

МОУ «Старо - Матаковская средняя общеобразовательная школа»  
Алькеевского муниципального района РТ.

Конспекты системы уроков  
по теме :

# "Логарифмические уравнения."

Учительницы математики  
II квалификационной категории  
Советниковой Нины

Николаевны.

2009 г.

**Для чего были придуманы логарифмы?**

**Для ускорение вычислений.**

**Для упрощений вычислений.**

**Для решение астрономических задач.**

- В современной школе основной формой обучения математике ,главным связующем звеном в интеграции различных организационных форм обучения по-прежнему остается урок. В процессе обучения математический материал осознается и усваивается преимущественно в процессе решения задач, потому на уроках математики теория не изучается в отрыве от практики. Для того чтобы успешно решать логарифмические уравнения , на которые в учебном плане отведено всего 3 часа, необходимо уверенное владение формулами для логарифмов и свойствами логарифмической функции. Тема « Логарифмические уравнения» в учебном плане идет за логарифмическими функциями и свойствами логарифмов.
- Ситуация несколько осложняется по сравнению с показательными уравнениями наличием ограничений на область определения логарифмических функций . Использование формул логарифма произведения, частного и других без дополнительных оговорок может привести как к приобретению посторонних корней, так и к потере корней . Поэтому необходимо внимательно следить за равносильностью совершаемых преобразований.

«Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь»

● **Тема: « Логарифмические уравнения.»**

*Цели:*

Образовательные:

1. Ознакомить и закрепить основные методы решения логарифмических уравнений, предупредить появления типичных ошибок.
2. Предоставить каждому обучающему возможность проверить свои знания и повысить их уровень.
3. Активизировать работу класса через разные формы работы.

Развивающие:

1. Развивать навыки самоконтроля.

Воспитательные:

1. Воспитывать ответственное отношение к труду.
2. Воспитывать волю и настойчивость, для достижения конечных результатов.

## Урок №1.

Тема урока: «Методы решения логарифмических уравнений»

Тип урока: Урок ознакомления с новым материалом

Оборудование : Мультимедиа.

Ход урока.

1. *Организационный момент:*

2. *Актуализация опорных знаний;*

Упростите:

$\log_{25} 54 - \log_5 \sqrt{6}$	$\sqrt{32}^{\frac{2}{5}}$	$\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2}$	$\lg 18 - 2\lg \sqrt{6}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$
$\lg_2 5 + \frac{1}{\lg 2}$	$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$	$\log_2 3 \cdot \log_3 2$	$\log_3 27$	$\frac{\log_3 8 + \log_3 2}{\log_2 36 - \log_2 9}$
$\log_8 128$	$\log_{25} 14 - \log_{25} 2$	$\frac{\lg 54}{\lg 5} - \frac{\lg 6}{\lg 5}$	$\log_5 6 + \log_5 7$	$\log_{\sqrt{8}} 32$
$\frac{1}{2} \ln 9 + \ln 2$	$\log_2 5 + \frac{1}{\lg 2}$	$\frac{\lg 30}{\lg 3} + \frac{\lg 2}{\lg 3}$	$\log_5 5$	$2 \ln \sqrt{14} - \ln 7$

Определение: Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение

$$\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$$

Способы решения

1. Решение уравнений на основании определения логарифма, например, уравнение  $\log_a x = b$  ( $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ) имеет решение  $x = a^b$ .
2. Метод потенцирования. Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их: если  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ , то  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1$ .
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод логарифмирования обеих частей уравнения.
5. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию.
6. Функционально – графический метод.

