Логарифмические уравнения

Теория, примеры и решения.
Рекомендуется учащимся-старшеклассникам для самостоятельной подготовки к уроку, к ЕГЭ по математике, в ВУЗ.

выход

- Определение логарифма
- Об истории развития логарифмов
- Основные свойства логарифмов

  (Формулы преобразования логарифмов)
- О монотонности логарифмической функции
- Логарифмические уравнения
- Методы решения логарифмических уравнений
- Этапы решения логарифмических уравнений
- Проверь себя
- Готовься к ЕГЭ

Определение

О: Пусть $b>0$, $a>0$ и $a\neq1$. Число c называется **логарифмом** числа b **по основанию** a, если $a^c=b$.

Число b называется **аргументом логарифма**,

число a - **основанием логарифма**. Обозначение: $c=\log_a b$.

Из определения следуют **основные логарифмические тождества**:

1. $a^{\log_a b}=b$; 2. $\log_a a^b=b$.

О: Логарифм по основанию 10 называется **десятичным логарифмом**. Обозначение: $\lg x$.

О: Логарифм с основанием e называется **натуральным логарифмом** Обозначение: $\ln x$. $\ln x=\log_e x$.

Далее см. интерактивный урок

Определение и свойства логарифма

(смотри урок-фильм)

Для продолжения урока-фильма Меню - Control – Play (Ctrl+Enter)

Об истории развития логарифмов

Слово **логарифм** происходит от слияния греческих слов и переводится как отношений чисел, одно из которых является членом арифметической прогресс, а другое геометрической. Впервые это понятие ввел английский математик **Джон Непер.** Кроме того, этот человек известен тем, что он первый изобрел таблицу логарифмов, которая пользовалась большой популярностью среди ученых на протяжении долгих лет.В таблицы Непера, изданные в книгах под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов» и «Устройство удивительной таблицы логарифмов», вошли значения логарифмов синусов, косинусов и тангенсов углов от 0 до 99 градусов.

Первые **таблицы десятичных логарифмов** были составлены в 1617 г. английским математиком Бриггсом. Многие из них были выведены с помощью выведенной Бриггсом формулы.

Изобретатели логарифмов не ограничились созданием логарифмических таблиц, уже через 9 лет после их разработки в 1623 г. Английским математиком Гантером была создана первая логарифмическая линейка. Она стала рабочим инструментом для многих поколений. В настоящее время мы можем находить значения логарифмов, используя компьютер. Так, в языке программирования BASIC с помощью встроенной функции можно находить натуральные логарифмы чисел.

Слово **ЛОГАРИФМ** происходит от греческих слов **λσγοφ** - число и **αριυμοφ** - отношение

Джон Непер (1550-1617)

Первые таблицы логарифмов
назывались
*«Описание удивительной
таблицы логарифмов»*
(1614 г.) и
*«Устройство удивительной
таблицы логарифмов»*
(1619 г.)

Таблица XVI. ЛОГАРИФМЫ СИНУСОВ УГЛОВ ОТ 14 ДО 90°.

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
50°	$\bar{1}$,8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	$\bar{1}$,8905	39°	1	2	3
51°	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	38°	1	2	3
52°	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9023	37°	1	2	3
53°	9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36°	1	2	3
54°	9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	$\bar{1}$,9134	35°	1	2	3
55°	$\bar{1}$,9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9186	34°	1	2	3
56°	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33°	1	2	3
57°	9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	9284	32°	1	2	2
58°	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31°	1	2	2
59°	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	$\bar{1}$,9375	30°	1	1	2
60°	$\bar{1}$,9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29°	1	1	2
61°	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	28°	1	1	2
62°	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	27°	1	1	2
63°	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	9537	26°	1	1	2
64°	9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	$\bar{1}$,9573	25°	1	1	2
65°	$\bar{1}$,9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24°	1	1	2
66°	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23°	1	1	2
67°	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	9672	22°	1	1	2
68°	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	21°	0	1	1
69°	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	$\bar{1}$,9730	20°	0	1	1
70°	$\bar{1}$,9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19°	0	1	1
71°	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	9782	18°	0	1	1
72°	9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17°	0	1	1
73°	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16°	0	1	1
74°	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	$\bar{1}$,9849	15°	0	1	1
75°	$\bar{1}$,9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	14°	0	1	1
76°	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	13°	0	1	1
77°	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12°	0	1	1
78°	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	11°	0	1	1
79°	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	$\bar{1}$,9934	10°	0	0	1
80°	$\bar{1}$,9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9946	9°	0	0	1
81°	9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9958	8°	0	0	1
82°	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9968	7°	0	0	1
83°	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	6°	0	0	0
84°	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	$\bar{1}$,9983	5°	0	0	0
85°	$\bar{1}$,9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4°	0	0	0
86°	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3°	0	0	0
87°	9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	9997	2°	0	0	0
88°	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	$\bar{1}$,9999	1°	0	0	0
89°	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0,0000	0°	0	0	0
90°	0,0000														
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′

