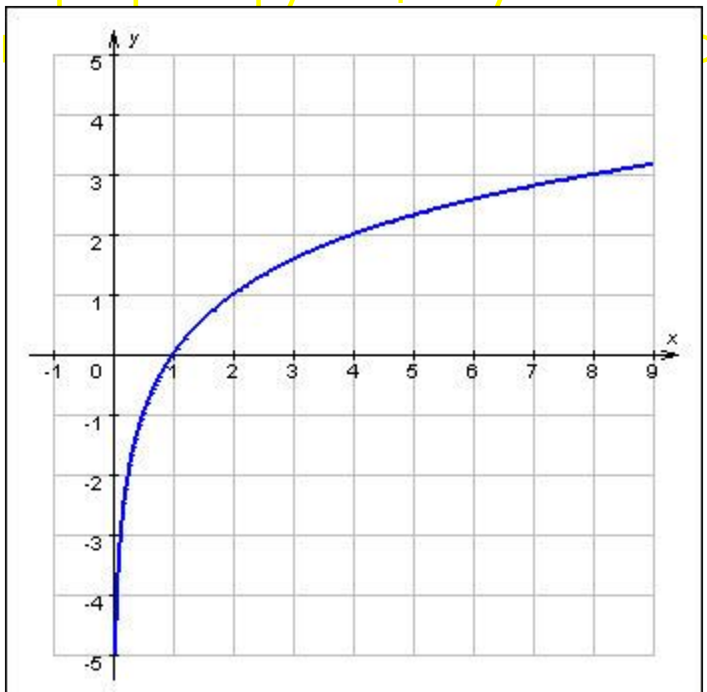
Логарифмические уравнения и их системы

Функция y = loga x (где a > 0, a =1) называется логарифмческой.

График логарифмической функции $\log_a x$ можно построить, воспользовавшись тем, что функция $\log_a x$ обратна показательной функции $y = a^x$. Поэтому достаточно построить график функции $y = a^x$

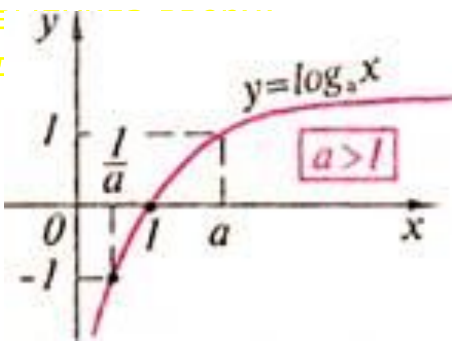
, а затем отобразит ... ительно прямой y



Свойства функции $y = \log_a x$

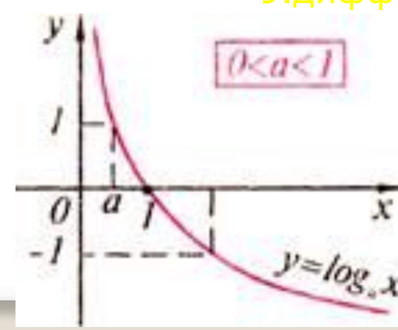
$y = \log_a x$ при $a > 1$;

1.D(f) = (0; + ∞);
2.не является ни четной, ни нечетной;
3.возрастает на (0; + ∞);
4.не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5.не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6.непрерывна;
7.E(f) = (- ∞;+ ∞);
8.
9.



$y = \log_a x$ при $0 < a < 1$;