## 1 метод:

На основе определения логарифма решаются уравнения, в которых по данным основаниям и числу определяется логарифм, по данному логарифму и основанию определяется число и по данному числу и логарифму определяется основание.

$$\begin{aligned}\log_2 4\sqrt{2} &= x, \\ 2^x &= 4\sqrt{2}, \\ 2^x &= 2^{5/2}, \\ x &= 5/2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{3\sqrt{3}} x &= -2, \\ x &= 3\sqrt{3}^{-2}, \\ x &= 3^{-3}, \\ x &= 1/27.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_x 64 &= 3, \\ x^3 &= 64, \\ x^3 &= 4^3, \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Решите уравнения:

$$\lg(x^2-6x+9) - 2\lg(x-7) = \lg 9.$$

**Условие для проверки всегда составляем по исходному уравнению.**

$$(x^2-6x+9) > 0, \quad x \neq 3,$$

$$x-7 > 0; \quad x > 7; \quad x > 7.$$

С начала нужно преобразовать уравнение привести к виду  $\log \left( \frac{(x-3)}{(x-7)} \right)^2 = \lg 9$  применяя формулу логарифм частного.

$$\left( \frac{(x-3)}{(x-7)} \right)^2 = 9,$$

$$\frac{(x-3)}{(x-7)} = 3,$$

$$x-3 = 3x-21,$$

$$x=9.$$

$$\frac{(x-3)}{(x-7)} = -3,$$

$$x-3 = -3x+21,$$

$$x=6. \text{ посторонний корень.}$$

Проверка показывает 9 корень уравнения.

Ответ : 9

Решите уравнения:

$$\log_6^2 x + \log_6 x + 14 = (\sqrt{16 - x^2})^2 + x^2,$$

$$16 - x^2 \geq 0 ; \quad -4 \leq x \leq 4;$$

$$x > 0, \quad x > 0, \quad \text{О.Д.З. } [0, 4).$$

$$\log_6^2 x + \log_6 x + 14 = 16 - x^2 + x^2,$$

$$\log_6^2 x + \log_6 x - 2 = 0$$

$$\text{заменим } \log_6 x = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0 ; \quad D = 9 ; \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -2.$$

$\log_6 x = 1, x = 6$  посторонний корень .

$\log_6 x = -2, x = 1/36$  , проверка показывает  $1/36$  является корнем .

Ответ :  $1/36$ .



4 метод:

Решите уравнения

$$x^{\log_3 x^2} = 3x, \text{ возьмем от обеих частей уравнения логарифм по основанию 3}$$

вопрос :

1. Это – равносильное преобразования ?
2. Если да то почему ?

Получим

$$\log_3 x^{\log_3 x^2} = \log_3 (3x)$$

Учитывая теорему 3, получаем :

$$\begin{aligned} \log_3 x^2 \log_3 x &= \log_3 3x, \\ 2 \log_3 x \log_3 x &= \log_3 3 + \log_3 x, \\ 2 \log_3^2 x &= \log_3 x + 1, \\ 2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

заменяем  $\log_3 x = t$ ,  $x > 0$   $2t^2 + t - 2 = 0$ ;  $D = 9$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = -1/2$

●  $\log_3 x = 1$ ,  $x = 3$ ,

●  $\log_3 x = -1/2$ ,  $x = 1/\sqrt{3}$ .

Ответ:  $\{3 ; 1/\sqrt{3}\}$ .

5 метод :

$$\text{Решить уравнения: } \log_9(37-12x) \log_{7-2x} 3 = 1,$$

$$37-12x > 0, \quad x < 37/12,$$

$$7-2x > 0, \quad x < 7/2, \quad x < 7/2,$$

$$7-2x \neq 1; \quad x \neq 3; \quad x \neq 3;$$

$$\log_9(37-12x) / \log_3(7-2x) = 1,$$

$$\frac{1}{2} \log_3(37-12x) = \log_3(7-2x),$$

$$\log_3(37-12x) = \log_3(7-2x)^2,$$

$$37-12x = 49 - 28x + 4x^2,$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad D=19, \quad x_1=1, \quad x_2=3, \quad 3 \text{ –посторонний}$$

корень .

Проверкой убеждаемся , что  $x=1$  корень уравнения.

## 6 метод

Решите уравнения:  $\log_3 x = 12 - x$ .