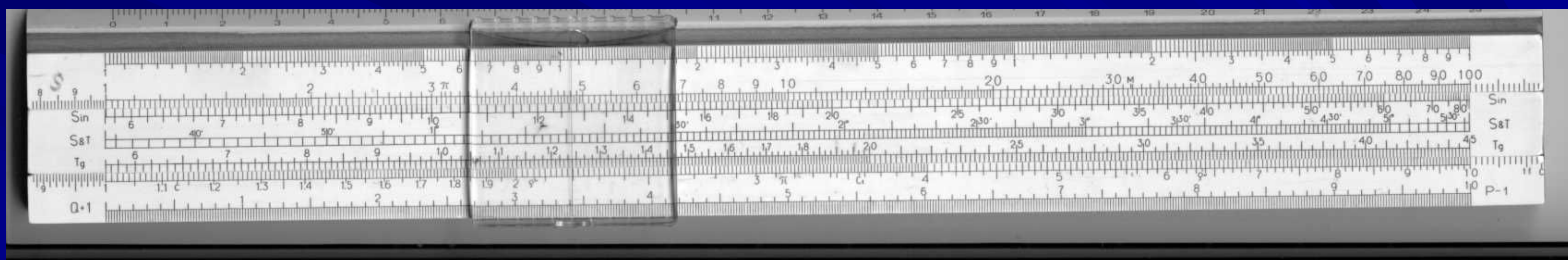
ЛОГАРИФМЫ КОСИНУСОВ УГЛОВ ОТ 0 ДО 76°.

Таблица XX. РАЗНЫЕ ТАБЛИЦЫ.

1) Натуральные логарифмы (основание $e = 2{,}71828\ldots$).

Десятки \ Единицы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913

Логарифмическая линейка



Логарифм можно найти теперь с помощью ПК LOG(x) - встроенная функция языка программирования BASIC, возвращает ln x

1) x = LOG(2.7)

PRINT x

Ответ: .993124…

2) x = LOG(1)

PRINT x

Ответ: 0

3) x %= LOG(2.7)

PRINT x

Ответ: 1

Основные свойства логарифмов

Если $a, b, c > 0$, и $c \neq 1$, то верны свойства:

$\log_c 1 = 0$. $\log_c c = 1$

$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$.

$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$. При $a = 1$ $\log_c \frac{1}{b} = -\log_c b$

Пусть, дополнительно, k - произвольное число. Тогда:

$\log_c a^k = k \log_c a$. **Если k=2n, то** $\log_c b^{2n} = 2n \log_c |b|$

$\mathrm{Log}_{c^r} b^r = \mathrm{Log}_c b$

$\log_{c^k} a = \frac{1}{k} \log_c a$.