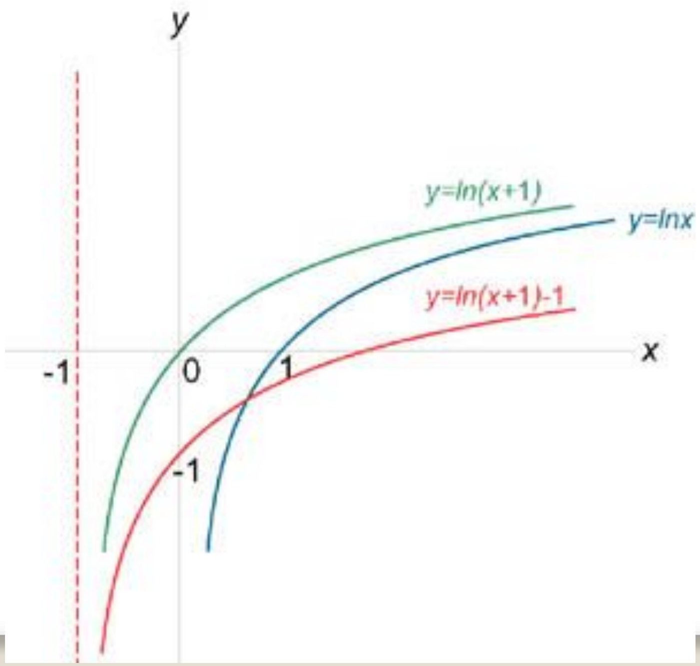
1.D(f) = (0;+);
2.не является ни четной, ни нечетной;
3.убывает на (0; +);
4.не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5.нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6.непрерывна;
7.E(f) = (-;+);
8.выпукла вниз;
9.дифференцируема.



ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

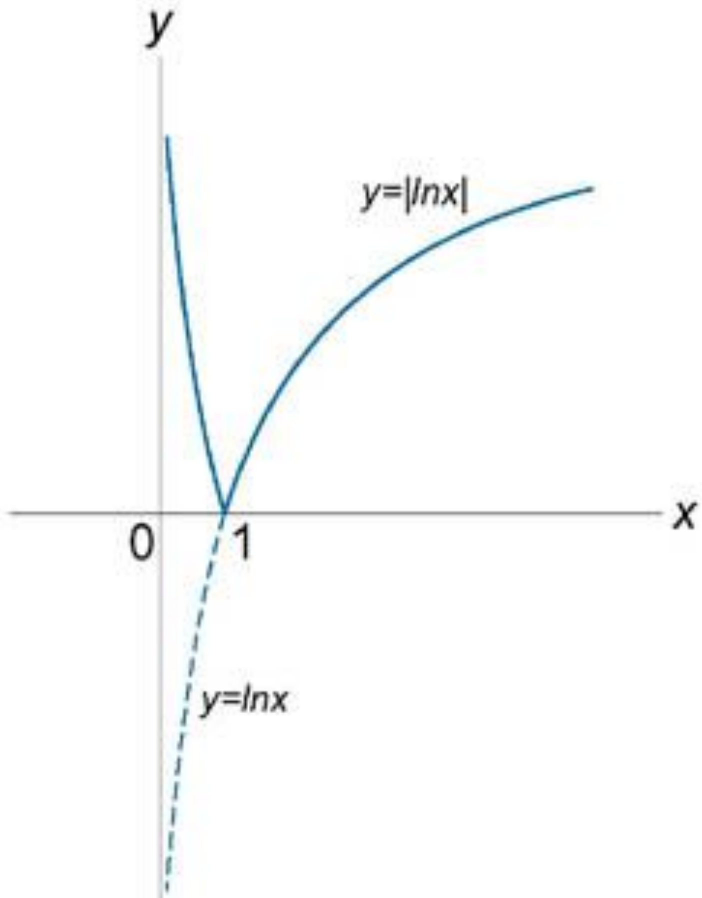
Изобразить график функции $y=\ln(x+1)-1$.

