

Муниципальное
общеобразовательное учреждение
«Гимназия»

Логарифмы

Проект
ученика 11
класса

Говорова
Руководитель
Ивана
проекта

Буравцова Н.И.

Ефремов
2009

Цели проекта:

- обеспечить компьютерную поддержку изучения свойств логарифмов и их применения в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы;
- познакомить учащихся с проявлением и применением

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

Основное

логарифмическое

$$a^{\log_a b} = b$$

Десятичные логарифмы

Если основание логарифма равно 10, то логарифм называется десятичным:

$$\lg 10 = 1$$

$$\lg 100 = 2$$

$$\lg 1000 = 3$$

$$\lg 10000 = 4$$

$$\log_{10} b = \lg b$$

$$\lg 0,1 = -1$$

$$\lg 0,01 = -2$$

$$\lg 0,001 = -3$$

$$\lg 0,0001 = -4$$

Натуральные

Если основание логарифма e , то логарифм называется натуральным:

$$\log_e b = \ln b, \quad e \approx 2,7$$

положительны

$a > 0, a \neq 1$

$$\log_a a = 1 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a b^r = r \log_a b \quad \log_a b^r = r \log_a b$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a a^c = c \quad \log_a a^c = c$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, (n \in \mathbb{Z}) \quad \log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, (n \in \mathbb{Z})$$

$$\log_a b = \log_{a^r} b^r \log_a b = \log_{a^r} b^r$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пример:

Вычислите:

$$1) \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg (8 \cdot 18)}{\lg (2^2 \cdot 3)} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = \frac{\lg 12^2}{\lg 12} = 2$$

$$2) \log_2 11 - \log_2 44 = \log_2 \frac{11}{44} = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

Логарифмирование алгебраических выражений

Если число X представлено алгебраическим выражением, то логарифм любого выражения можно выразить через логарифмы составляющих его чисел.

Потенцирование логарифмических выражений

Переход от логарифмического выражения к алгебраическому называется потенцированием, то есть, произвести действие, обратное логарифмированию.

Пример:

Найти x ,

если $\log_7 x = 2 \log_7 5 + \frac{1}{2} \log_7 36 - \frac{1}{3} \log_7 125$

Решение:

$$\log_7 x = 2 \log_7 5 + \log_7 6 - \log_7 5$$

$$\log_7 x = \log_7 5 + \log_7 6$$

$$\log_7 x = \log_7 30$$

$$x = 30$$

Частоту любого звука можно выразить формулой

$$N_{pt} = n \cdot 2^m \left(\sqrt[12]{2} \right)^p$$

Ноте «до» соответствует частота, равная n колебаниям в секунду.

В октаве частота колебаний нижнего звука в 2 раза меньше верхнего.

Тогда ноте «до» 1-й октавы будут соответствовать $2n$ колебания в секунду, а ноте «до» 3-й октавы - $n \cdot 2^m$ колебания в секунду и т.д.

Обозначим все ноты хроматической гаммы номерами p .

Логарифмируя эту формулу, получаем

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p \frac{\lg^2}{12},$$

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12} \right) \lg 2.$$

Принимая частоту самого низкого
«до» за единицу $n=1$ и приводя
логарифмы к основанию 2, имеем