Так как функция  $y = \log_3 x$  возрастающая, а функция  $y = 12 - x$  убывающая на  $(0; +\infty)$  то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень. Который легко можно найти. При  $x=10$  заданное уравнение обращается в верное числовое равенство  $1=1$ . Ответ  $x=10$ .

*Итог урока.*

С какими методами решения логарифмических уравнений мы познакомились на уроке?

*Домашние задание:*

Определите метод решения и решите № 1547(а,б) ,  
№1549(а,б), №1554(а,б) .

Проработать весь теоретический материал и разобрать  
примеры §52.

2 урок.

Тема урока: «Применение различных методов при решении логарифмических уравнений.»

Тип урока: Урок закрепления изученного

Ход урока.

1. *Организационный момент:*

2. *«Проверь себя»*

$$1) \log_{-3} ((x-1)/5) = ?$$

$$2) \log_5 (121 - x^2), \quad (121 - x^2) \geq 0, \quad x < -11, \quad x \geq 11.$$

$$3) 3^{2x} = 5, \quad \log_5 3 = 2x, \quad x = (\log_5 3)/2.$$

$$4) 9^{2\log_3 5} = 3^{4\log_3 5} = 4^5$$

$$5) \lg x^2 = 2\lg x.$$

3.Выполнение упражнений:  
№1563 (б )

Каким способом можно решить данное уравнение ?  
(метод введение новой переменной )

$$\log_3^2 x + 3 \log_3 x + 9 = 37 / \log_3 (x/27); \quad x > 0$$

Обозначим  $\log_3 x = t$ ;  $t^2 - 3t + 9 = 37 / (t-3)$ ;  $t \neq 3$ ,  
 $(t-3) ( t^2 - 3 t + 9) = 37$ ,

$$t^3 - 27 = 37; \quad t^3 = 64 ; t = 4.$$

$$\log_3 x = 4 ; x = 81.$$

Проверкой убеждаемся , что  $x=81$  корень уравнения.

## №1564 (а); (метод логарифмирования)



$\log_3 x$   
**X = 81**, возьмем от обеих частей  
уравнения логарифм по основанию 3;

$$\log_3 X^{\log_3 x} = \log_3 81; \quad \log_3 x \log_3 x = \log_3 81; \quad \log_3^2 x = 4;$$
$$\log_3 x = 2, \quad x = 9;$$
$$\log_3 x = -2, \quad x = 1/9.$$

Проверкой убеждаемся, что  $x=9$  и  $x=1/9$  корни уравнения.

#### 4. Физкультминутка(за партами, сидя).

- 1 Областью определения логарифмической функции  $y = \log_3 X$  является множество положительных чисел .
- 2 Функция  $y = \log_3 X$  монотонно возрастает .
3. Область значений логарифмической функции от 0 до бесконечности.
- 4  $\log_a c/v = \log_a c - \log_a v$ .
- 5 Верно , что  $\log_8 8^{-3} = 1$ .



№1704.( a)

$$1 - \sqrt{x} = \ln x$$

Так как функция  $y = \ln x$  возрастающая, а функция

$y = 1 - \sqrt{x}$  убывающая на  $(0; +\infty)$  то заданное уравнение на этом интервале имеет один корень. Который легко можно найти. При  $x=1$  заданное уравнение обращается в верное числовое равенство  $1=1$ .

Ответ :  $x=1$ .

№ 1574(б)

$$\log_3 (x+2y) - 2\log_3 4 = 1 - \log_3 (x - 2y), \quad \log_3 (x^2 - 4y^2) = \log_3 48,$$

$$\log_{1/4} (x - 2y) = -1;$$

$$\log_{1/4} (x - 2y) = -1;$$

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 - 48 &= 0, & x &= 4 + 2y, & x &= 8, \\ x - 2y &= 4; & 16y &= 32; & y &= 2. \end{aligned}$$

Проверкой убеждаемся, что найденные значения являются решениями системы.

5. *Что за прелесть Логарифмическая “комедия  $2 > 3$ ”*

$$1/4 > 1/8,$$

бесспорно правильно.

