

Логарифмические неравенства

Решение логарифмических

неравенств

Решение логарифмических неравенств имеет много общего с решением показательных неравенств:

- а) При переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, мы также сравниваем основание логарифма с единицей;
- б) Если мы решаем логарифмическое неравенство с помощью замены переменных, то нужно решать относительно замены до получения простейшего неравенства.

Однако, есть одно очень важное отличие: поскольку логарифмическая функция имеет ограниченную область определения, при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, необходимо учитывать область допустимых значений.

Если при решении логарифмического уравнения можно найти корни уравнения, а потом сделать проверку, то при решении логарифмического неравенства этот номер не проходит: при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма необходимо учитывать область допустимых значений.

Теория

Решение логарифмических неравенств основано на монотонности логарифмической функции. Поэтому решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к решению соответствующих неравенств для функций $f(x)$ и $g(x)$.

Обрати внимание!

Если основание $a > 1$, то переходят к неравенству $f(x) > g(x)$ (знак неравенства не меняется), т.к. в этом случае логарифмическая функция возрастающая.

Если основание $0 < a < 1$, то переходят к неравенству $f(x) < g(x)$ (знак неравенства меняется), т.к. в этом случае логарифмическая

Свойства логарифмов.

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$

2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

4. $\log_a x^n = n \log_a x$

5. $\log_a a = 1$

6. $\log_a 1 = 0$

7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к другому основанию

9. $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

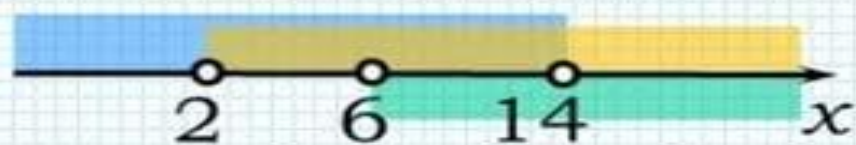
$$\log_3(2x - 4) > \log_3(14 - x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x - 4 > 14 - x, \\ 2x - 4 > 0, \\ 14 - x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16 + 4x - x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

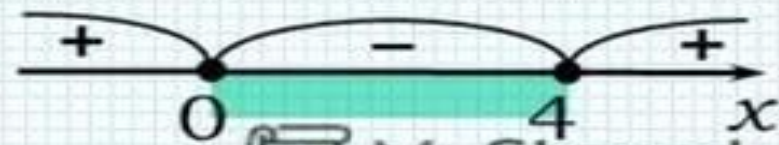
т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16 + 4x - x^2 \geq 16, \\ 16 + 4x - x^2 > 0; \end{cases} \text{ — лишнее условие}$$

$$4x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 4x \leq 0$$

$$x(x - 4) \leq 0$$



Ответ: [0; 4].