График функции получается в результате сдвига графика функции y = ln x на одну единицу влево (при этом мы получаем функцию y = ln (x + 1)) и на одну единицу



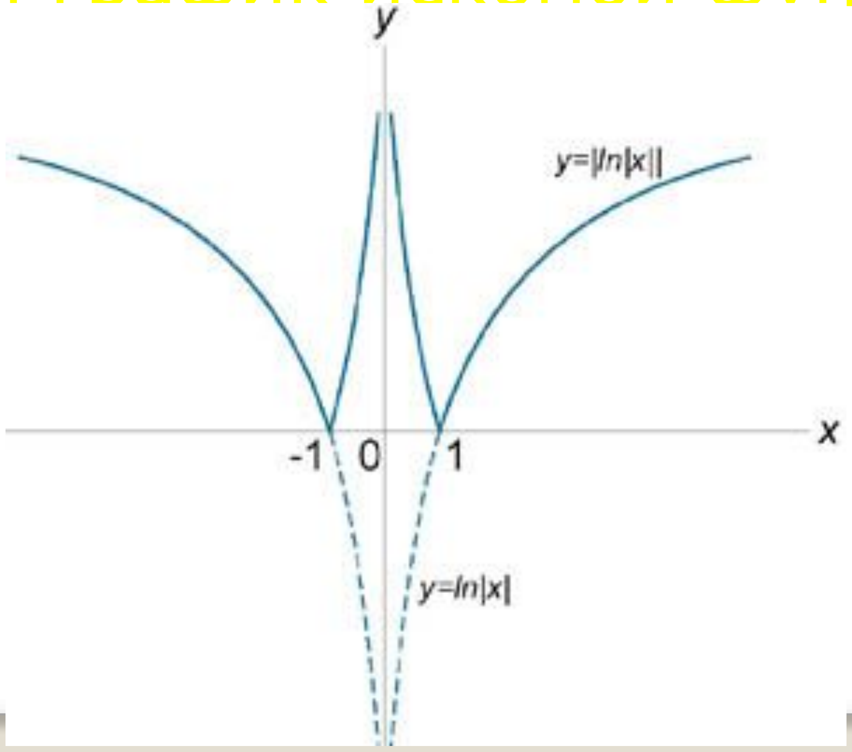
Изобразить график функции $y=|\ln x|$.

График искомой функции $y=|\ln x|$ получается в результате следующих преобразований. Часть графика функции , лежащая в области x ≥ 1, совпадает с графиком функции y = ln x. Остальная часть, соответствующая y < 0 (при 0 < x < 1), отражается относительно оси Ox в верхнюю полуплоскость.



Изобразить график функции $y=|\ln|x||$.

Сначала мы построим график функции $y=|\ln x|$, как описано в предыдущем примере. Затем отразим график этой функции относительно оси Oy в левую полуплоскость. Совокупность этих графиков и представляет собой график искомой функции



Основные методы решения уравнений

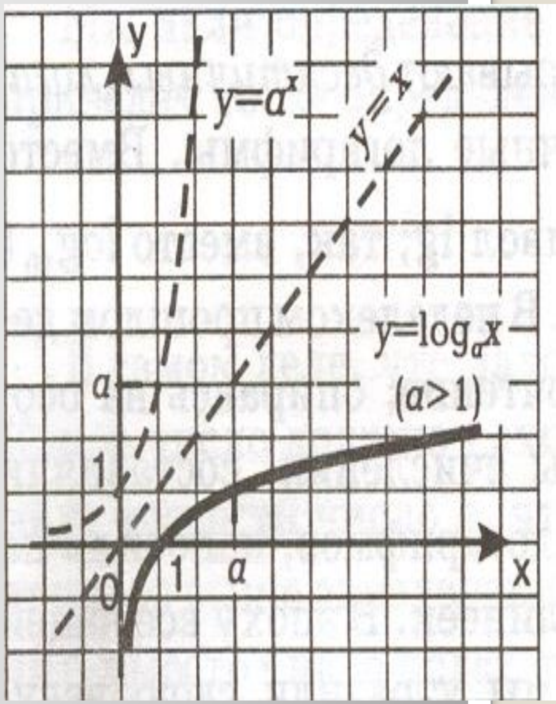
- функционально графический метод ;
- по определению логарифма;
- потенцирование;
- замена переменных;
- логарифмирование

Методы решения уравнений:

Функционально графический метод

- Пример №1: решите уравнение
- $\log_5 x=0$ Решение:

Уравнение $\log_5 x=0$ имеет один корень $x=1$, поскольку график функции $y=\log_5 x$ пересекает ось x в единственной точке (1;0).



Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$,
где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Логарифмические уравнения

$\log_a x = в$

$x = a^в$, где $a \neq 1$ и $a > 0$

По определению логарифма:

Пример:

$\log_x 16=2$

$x^2=16$

$x\neq 1$

$x>0$

$x_1 = 4$

$x_2 = -4$ – не удовлетворяет условию $x>0$

Ответ: 4

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Потенцирование

$\log_x (x-1) = \log_x (2x-8)$

$$\begin{cases} X-1 = 2x-8, \\ X-1>0, \\ 2x-8>0, \\ x \neq 1, \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=7, \\ x>1, \\ x>4, \\ x \neq 1, \\ x>0 \end{cases}$$

x=7 удовлетворяет всем условиям системы

Ответ: 7

Пример:

Замена переменных:

$\log_a f(x) + \log_a f(x) + c=0,$

$\log_a f(x) = t, \ f(x)>0$

$t^{2} + t + c = 0$

Далее решаем квадратное уравнение

Д = t - 4*a*c

2

Находим t_1 и t_2

Подставляем значения t_1 и t_2:

$\log_a f(x)=t_1$

$\log_a f(x)=t_2$

Пример:

$2*\log^2_{0,3} – 7*\log_{0,3} -4 = 0$

$\log_{0,3} x = t, x>0$

$2t^2 - 7t - 4 = 0,$

$Д = 49 + 32 = 81,$

$t_1 = (7+9) / 4 = 4,$

$t_2 = (7-9) / 4 = -1/2$

$\log_{0,3} x = 4,$ $\log_{0,3} x = -1/2,$

$x_1 = 0,0081$ $x_2 = \sqrt{30} / 3$

Ответ: $0,0081; \sqrt{30} / 3$

Логарифмирование:

$f(x) = g(x)$

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \\ \log_a f(x) = \log_a g(x) \end{cases}$$

Пример:

$x^{1-\log_5 x} = 0{,}04$

Прологарифмируем обе части по основанию 5.

$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04$

Учтем, что $\log_5 x^r = r*\log_5 x$ и что $\log_5 0{,}04 = -2$, следовательно уравнение можно привести к следующему виду:

$(1-\log_5 x) * \log_5 x = -2$

$\log_5 x = y$

$(1-y) * y = -2$

$y^2 - y - 2 = 0,$

$\log_5 x = 2,$ $\log_5 x = -1$

$x = 25$ $x = 1/5$

Ответ: 1/5; 25

Логарифмические системы уравнений

$\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ y=5 \\ \log_6 x+\log_6 y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ \log_6 xy=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+ \\ x* \end{cases}$

$y=6$

1) $x=5-y$

2) $(5-y)*y=6$

$5y-y^2-6=0$

$y^2-5y+6=0$

$Д = 25-24=1$

$y_1=(5+1)/2=3$

$y_2=(5-1)/2=2$

3) $x_1=5-3=2$

$x_2=5-2=3$

Ответ : (2;3),(3;2).

Методы решения неравенств

Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим неравенством.**

Равносильные преобразования

$$1)\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0, \\ a>1. \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<f(x)<g(x), \\ 0<a<1. \end{array}\right.$$

$$2)\ \log_{h(x)} (x)>\log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0, \\ h(x)>1. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0<f(x)<g(x), \\ 0<h(x)<1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$4)\ \log_a b - \log_c b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a-1)(b-1)(c-1)(c-a)>0, \\ a>0, a\neq 1, \\ c>0, c\neq 1, \\ b>0. \end{array}\right.$$

Пример: $\log_x(x-1) - \log_{x+1}(x-1) < 0$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} (x-1)(x-1-1)(x+1-1)(x+1-x)<0 \\ x>0, \\ x-1>0, \\ x+1>0. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x(x-1)(x-2)<0, \\ x>1. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (1;2)$$

$$6)\ \log_a b \times \log_c d>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)>0, \\ a>0, a\neq 1, \\ b>0, \\ c>0, c\neq 1, \\ d>0. \end{array}\right.$$