Пусть, кроме того, $d > 0$ и $d \neq 1$. Тогда

$\log_c a = \frac{\log_d a}{\log_d c}$. В частности, при $d = a$ $\log_c a = \frac{1}{\log_a c}$

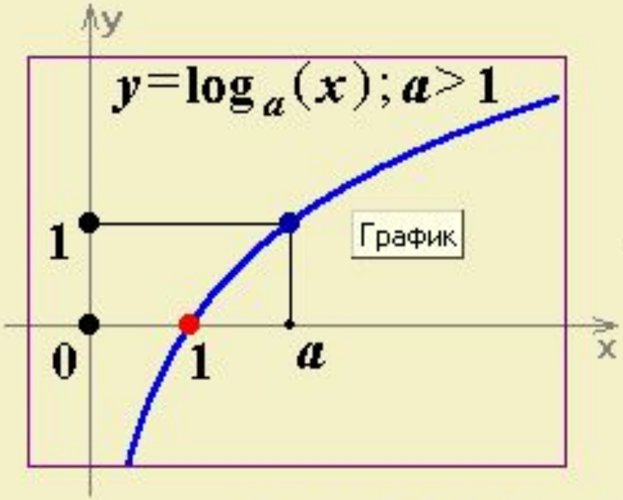
Формулы за работой

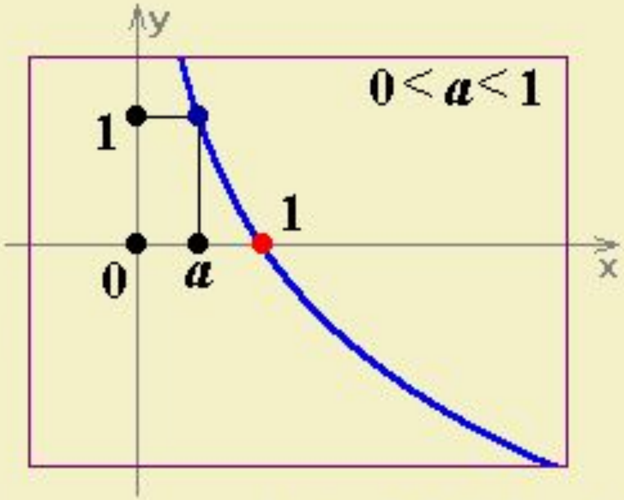
О монотонности логарифмической функции

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. **Логарифмической функцией с основанием** a называется функция $y = \log_a x$.

Область определения **Область изменения**

$D(\log_a x) = (0; +\infty)$; $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$.





При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает на всей области определения;

при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает на всей области определения.

Уравнение вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

(или сводящееся к этому виду)

называют логарифмическим

Уравнение может быть решено с помощью равносильных преобразований. При этом не происходит ни потери корней, ни приобретения посторонних корней.

В процессе решения уравнения можно перейти к уравнению- следствию. При этом потери корней не происходит, однако могут появиться посторонние корни.

Поэтому при решении уравнения, включающем переходы к уравнению-следствию,

проверка корней является обязательной частью решения.

Если $f(x)>0$ и $g(x)>0$, $a>0$ и $a \neq 1$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно уравнению

$$f(x)=g(x)$$

Решая уравнение, следует помнить также теорему о корне

Теорема о корне

Пусть функция $f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке X, число а – любое значение функции на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке X.

4) Сколько корней имеет уравнение?

Вариант 1

$$\log_2 |x| = 1{,}2$$

Вариант 2

$$|\log_2 |x|| = 1{,}2$$

Ответ

Методы решения логарифмических уравнений:

1. Потенцирование

Пример 1   Пример 2   Пример 3   Пример 4

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

2. Введение новой переменной

Пример 1

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

3. Переход к новому основанию

Пример 1

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

4. Разные методы решения

Пример 1   Пример 2

Для продолжения решения: Меню - Control - Play

Этапы решения уравнения

- ***Найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной***

- ***Решить уравнение, выбрав метод решения***

- ***Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение или выяснить, удовлетворяют ли они условиям ОДЗ***

Посмотри еще один подход к решению логарифмического уравнения

Вычисли устно:

$\log_{1/2} 4 =$ -2

$\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} =$ 3

$\log_5 \sqrt{5} =$ 1/2

$5^{2\log_5 3} =$ 9

$8^{\log_2 3} =$ 27

Ответы (щелкни)

Реши устно уравнения:

