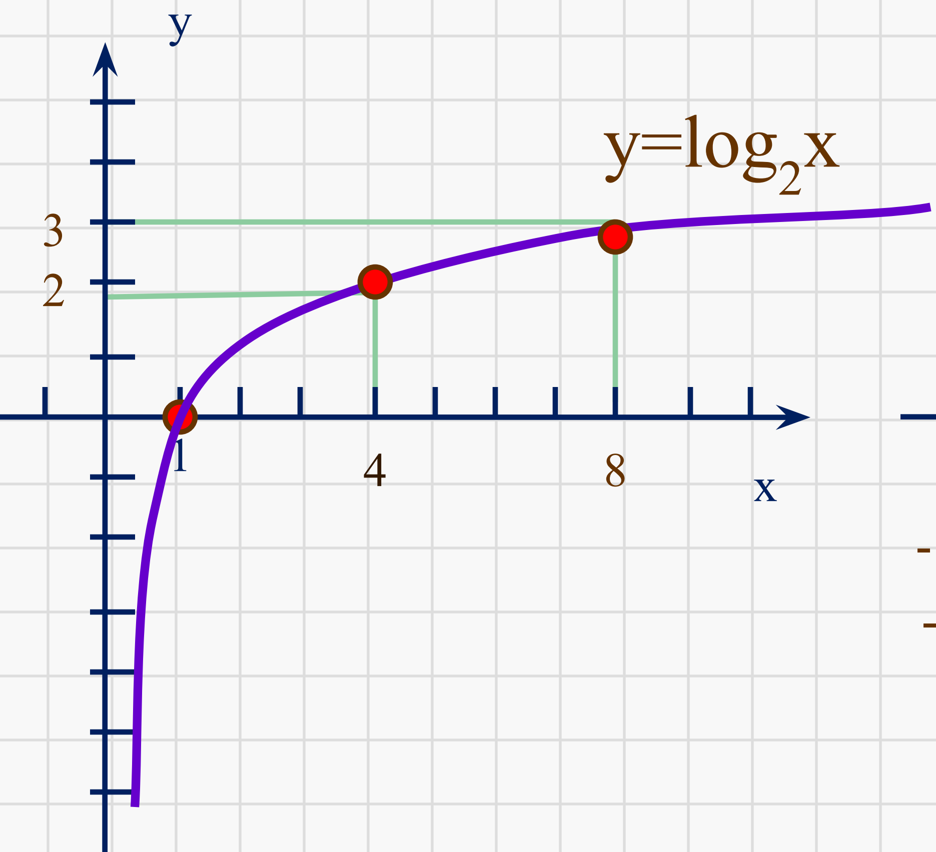
в) $y = \log_a (1-x)$

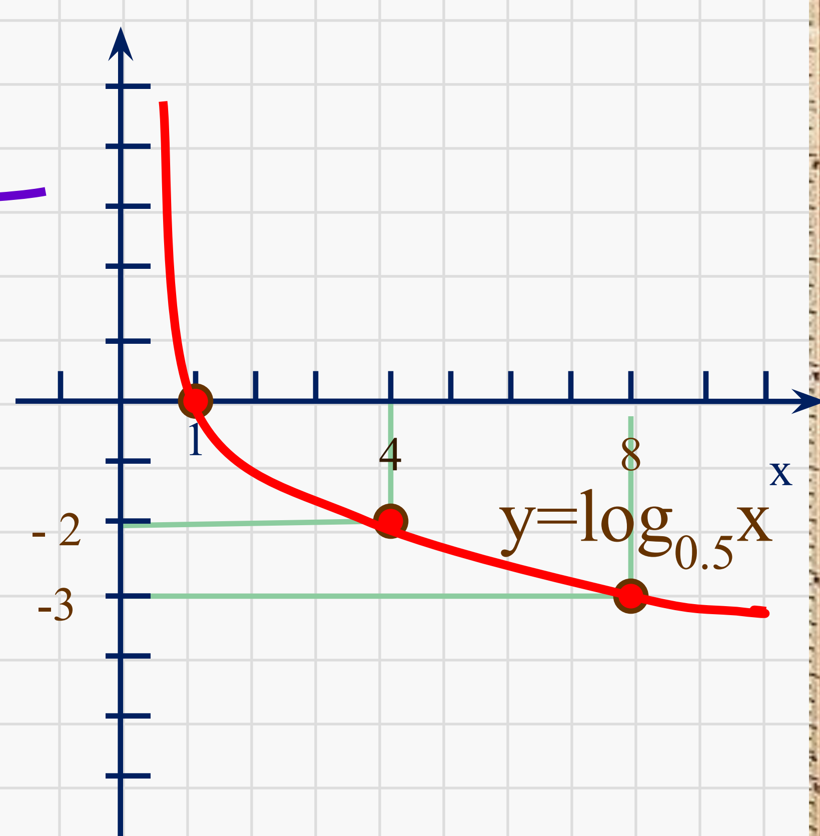
Построим график функции

$y=\log_2 x$ $\qquad$ $y=\log_{0.5} x$

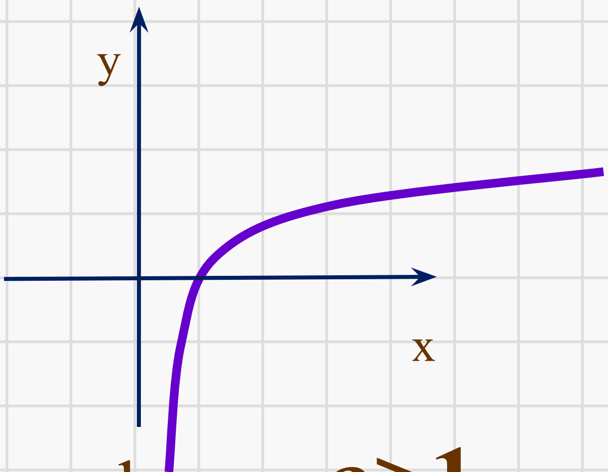
x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	2	1	0	-1	-2	-3

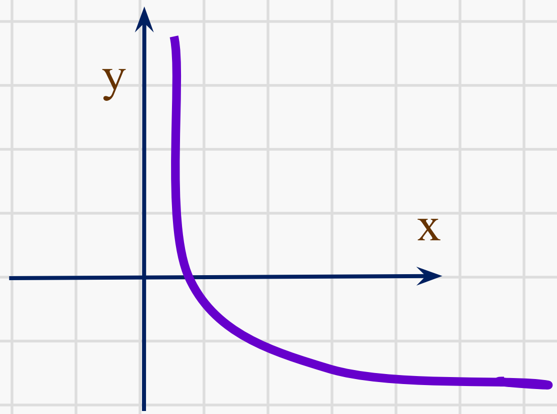




Свойства функции



$y=\log_a x$ **a>1**



$y=\log_a x$ **0<a<1**

Свойства функции $y=\log_a x$, при a>1

1) D(F):(0;+∞)

2) не является ни четной, ни нечетной

3) ***возрастает*** на своей области определения

4) не ограничена ни сверху, ни снизу

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений

6) непрерывна

7) E(F):(- ∞;+ ∞)

8) ***выпукла вверх***

Свойства функции $y=\log_a x$, при 0<a<1

1) D(F):(0;+∞)

2) не является ни четной, ни нечетной

3) **убывает** на своей области определения

4) не ограничена ни сверху, ни снизу

5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений

6) непрерывна

7) E(F):(- ∞;+ ∞)

8) ***выпукла вниз***