Замена переменной

$$5)\ f(\log_a x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=\log_a x, \\ f(t)>0. \end{array}\right.$$

Логарифмы на ЕГЭ

- Решение.
- Найдем О.Д.З.: $x<10$.
- Преобразуем данное уравнение:
- $-\lg(10-x)=-2$
- $\lg(10-x)=2$
- Решим получившееся уравнение по определению логарифма:
- $10-x=10^2$
- $-x=90$
- $x=-90$.
- Найденный корень уравнения удовлетворяет О.Д.З.

- Ответ: -90 .

В3. Найдите корень уравнения $2-\lg(10-x)=0$.

- Решение.
- Преобразуем числитель:
- $\log_a(b^3)*\log_b a = \log_b b^3 = 3*\log_b b = 3$
- У нас получилось следующее выражение: 3/(a*b)
- Теперь подставим значения a и b в получившееся выражение: 3/(3*5)=0,2 .
- Ответ: 0,2 .

B4. Найти значение выражения $(\log_a(b^3)*\log_b a)/(a*b)$, если a=3, b=5

B11. Найдите наибольшее значение функции $y=\log_{1/3}\sqrt{(x^3)}$ на отрезке [1/3;3]

- Решение.
- Рассмотрим функцию $y=\log_{1/3}f(x)$ – она убывающая, следовательно принимает наибольшее значение при наименьшем значении функции f(x).
- Функция $f(x)=\sqrt{(x^3)}$ возрастающая и определена на промежутке $(0;+\infty)$, т. е. наименьшее значение принимает при наименьшем значении x.
- $y_{наиб}=y(1/3)=\log_{1/3}\sqrt{(1/27)}=\log_{1/3}(1/3)^{3/2}=3/2*\log_{1/3}(1/3)=1,5$
- Ответ: 1,5.

- Решение.
- Найдем О.Д.З.: $x>0$.
- Представим x как $7^{\log_7 x}$ и подставим в данное неравенство:
- $7^{\log_7^2 x}+ 7^{\log_7^2 x}<14$ и решим его:
- $2* 7^{\log_7^2 x}<14$
- $7^{\log_7^2 x}<7$, $7>1$
- $\log_7^2 x<1$
- $-1<\log_7 x<1$, основание логарифма больше единицы, значит при потенцировании знак неравенства не поменяется:
- $1/7<x<7$
- Данный промежуток удовлетворяет О.Д.З.

- Ответ: $(1/7;7)$.

С3. Решите неравенство $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}<14$.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА В ВИДЕ ТЕСТА (ПРИМЕРЫ ИЗ ВАРИАНТОВ ЕГЭ)

1. Вычислите: $\log_2 400 - \log_2 25 =$

1)8 2)2 3)3 4)4

2. Известно, что $\log_7 a = 8$. Найдите $\log_7 \frac{a}{49}$

1)-6 2)6/49 3)6 4) a-49

3. Вычислите: $13^{\log_{13} 7} - 2 =$

1)13 2)9 3)22 4)5

4. Найдите область определения функции $y = \log_2(x^2 + x)$

1.$(0;+\infty)$
2.$(-\infty;-1) \cup (0;\infty)$
3.$(-1;+\infty)$
4.$(-1;0)$

5. Вычислите: $\log_{15}\log_5\log_2 32 =$

1. Вычислите: $\log_{13} 17 - \log_{13} \frac{17}{169} =$

1)13 2)2 3)17 4)-169

2. Известно, что $\log_3 c = -5$. Найдите $\log_3 \frac{81}{c}$

1)-1 2)9 3)4 4)0,8

3. Вычислите: $17^{\log_{17} 9} - 5 =$

1)17 2)4 3)14 4)23

4. $y = \log_2(x^2 - x)$

1.$(-1;\infty)$
2.$(-\infty;0) \cup (1;\infty)$
3.$(-\infty;0] \cup [1;\infty)$
4.$(0;1)$

5. Вычислите: $\log_3\log_3\log_3 3^{27} =$

Составьте число из номеров правильных ответов.