$\log_3 x = 3$ — $X=27$

$\log_{1/3} x = -3$ — $X=27$

$\log_2 3x = \log_2 4 + \log_2 6$ — $X=8$

$\log_x 8 - \log_x 2 = 2$ — $X=2$

Ответы (щелкни)

1) Сравни с 1 $\log_{1099}1098$

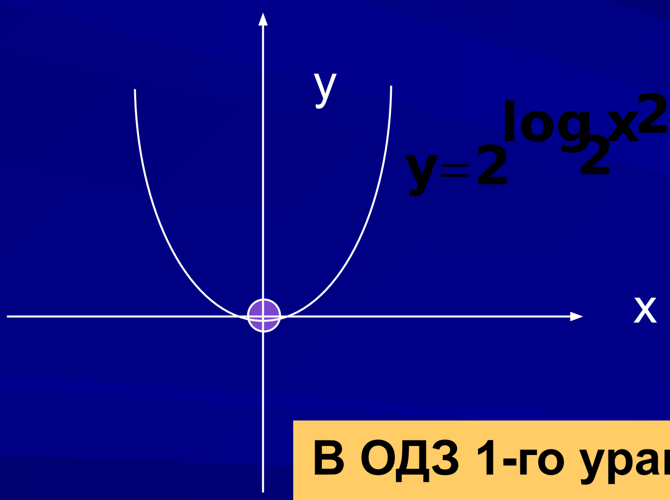
меньше 1

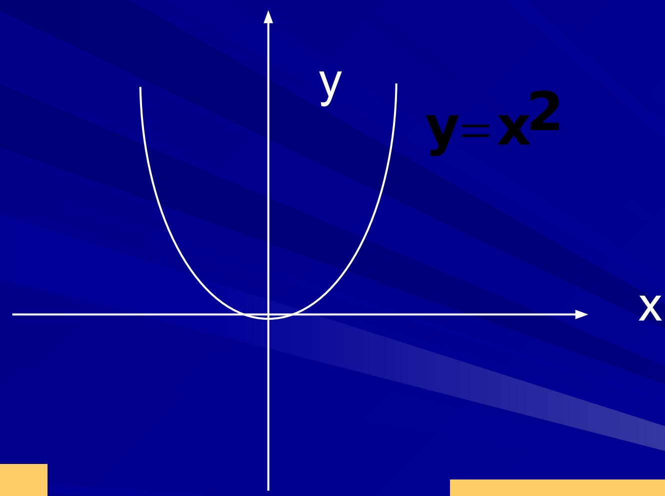
2) Сравни с 1 $\log_{296}297$

больше 1

3) Графики уравнений отличаются или совпадают?

$$y = 2^{\log_2 x^2} \qquad y = x^2$$





В ОДЗ 1-го уравнения не входит точка x=0, (точка «выколота»).

Ответ:

отличаются

Ответы (щелкни)

4) Сколько корней имеет уравнение?

Вариант 1

$\log_2 |x| = 1{,}2$

Вариант 2

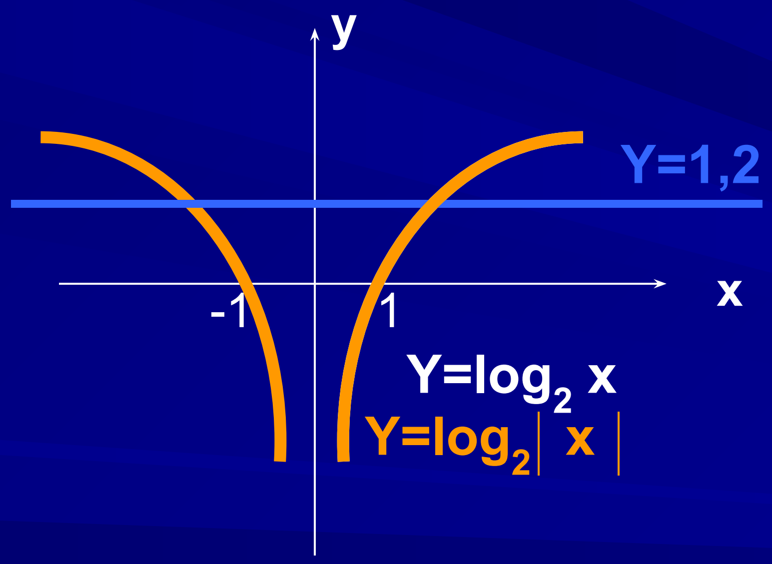
$|\log_2 |x|| = 1{,}2$

Ответ

4) Сколько корней имеет уравнение?