Устно

Выполняем задание 15.12

Логарифмическая комедия математический софизм «2>3»

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} - \textit{очевидно}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} > 3 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$2 > 3 - \textit{неверно!!!}$$

Работа в группах

№1Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке $y=\lg x$ $x\in[1;1000]$

подсказка

№2 Решите уравнение и неравенства

а) $\log_4 x=0$; б) $\log_4 x>0$ в) $\log_4 x<0$

подсказка

№3 Решите уравнение $\log_4 x=5-x$

подсказка

№4 Постройте графики функций а) $y=\log_x x$

б) $y=2^{\log 2x}$ в) $y=x^{\log x2}$

подсказка

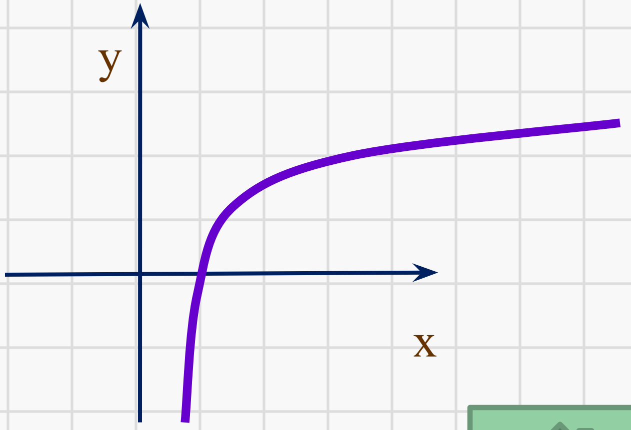
подсказка

подсказка

Найти наименьшее и набольшее значении функции на заданном промежутке

$y = \lg x \quad x \in [1;1000]$

- **Решение**: функция $y = \lg x$ непрерывная и возрастающая.
- Следовательно своего наименьшего и наибольшего значения достигает на концах отрезка