$$\log_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

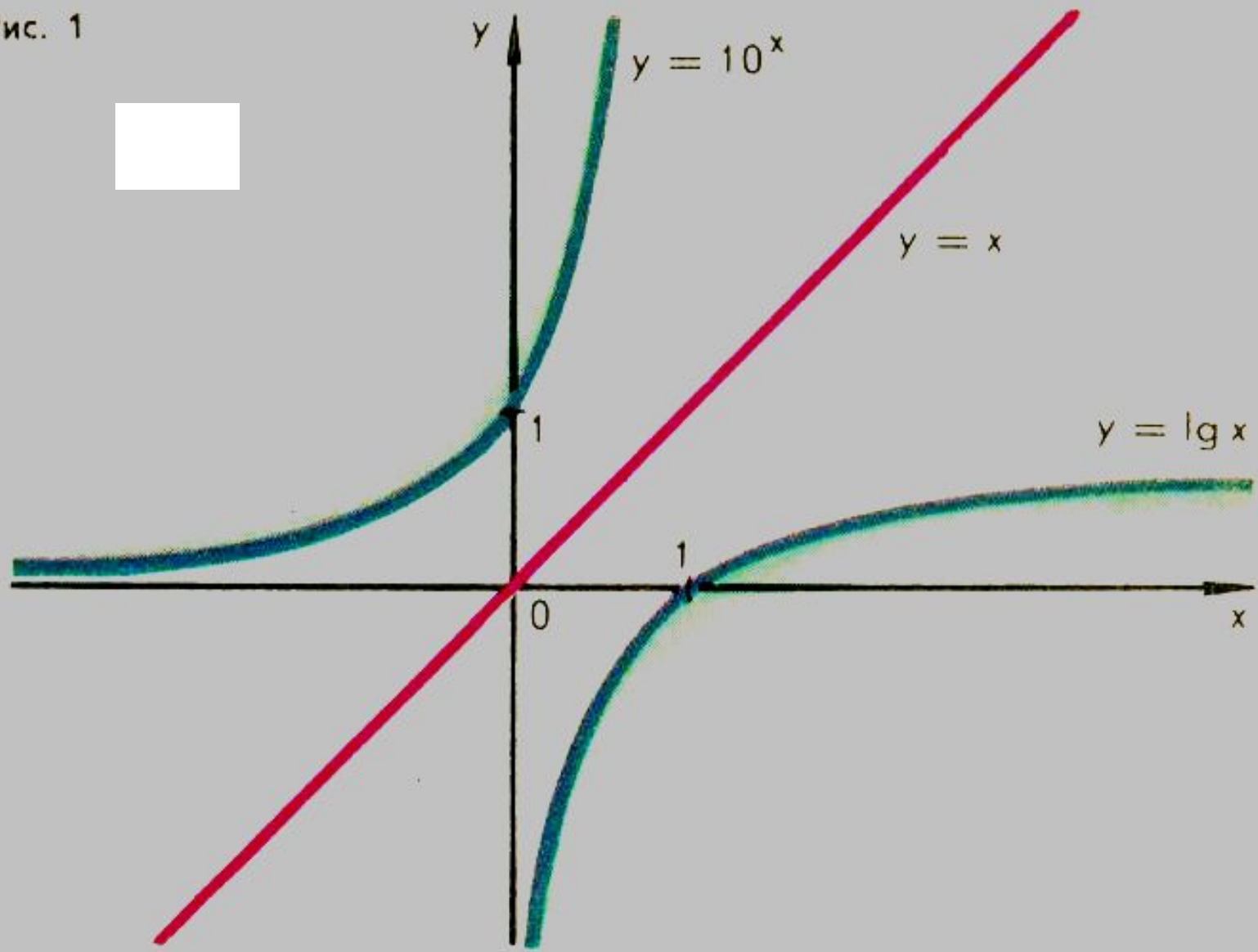