В1

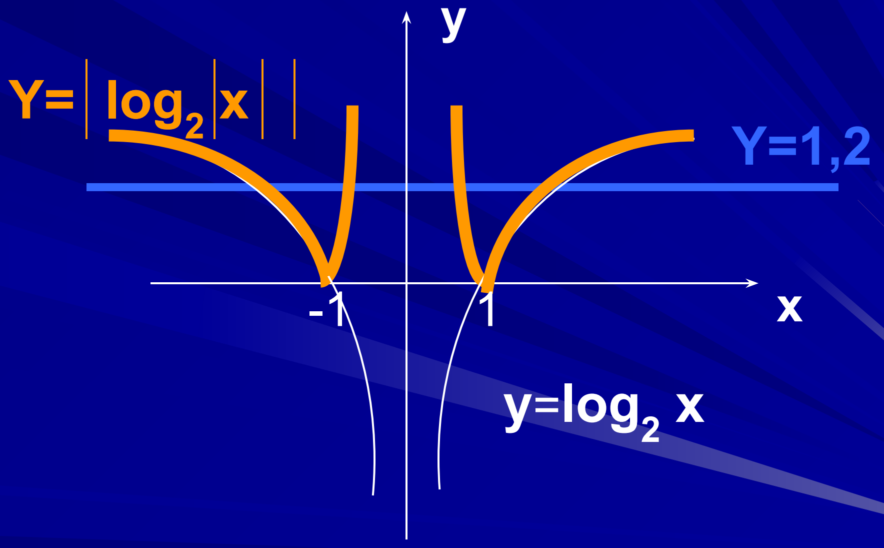
$\log_2 |x| = 1{,}2$



Ответ: 2

В2

$|\log_2 |x|| = 1{,}2$



Ответ: 4

http://www.eurekanet.ru

http://www.college.ru

http://www.EGE.ru

http://www.mediahouse.ru

Выход

Формулы преобразования логарифмов

и их использование при решении задач

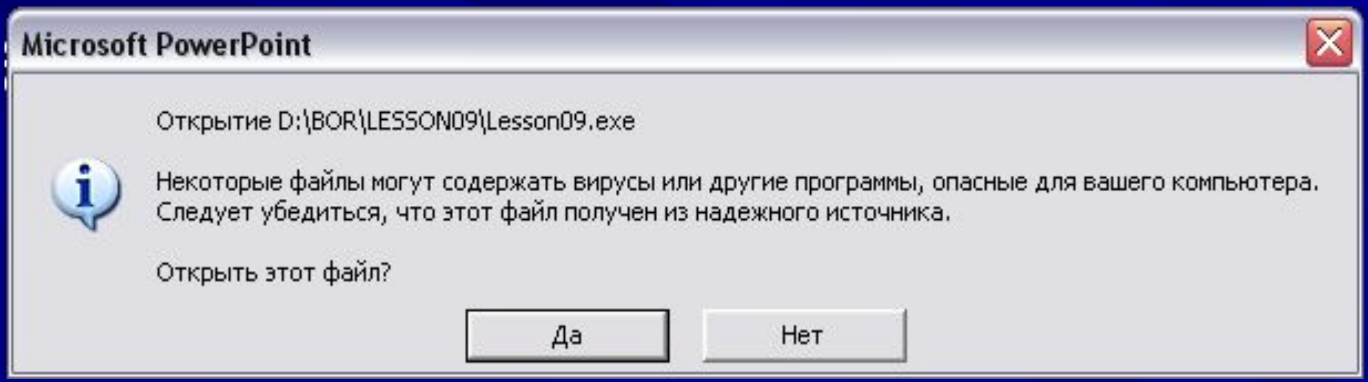
- **Примеры 1**
- **Примеры 2**

Для продолжения фильма: Ctrl + Enter

Внимание!