$(1/2)^2 > (1/2)^3$ , тоже не внушающее сомнение. Большему числу соответствует больший логарифм, значит,  
 $\lg(1/2)^2 > \lg(1/2)^3$ ;  $2\lg(1/2) > 3\lg(1/2)$ . После сокращения на  $\lg(1/2)$  имеем  
 $2 > 3$ .

- Где ошибка?

## 6. Выполните тест:

1. Найдите область определения:  $y = \log_{0,3} (6x - x^2)$ .

1.  $(-\infty ; 0) \cup (6 ; +\infty)$ ; 2.  $(-\infty ; -6) \cup (0 ; +\infty)$ ; 3.  $(-6 ; 0)$ ; 4.  $(0 ; 6)$ .

2. Найдите область значений:  $y = 2,5 + \log_{1,7} x$ .

1.  $(2,5 ; +\infty)$ ; 2.  $(-\infty ; 2,5)$ ; 3.  $(-\infty ; +\infty)$ ; 4.  $(0 ; +\infty)$ .

3. Сравните:  $\log_{0,5} 7$  и  $\log_{0,5} 5$ .

1.  $>$ . 2.  $<$ . 3.  $=$ .

4. Решите уравнение:  $7 * 5^{\log_5 x} = x + 21$ .

1.  $(3,5)$ . 2. нет решения. 3.  $(-3,5)$ . 4.  $(7)$ .

5. Найти значение выражения:  $\log_4 (64c)$  если  $\log_4 c = -3,5$ .

1.  $(-6,5)$ . 2.  $(-0,5)$  3.  $(-10,5)$  4.  $(-67,5)$ .

Ответ: 4; 3;2;1;2.

Итог урока: Чтобы хорошо решать логарифмические уравнения , нужно совершенствовать навыки решения практических заданий ,так как они являются основным содержанием экзамена и жизни.

Домашние задания : № 1563(а,б), №1464(б,в) ,  
№ 1567 (б).

Урок 3.

Тема урока: «Решение логарифмических уравнений »

Тип урока: урок обобщения, систематизация знаний.

Ход урока.

1.Актуализация опорных знаний:

№1 Какие из чисел -1; 0; 1; 2; 4; 8 являются корнями уравнения  $\log_2 x = x - 2$ ?

№2 Решить уравнения: а)  $\log_{16} x = 2$ ; в)  $\log_2 (2x - x^2) = 0$ ;  
г)  $\log_3 (x - 1) = \log_3 (2x + 1)$

№3 Решить неравенства: а)  $\log_3 x > \log_3 5$ ; б)  $\log_{0,4} x < 1$ ;  
в)  $\log_2 (x - 4) > 0$ .

№4 Найдите область определения функции:  $y = \log_2 (x + 4)$

№5 Сравните числа:  $\log_3 6/5$  и  $\log_3 5/6$ ;  $\log_{0,2} 5$  и  $\log_{0,2} 17$ .

№6 Определить число корней уравнения:  $\log_3 X = -2x + 4$ .

## 2. Решение уравнений:

1. решите уравнения:  $\log_5^2 (x-3)^2 + 3 \log_5 (15 - 5x) - 10 = 0$ .

ОДЗ:  $15 - 5x > 0$ ,  $x < 3$ .

$$\log_5^2 (x-3)^2 + 3 \log_5 (5 (3 - x)) - 10 = 0,$$

$$(2 \log_5 (x-3))^2 + 3 \log_2 (3 - x) + 3 - 10 = 0, \quad 4 \log_5^2 (3-x)^2 + 3 \log_2 (3 - x) - 7 = 0,$$

Пусть  $\log_5 (3-x) = t$ ;  $4 t^2 - 3 t - 7 = 0$ ,

$$t = -7/4 ; t = 1 .$$

$$\log_5 (3-x) = -7/4,$$

$$3-x = 5^{-7/4},$$

$$x = 3 - 1/5^{7/4}.$$

и

$$\log_5 (3-x) = 1,$$

$$3-x = 5,$$

$$x = -2.$$

Ответ:  $\{ 3 - 1/5^{7/4}; -2 \}$ .