Свойства монотонности логарифмов

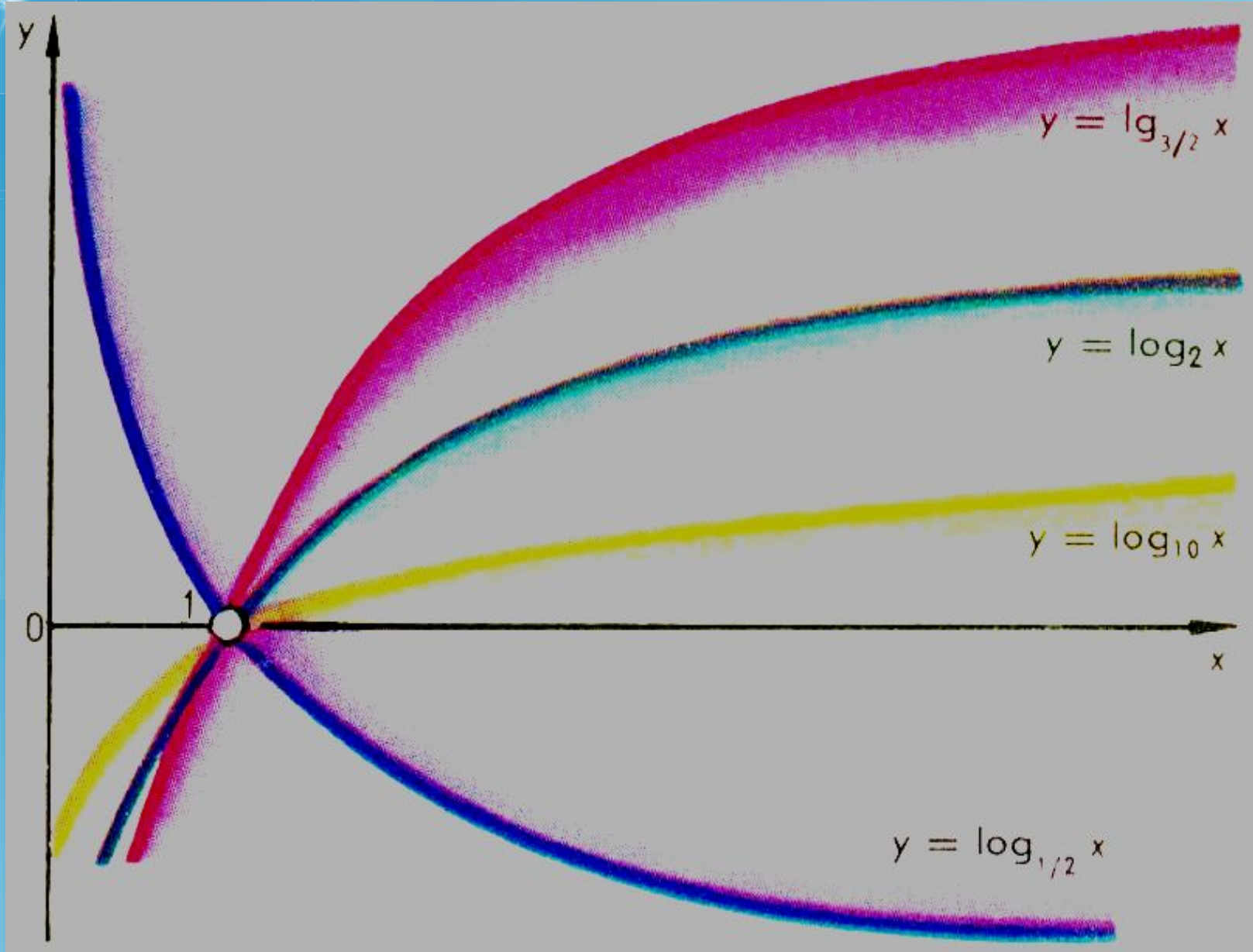
Если $a > 1$ и $b > c$, то $\log_a b > \log_a c$