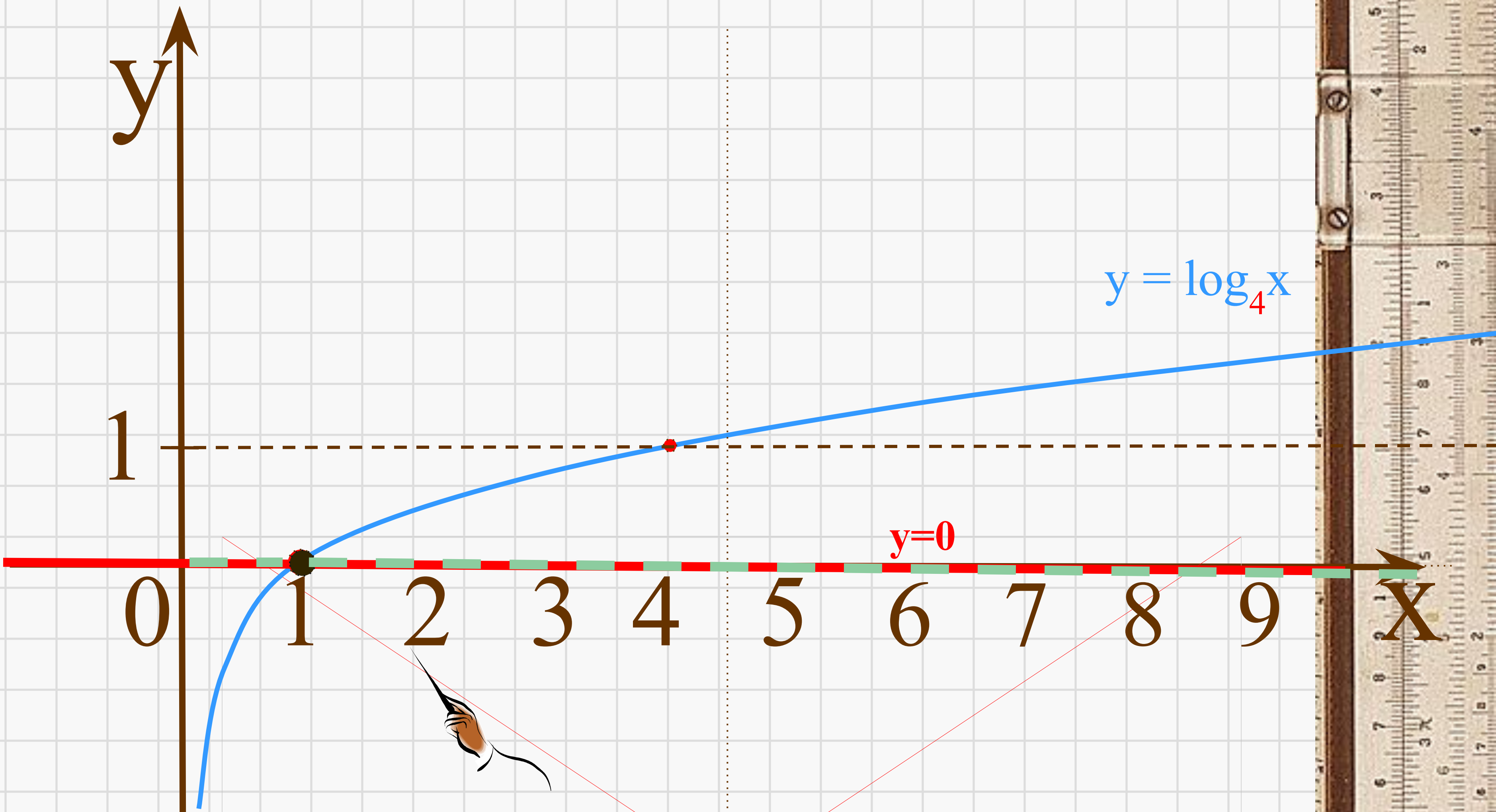
$y_{наим} = \lg 1 = 0$

$y_{наиб} = \lg 1000 = 3$

Решить уравнения и неравенства а) $\log_4 x=0$; б) $\log_4 x>0$ в) $\log_4 x<0$

- Решаем графически.