Решите уравнения:  $3\log_4 (2 + 30/(2x-11)) = 2\log_4 (2 - 15/(x+2)) + 8$ .

$$2 + 30/(2x-11) = (4x-22+30)/(2x-11) = (4x+8)/(2x-11) = 4(x+2)/(2x-11)$$
$$2 - 15/(x+2) = (2x+4-15)/(2+x) = (2x-11)/(x+2) = ((x+2)/(2x-11))^{-1},$$

$$3 \log_4 (4(x+2)/(2x-11)) = 2\log_4 ((x+2)/(2x-11))^{-1} + 8,$$
$$3 + 3 \log_4 ((x+2)/(2x-11)) = -2\log_4 ((x+2)/(2x-11)) + 8,$$

Пусть  $\log_4 ((x+2)/(2x-11)) = t$ ,  $3 + 3t = -2t + 8$ ,  $t = 1$ .

$\log_4 ((x+2)/(2x-11)) = 1$ ,  $(x+2)/(2x-11) = 4$ ,  
 $x+2=8x-44$ ,  $x=46/7$ . Проверкой убеждаемся, что  $x=46/7$   
корень уравнения.



### 3. Физкультминутка:

- 1.  $3^{\log_3 8} = 8$ .
- 2.  $\lg x = -2$ , решением данного уравнения является 100.
- 3. Функция  $y = \log_{4/3} X$  монотонно возрастает.
- 4.  $\log_a (x+y) = \log_a x + \log_a y$ .
- 5.  $\log_a (x+y) = \log_a x - \log_a y$ .
- 6.  $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ .

#### 4. Учимся на чужих ошибках :

Воспользуемся формулой преобразования суммы логарифмов логарифм произведения. Получим уравнения  $\log_3 (x - 1) (x - 3) = 1$ , отсюда следует

$$x^2 - 4x + 3 = 3.$$

Корнями последнего уравнения являются  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 4$ ,

Ответ : {0 , 4}.

Решите уравнения:  $\log_3 (x - 1) + \log_3 (x - 3) = 1$ .

- Решите уравнения  $\log_2 (x + 1) - \log_2 (x - 2) = 2$ .
- Воспользуемся формулой преобразования разности логарифмов логарифм частного, получаем  $\log_2 (x + 1) / (x - 2) = 2$ , откуда следует  $(x + 1) / (x - 2) = 2$ .
- Решив последнее уравнения, находим  $x = 5$ .
- Ответ:  $x = 5$ .

## 5. Программированный контроль

Задание						Отве ты
Вариант 1 	Вариант 2	Вариант 3	1	2	3	4
$g(3x-8) = \lg(x-2)$	$\log_3(5-2x) = 1$	$\text{Log}_2(4x-5) = \log_2(x-14)$	-3	1	3	Кор. нет.
$\text{Lg}^2x + \lg x = 8$	$\log_3^2x + 3 \log_3x + 9 = 37 / \log_3$	$\text{Lg}^2x - 6 \lg x + 5 = 0$	Кор. нет.	100; 0,0001	10000 0; 10	25; 0,2
$\text{Log}_2(x-2) + \log_2(x+1) = 2$	$\text{Log}_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$	$\text{Log}_5(x+1) + \log_5(x+5) = 1$ 2;	2; -18	0	2	3

Ответ : 1вариант (3;2;4.) 2.вариант – (2;4;3.) 3.вариант – (4;3;2.)

Итог урока:

Пренебрегать теорией нельзя ,в этом мы с вами убедились на уроке :

- Без знания теоретического материала невозможно уверенно решать практические задания.
- Определенная часть вопросов направлена на проверку именно теоретических знаний , используемых правил , определений и теорем.

**Домашние задания : №1568 (а.б) ,№ 1562 (а,б) №1573 (г).**