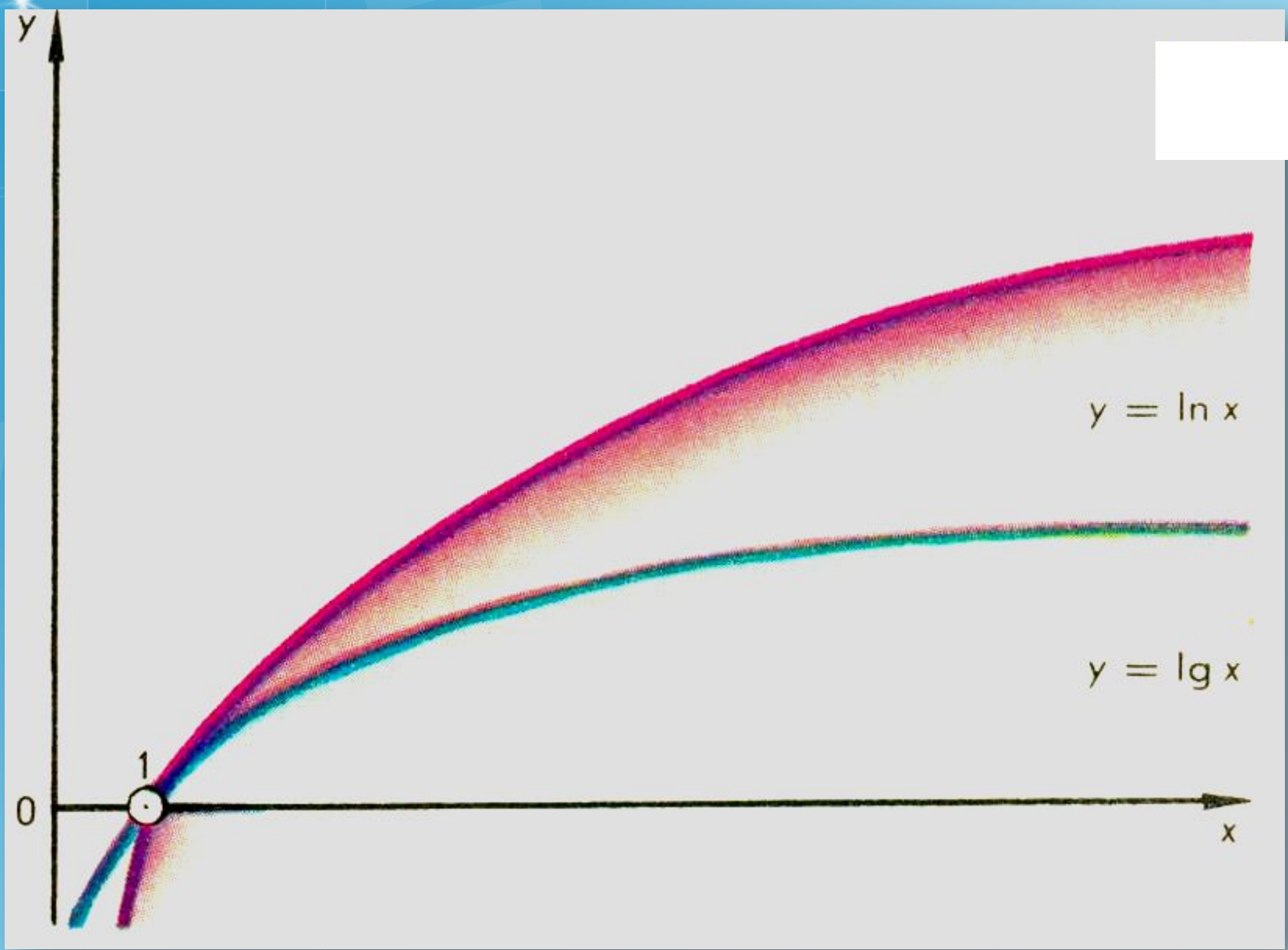
Если $0 < a < 1$ и $b > c$, то $\log_a b < \log_a c$

$$y = \log_a x, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

рис. 1







Джон Непер



(1550 г.— 4 апреля 1617г.)

Шотландский математик - изобретатель логарифмов.

В 1590-х годах пришел к идее логарифмических вычислений и составил первые таблицы логарифмов, однако свой знаменитый труд “Описание удивительных таблиц логарифмов” опубликовал лишь в 1614 году.