В одной системе координат строим график функции $y=\log_4 x$ и $y=0$



$\log_4 x = 0$
Ответ:1

$\log_4 x > 0$
Ответ : $x > 1$

$\log_4 x < 0$
Ответ : $0 < x < 1$

Решить уравнение

$\log_4 x = 5 - x$

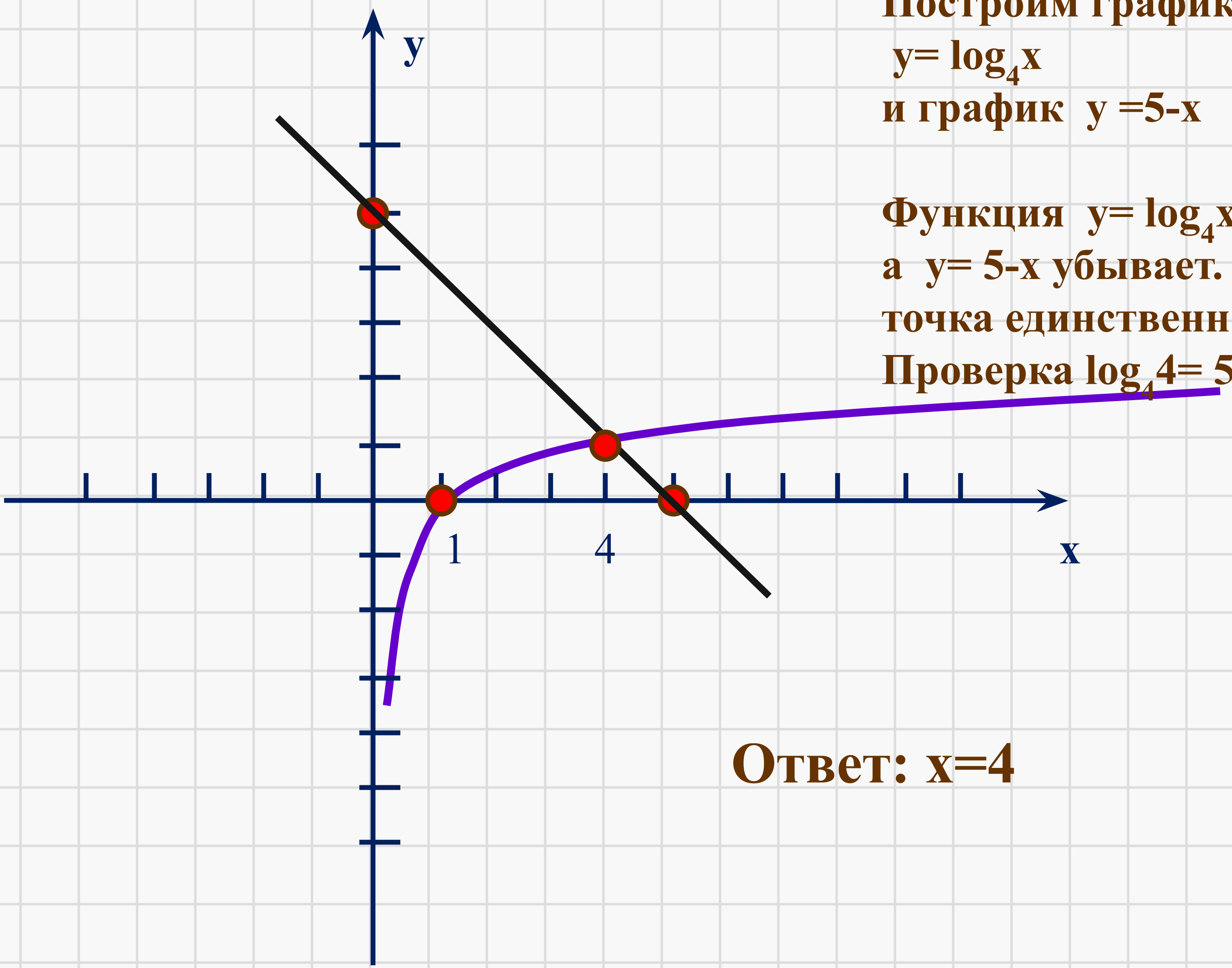
Построим график функции

$y = \log_4 x$

и график $y = 5 - x$

Функция $y = \log_4 x$ возрастает, а $y = 5 - x$ убывает. То есть точка единственная.