Для прослушивания речевых комментариев необходимо иметь наушники или колонки, иначе электронный материал утрачивает смысл.

Если при запуске интерактивных программных файлов появится сообщение



выбрать «Да».

Выход

Существует несколько методических подходов к решению логарифмических уравнений. Особенно популярным является первый подход, указанный выше.

Автор учебника «Алгебра и начала анализа 10-11» А.Г. Мордкович сравнивает разные подходы к решению:

«... Второй подход заключается в следующем: не находят ОДЗ, а сразу решают уравнение $f(x) = g(x)$. Затем все найденные корни проверяют непосредственной их подстановкой в исходное уравнение.

Чем плох первый подход? Тем, что иногда решение системы неравенств, определяющей ОДЗ уравнения, бывает весьма затруднительным, отвлекающим от основной работы — от решения уравнения. При этом часто бывает так, что уравнение $f(x) = g(x)$ вообще не имеет корней, так что вся работа по опережающему отысканию ОДЗ оказывается пустой тратой времени.

Бывает и так, что указанное уравнение имеет настолько простые корни, что их проверка подстановкой в исходное уравнение осуществляется легко и быстро. В таких случаях предпочтительнее второй подход.

Далее

А чем плох второй подход?

Тем, что мы рискуем "нарваться" на проверку подстановкой "плохих" корней. В этом случае предпочтительнее первый подход.

Хотя второй подход предпочтительнее по идейным соображениям. В принципе сначала нужно решить уравнение, затем сделать проверку. А при первом подходе, еще ничего не сделав для собственно решения уравнения, мы начинаем "подстилать соломку", находить ОДЗ, думая о возможном появлении посторонних корней и о необходимости их отсева.

Мы отдаем предпочтение третьему подходу, который, на наш взгляд, нивелирует недостатки, как первого, так и второго подходов.

План решения уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ заключается в следующем: решаем уравнение $f(x) = g(x)$; если уравнение имеет корни, то делаем проверку. Для этого составляем систему неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

но не решаем ее, а проверяем найденные корни уравнения подстановкой в неравенства системы (что значительно проще).

Но, вообще говоря, тактика решения логарифмического уравнения может быть достаточно гибкой: если ОДЗ можно найти без труда, выбирайте первый подход; если с ОДЗ много возни, то выбирайте третий подход (или второй — в случае очень простых корней).»

Далее

Еще раз о третьем подходе к решению логарифмических уравнений

При решении логарифмических уравнений **важно** помнить следующее утверждение: если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ (где $a > 0$ и $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

На практике это утверждение применяют так: переходят от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ (такой переход называют потенцированием), решают уравнение $f(x) = g(x)$, а затем проверяют его корни по условиям $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, определяющим область допустимых значений переменной (ОДЗ). Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые удовлетворяют этим условиям, являются корнями исходного уравнения. Те корни уравнения $f(x) = g(x)$, которые не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий, объявляются посторонними корнями для уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

(«Готовимся к ЕГЭ» В.Н. Студенецкая)

НЕПЕР Джон (1550-1617), шотландский математик, изобретатель логарифмов.

Потомок старинного воинственного шотландского рода. Изучал логику, теологию, право, физику, математику, этику. Увлекался алхимией и астрологией. Изобрел несколько полезных сельскохозяйственных орудий. В 1590-х годах пришел к идее логарифмических вычислений и составил первые таблицы логарифмов, однако свой знаменитый труд "Описание удивительных таблиц логарифмов" опубликовал лишь в 1614 году. В конце 1620-х годов была изобретена логарифмическая линейка, счетный инструмент, использующий таблицы Непера для упрощения вычислений. С помощью логарифмической линейки операции над числами заменяются операциями над логарифмами этих чисел.

www.km.ru

О: Основание показательной функции, график которой пересекает ось ординат под углом $45°$, называется числом "е".

Обозначение: e.

e - иррациональное число.

$e = 2,718281828459045...$