Ему принадлежит определение логарифмов, объяснение их свойств, таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов и приложения логарифмов в сферической тригонометрии.

Логарифмы в музыке

*Даже изящные искусства питаются ею
Разве музыкальная гамма не есть -
Набор передовых логарифмов?*

Из «Оды экспоненте»



А.А. Эйхенвальд



Звезды, шум и логарифмы



По вертикальной оси отложим блеск звезд в единицах Гиппарха (распределение звезд по субъективным характеристикам (на глаз) на 6 групп), а на горизонтальной - показания приборов.

По графику видно, что объективные и субъективные характеристики не пропорциональны, а прибор регистрирует возрастание блеска не на одну и ту же величину, а в 2,5 раза. Эта зависимость выражается логарифмической функцией.



Логарифм



Единица измерения децибел используется в звуковой технике.

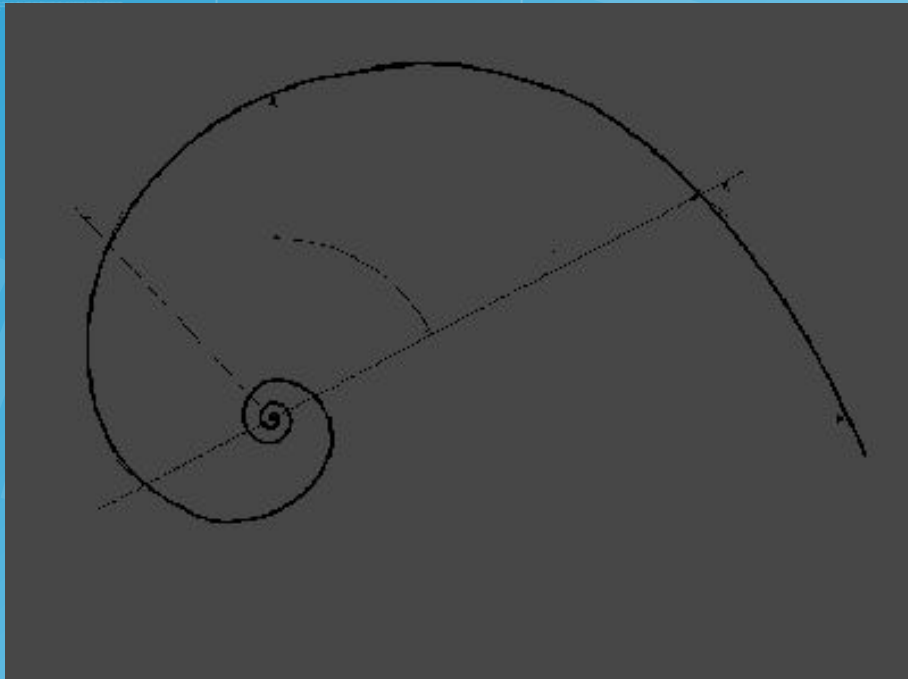
Связано это с тем, что мы реагируем не на абсолютные, а на относительные изменения уровня какого-либо воздействия, в том числе и звукового.

Если сила звука (интенсивность, I , Вт/м²) изменится в 10 раз, то субъективное ощущение громкости — всего лишь на одну ступеньку, при 100-кратном увеличении силы звука — на две ($\lg 100 = 2$), при 1000-кратном — на три ($\lg 1000 = 3$). Поэтому увеличение или уменьшение силы звука принято измерять в логарифмических единицах и каждое десятикратное изменение силы звука оценивается единицей, называемой **Бел (Б)**.

На практике используется в основном **единица, равная десятой части Бела - децибел**.

Значение в децибелах равно десяти десятичным логарифмам отношения интенсивностей двух сигналов.

Логарифмическая спираль



На рисунке видно, что эта спираль пересекает все прямые, проходящие через полюс под одним и тем же углом.