Проверка $\log_4 4 = 5 - 4$



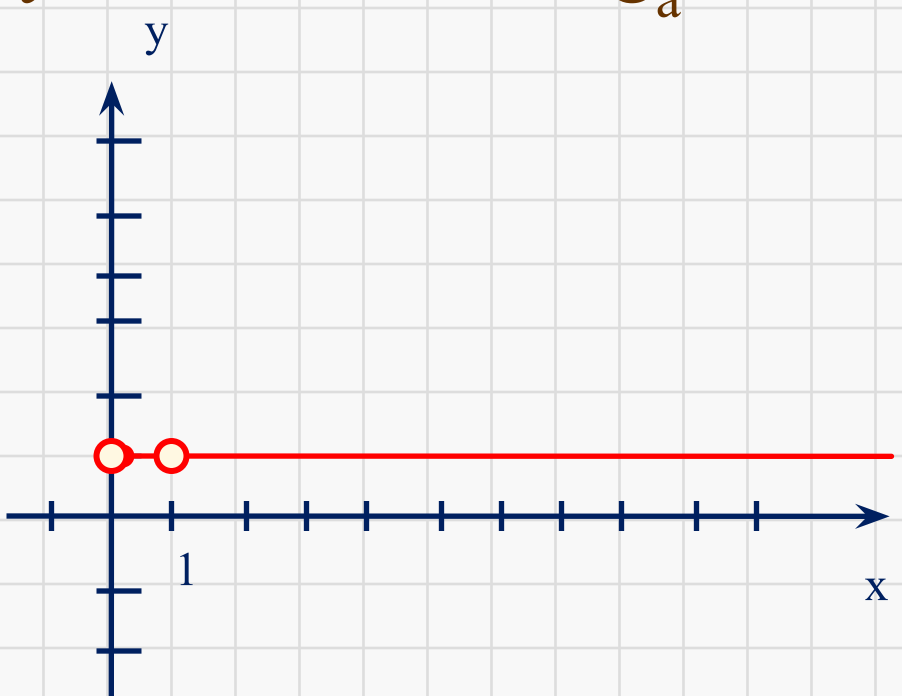
Ответ: x=4

Построить графики функции функции

$y=\log_x x$

$D(y)=(0;1)\ (1;+\infty)$

учитывая, что $\log_a a=1$, строим график $y=1$

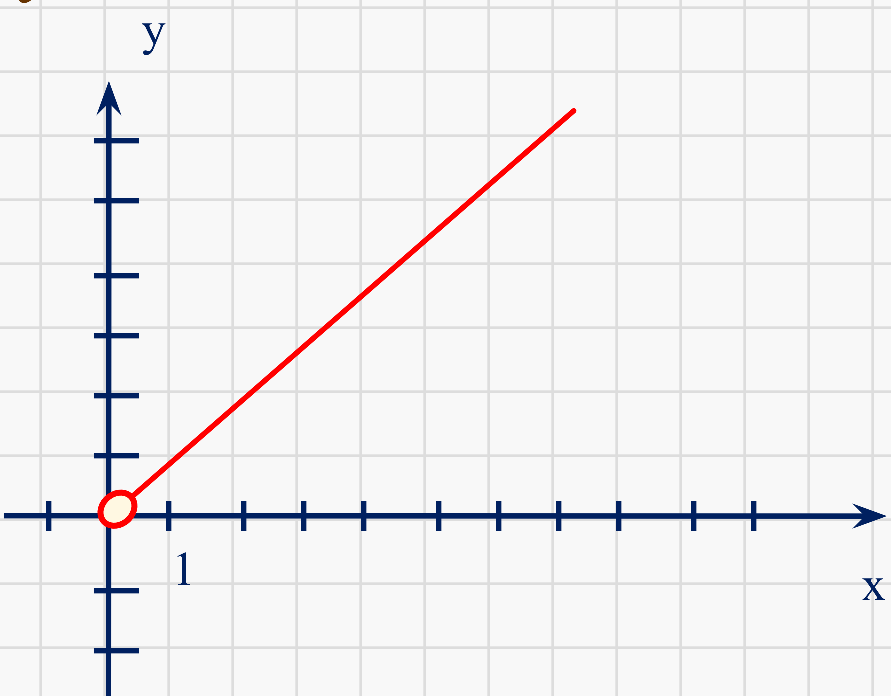


Построить графики функции функции

$y=2^{\log_2 x}$

$D(y)=(0;+\infty)$

учитывая, что $a^{\log_a c}=c$, строим график $y=x$

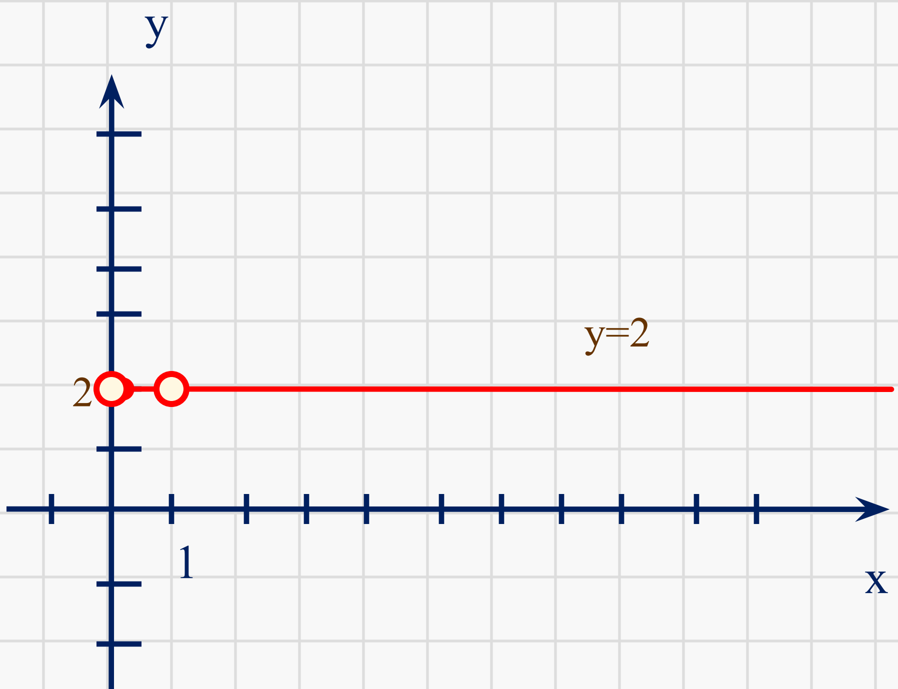


Построить графики функции функции