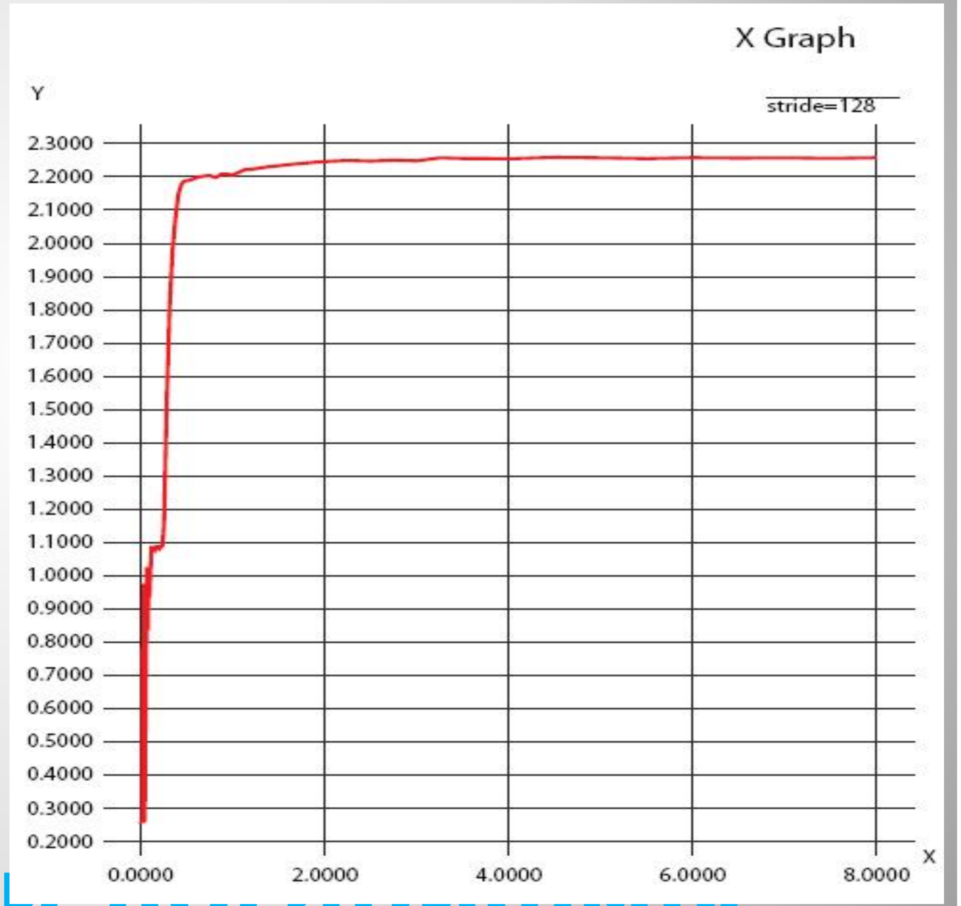
Проверим ответы.

Логарифмы в жизни

Заголовок этот, связывающий столь, казалось бы, несоединимые вещи, не притязает быть пародией на произведения Кузьмы Пруткова; речь в самом деле пойдет о звездах и о шуме в тесной связи с логарифмами.

Звезды, шум и логарифмы

Шум и звезды объединяются здесь потому, что и громкость шума и яркость звезд оцениваются одинаковым образом - по логарифмической шкале.



Звезды, шум и логарифмы

Астрономы распределяют звезды по степеням видимой яркости на светила первой величины, второй величины, третьей и т. д. Последовательные звездные величины воспринимаются глазом как члены арифметической прогрессии. Но физическая яркость их изменяется по иному закону: объективные яркости составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собой не что иное, как логарифм ее физической яркости. Звезда, например, третьей величины ярче звезды первой величины в 2,53-1, т. е. в 6,25 раза.

