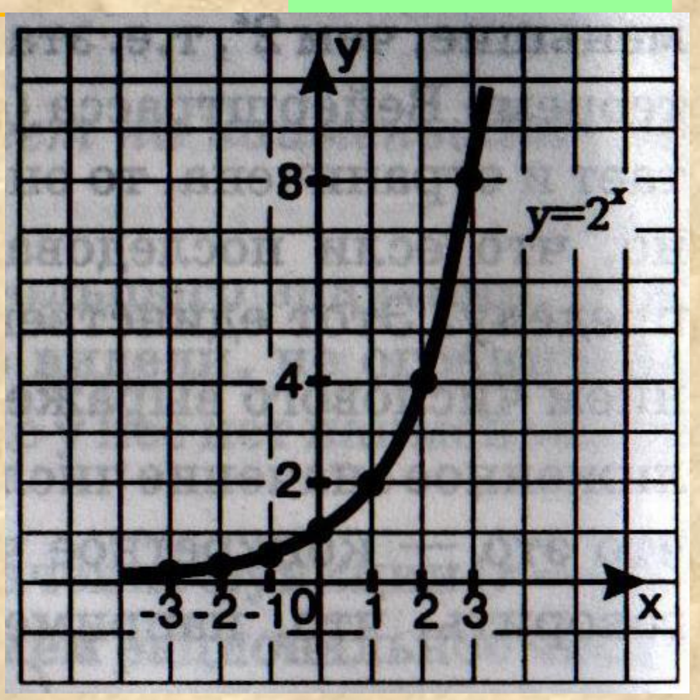
Показательная & логарифмическая функции

Рассмотрим выражение 2^x и найдём его значения при различных значениях переменных х.

Например: х=2, х=5.

если х= 2, то $2^x = 2^2 = 4$;

если х= 5, то $2^x = 2^5 = 32$;



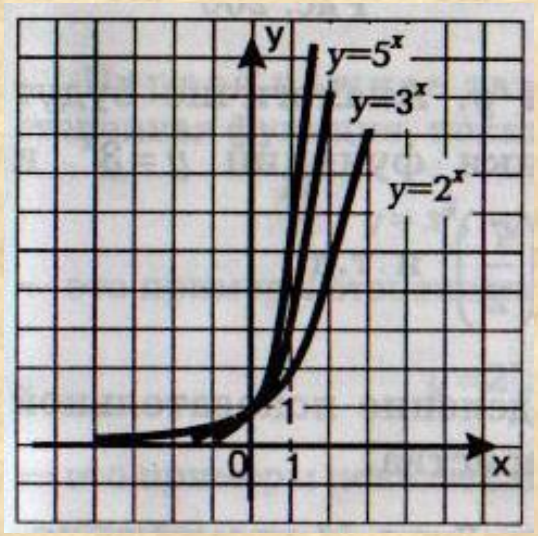
Поскольку у функции у= 2^x аргумент х содержится в показателе степени, её называют <u>показательной функцией</u>.

Свойства показательной функции

- D(f)= $(-\infty,+\infty)$;
- не является ни четной, ни нечетной;
- возрастает;
- не ограниченна сверху, ограниченна снизу;
- не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- непрерывна;
- E(f)= $(0,+\infty)$;
- выпукла вниз.

Аналогичными свойствами обладает любая функция вида

$y=a^x$, где $a>1$. На рис. В одной системе координат построены графики функций $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$.



Определение. Функцию вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$, называют ***показательной функцией***.

Основные свойства показательной **функции** $y=a^x$

№ п/п	$a>1$	$0<a<1$
1	$D(f)=(-\infty,+\infty)$	$D(f)=(-\infty,+\infty)$
2	$E(f)=(0,+\infty)$	$E(f)=(0,+\infty)$
3	Возрастает	Убывает
4	Непрерывна	Непрерывна

График функции $y=a^x$ для $a>1$ изображен на рис. 1, а для $0<a<1$ – на рис. 2.