$y=x^{\log x 2}$

$D(y)=(0;1)\ (1;+\infty)$

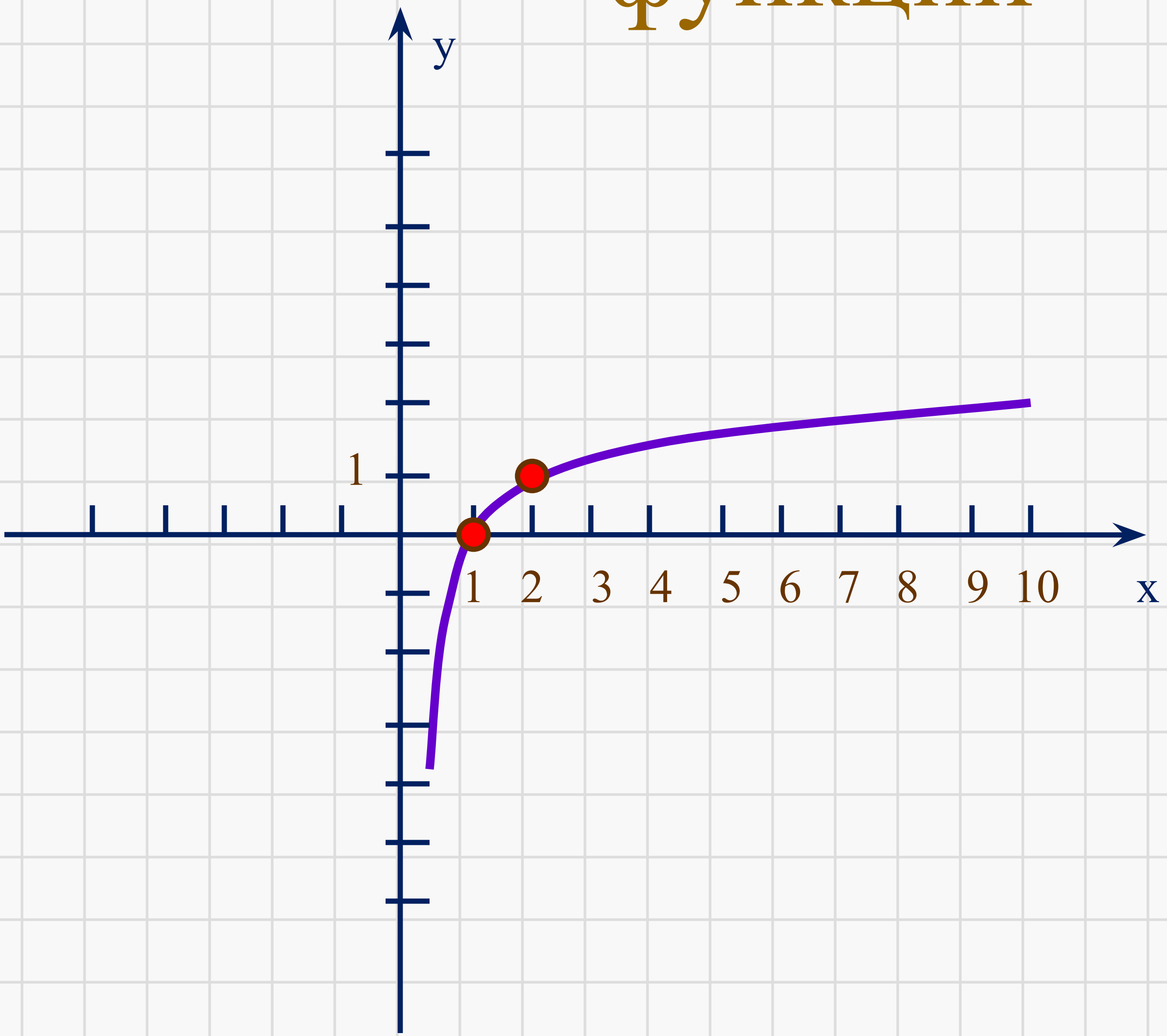
учитывая, что $a^{\log a c}=c$, строим график $y=2$



Применение логарифмов в физике, химии, биологии

- Физики шутят: “ Математика – царица всех наук, но служанка физики”. Так пошутить могут и музыканты, и биологи, и психологи и др. А это еще раз подтверждает правильность слов Карла Маркса “ ***Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой***”.