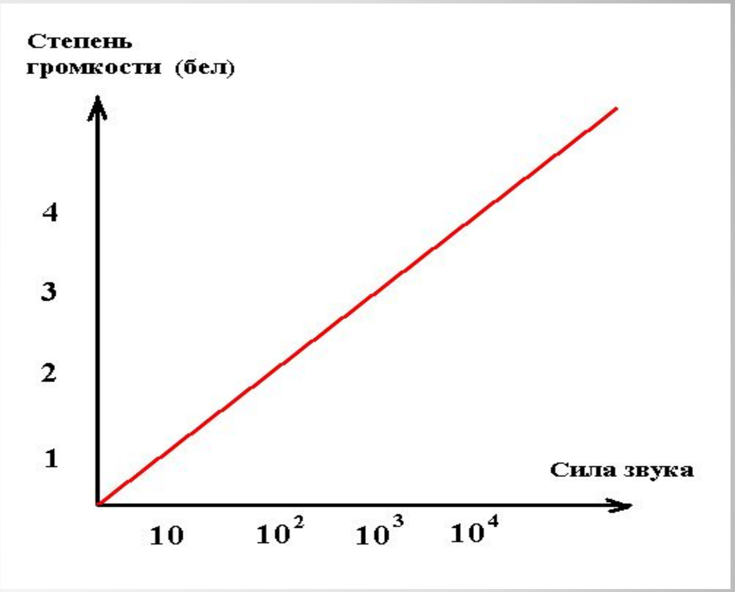
Короче говоря, оценивая видимую яркость звезд, астроном оперирует с таблицей логарифмов, составленной при основании 2,5.

Сходным образом оценивается и громкость шума. Вредное влияние шумов на здоровье людей побудило изучению шумов,к их классификации, к созданию определённых стандартов и эталонов. Единицей громкости служит «бел», практически - его десятая доля, «децибел». Последовательные степени громкости - 1 бел, 2 бела и т. д. (практически- 10 децибел, 20 децибел и т. д.)-- составляют для нашего слуха арифметическую прогрессию. Физическая же «сила» этих шумов (точнее - энергия) составляет прогрессию геометрическую со знаменателем 10. Разности громкостей в 1 бел отвечает отношение силы шумов 10. Значит, громкость шума, выраженная в белах, равна десятичному логарифму его физической силы.

Звезды, шум и логарифмы

Звезды, шум и логарифмы

Зависимость величины громкости от его физической характеристики



Формула зависимости

$$N \sim \lg S,$$

где N - величина громкости; S – сила звука

Шум, громкость которого больше 8 бел, признается вредным для человеческого организма.

Указанная норма на многих заводах превосходится: здесь бывают шумы в 10 и более бел; удары молотка в стальную плиту порождают шум в 11 бел.

Случайность ли то, что и при оценке видимой яркости светил и при измерении громкости шума мы имеем дело с логарифмической зависимостью между величиной ощущения и порождающего его раздражения? Нет, то и другое - следствие общего закона (называемого «психофизическим законом Фехнера»), гласящего: величина ощущения пропорциональна логарифму величины раздражения.

Звезды, шум и логарифмы

Никто и предположить не мог, что музыка и логарифмы связаны между собой. Известный физик Эйхенвальд вспоминал: “Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математику. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом не имеют ничего общего. “Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, - но ведь как раз пифагорова – то гамма для нашей музыки и оказалась неприемлемой”. Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах”.

Музыка и логарифмы

Зависимость частоты колебаний ноты «до» в разных октавах:

Номер октавы	Частота
0	n
1	$2n$
2	$n\times 2^2$
…	…
m	$n\times 2^m$

Музыка и логарифмы

Формула для нахождения частоты звука

$$N=nx2^{m}x({}^{12}\ 2\ )^{p}$$

где

P – номер ноты хроматической 12-ти звуковой гаммы

m – номер гаммы

Музыка и логарифмы