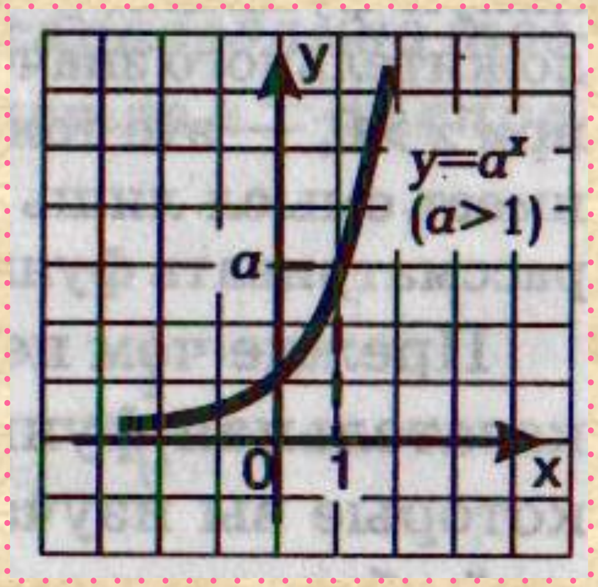


Рис.1

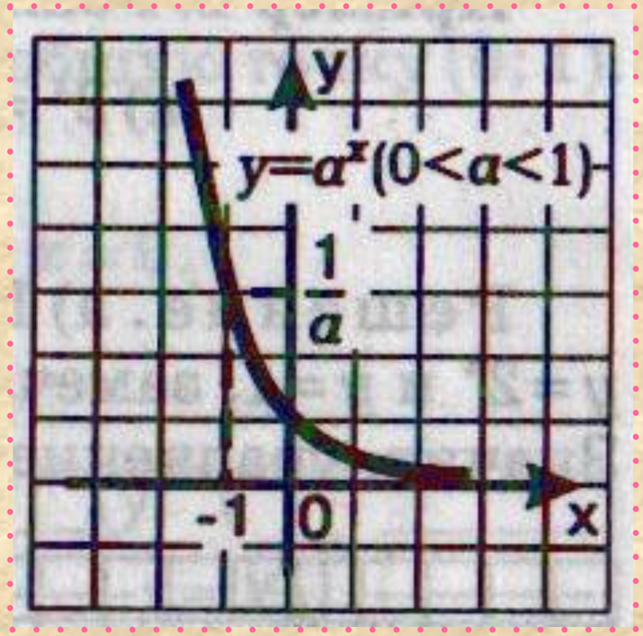


Рис. 2

Теорема 1. Если **a>1**, то равенство $a^t=a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда **t=s**.

Теорема2. Если **a>1**, то неравенство $a^x>1$ справедливо тогда и только тогда, когда **x>0** (рис .3), неравенство $a^x<1$ справедливо тогда и только тогда, когда **x<0**.

Теорема 3. Если $0<a<1$, то равенство $a^t=a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда **t=s**.

Теорема 4. Если $0<a<1$, то неравенство $a^x>1$ справедливо тогда и только тогда, когда **x<0** (рис.4); неравенство $a^x<1$ справедливо тогда и только тогда, когда **x>0** .

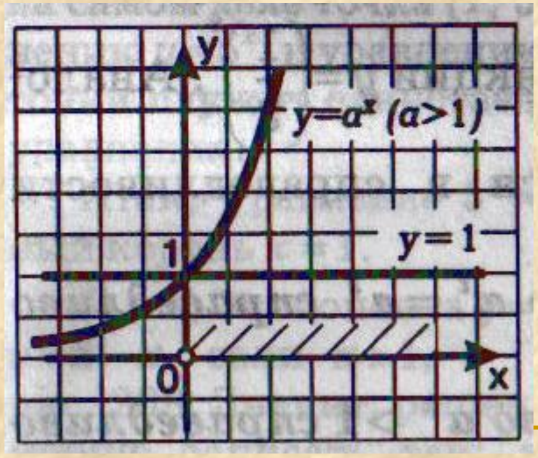


Рис.3

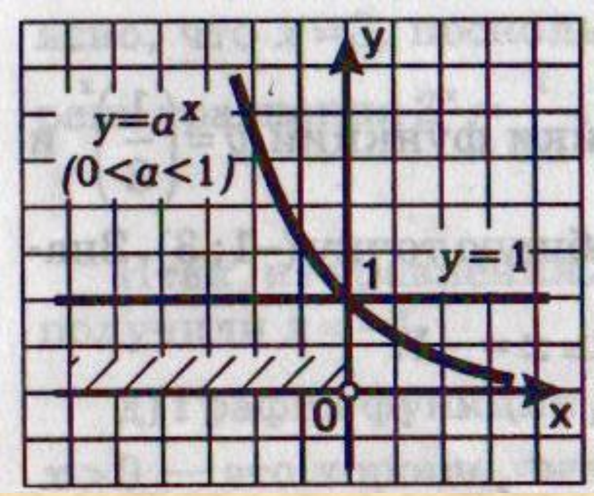


Рис.4

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от единицы основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^c = c$$