Преобразование графиков функции

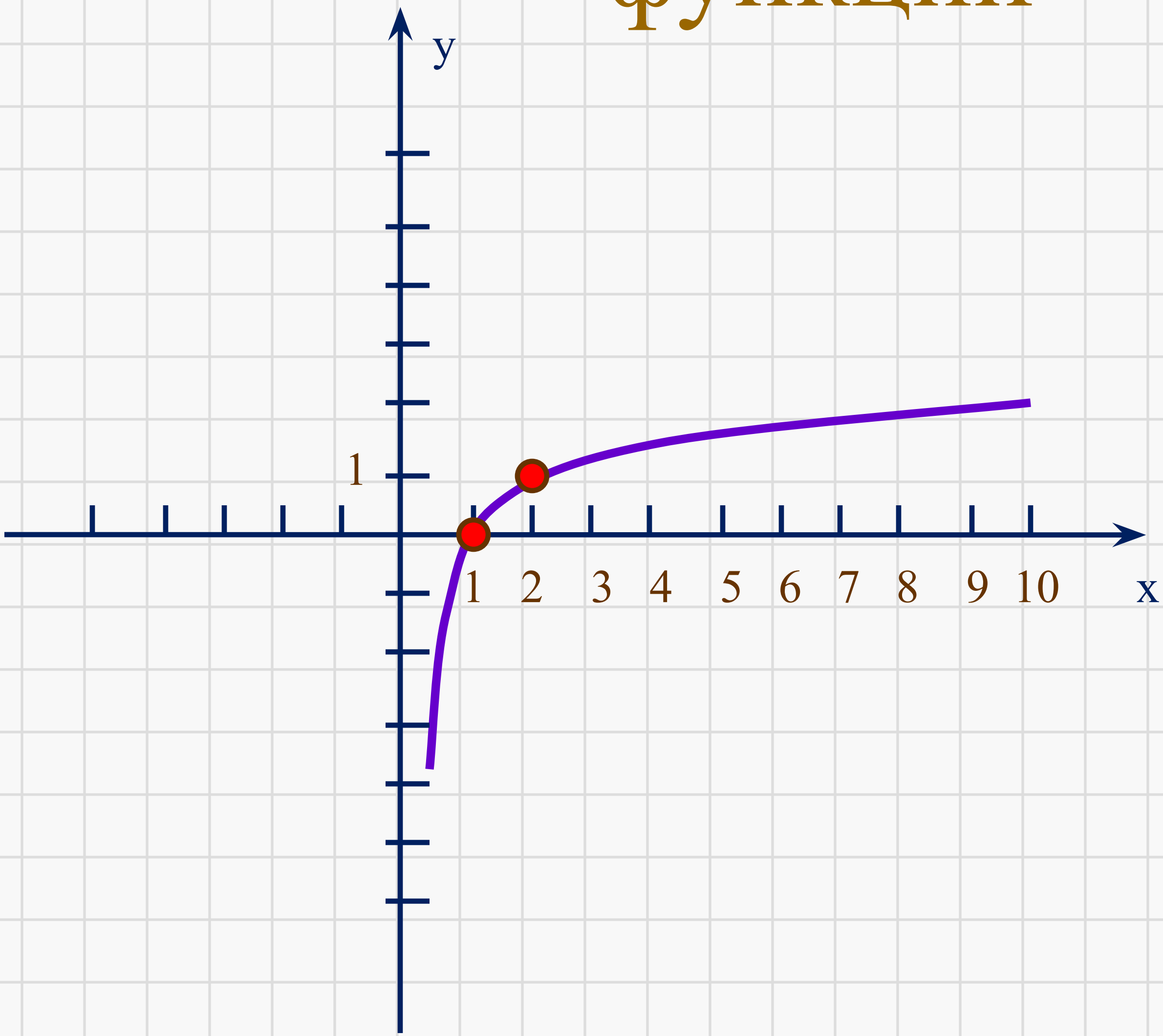


$y=\log_2 x+2$

D(y):(0;+∞)

E(y):(- ∞;+ ∞)