Логарифмическая функция

Рассмотрим одновременно две функции: показательную $\mathbf{y=a^x}$ и логарифмическую $y=\log_a x$.

Пусть точка (b,c) принадлежит графику функции $\mathbf{y=a^x}$**;** это

значит, что справедливо равенство $c=a^b$. Перепишем это равенство «на языке логарифмов»: $b=\log_a c$. Последнее равенство означает, что точка (c,b) принадлежит графику функции $y=\log_a x$.

Если точка (b,c) принадлежит графику функции $y=a^x$, то точка (c,b) приналежит графику функции $y=\log_a x$.

График функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции $y=a^x$ относительно прямой $y=x$.

На рис. 5 схематически изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ в случае, когда $a>1$; на рис. 6 схематически изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ в случае, когда **$0<a<1$** .

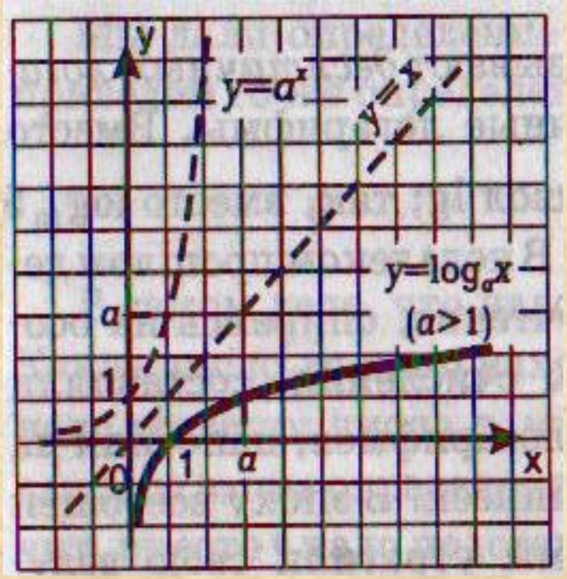


Рис. 5

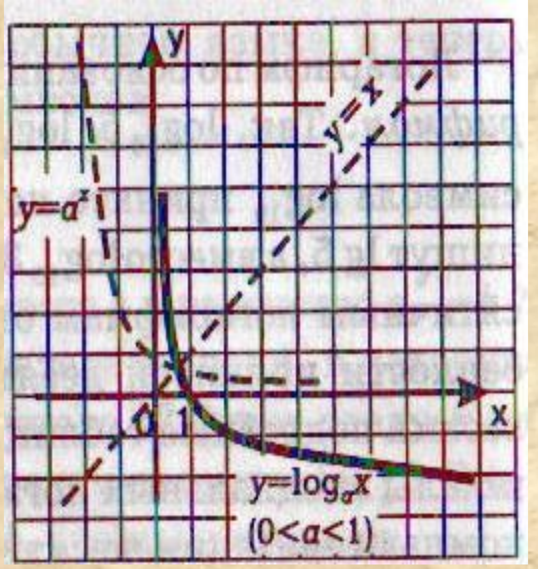


Рис. 6

Свойства функции $y=\log_a x$, $a>1$

1. **D(f)=** $(0,+\infty)$ **;**
2. не является ни четной, ни нечетной;
3. возрастает на;
4. не ограниченна сверху, не ограниченна снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. E(f)= $(-\infty,+\infty)$;
8. выпукла вверх.

Домашнее задание

а) ***Решить уравнение:*** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$

б) ***Построить график функции*** и найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-2,2]

$$y = 3 \cdot 3^x + 2$$

в) ***Решить уравнение:*** $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$

г) ***Найти наименьшее и наибольшее значения функций*** на заданном промежутке:

$$y = \lg x \qquad x \in [1,1000]$$

Спасибо за внимание