Преобразование графиков функции

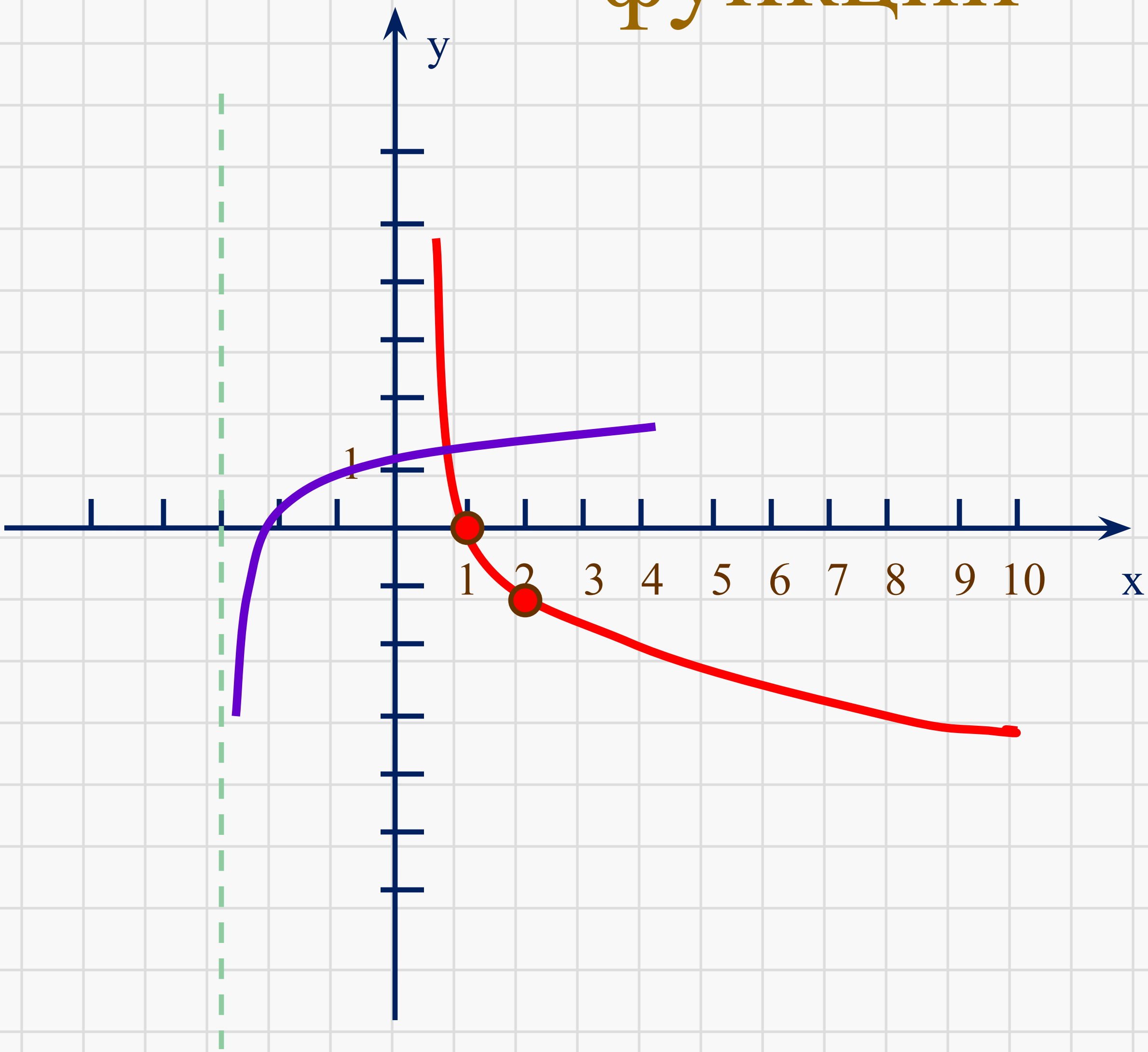


$y=\log_2(x+2)$

D(y):(-2;+∞)

E(y):(- ∞;+ ∞)

Преобразование графиков функции



$y=\log_{0.5}(x+3)$

D(y):(-3;+∞)

E(y):(- ∞;+ ∞)

$y=-\log_{0.5}(x+3)$

D(y):(-3;+∞)

E(y):(- ∞;+ ∞)

Известно завещание знаменитого американского государственного деятеля Бенджамина Франклина. Вот отрывок из него: «Препоручаю 1000 фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их с процентами, по 5 на сто в год, в заем молодым ремесленникам. Сумма эта через сто лет возвысится до 131000 фунтов стерлингов. Я желаю тогда 100000 фунтов были употреблены на постройку общественных зданий, остальные же 31000 фунтов отданы в проценты на 100 лет…». Оставляя всего 1000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Математический расчет это подтверждает

$$x = 1000 \cdot 1{,}05^{100}$$

Вычисления с помощью логарифма

14.02.2015

$$x = 1000 \cdot 1{,}05^{100}$$

$$\lg x = \lg(1000 \cdot 1{,}05^{100})$$

$$\lg x = \lg 1000 + \lg 1{,}05^{100}$$

$$\lg x = 3 + 100 \lg 1{,}05$$

$$\lg x = 3 + 100 \cdot 0{,}021$$

$$\lg x = 5{,}1$$

$$x = 131000$$

Используемая литература:

- Задача на 2 слайде:http://www.bankrabot.com/part2/work_12766.html
- Учебник: Мордкович А.Г., «Алгебра и начала анализа», профильный уровень
- Задачник: Мордкович А.Г., «Алгебра и начала анализа», профильный уровень
- http://www.matica.info/material1.html -завещание Франклина.