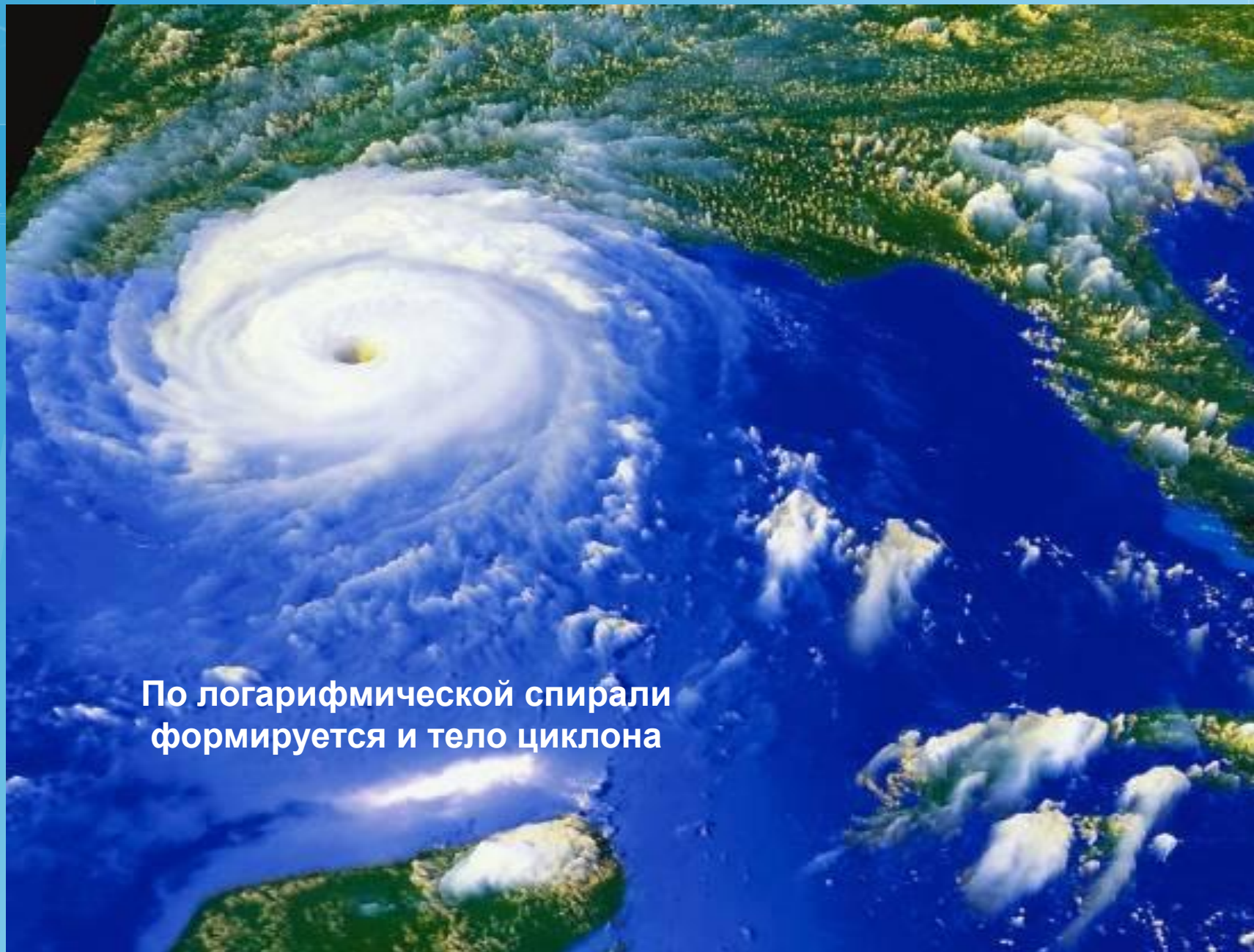
Раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее аналогиям. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены по логарифмической спирали.



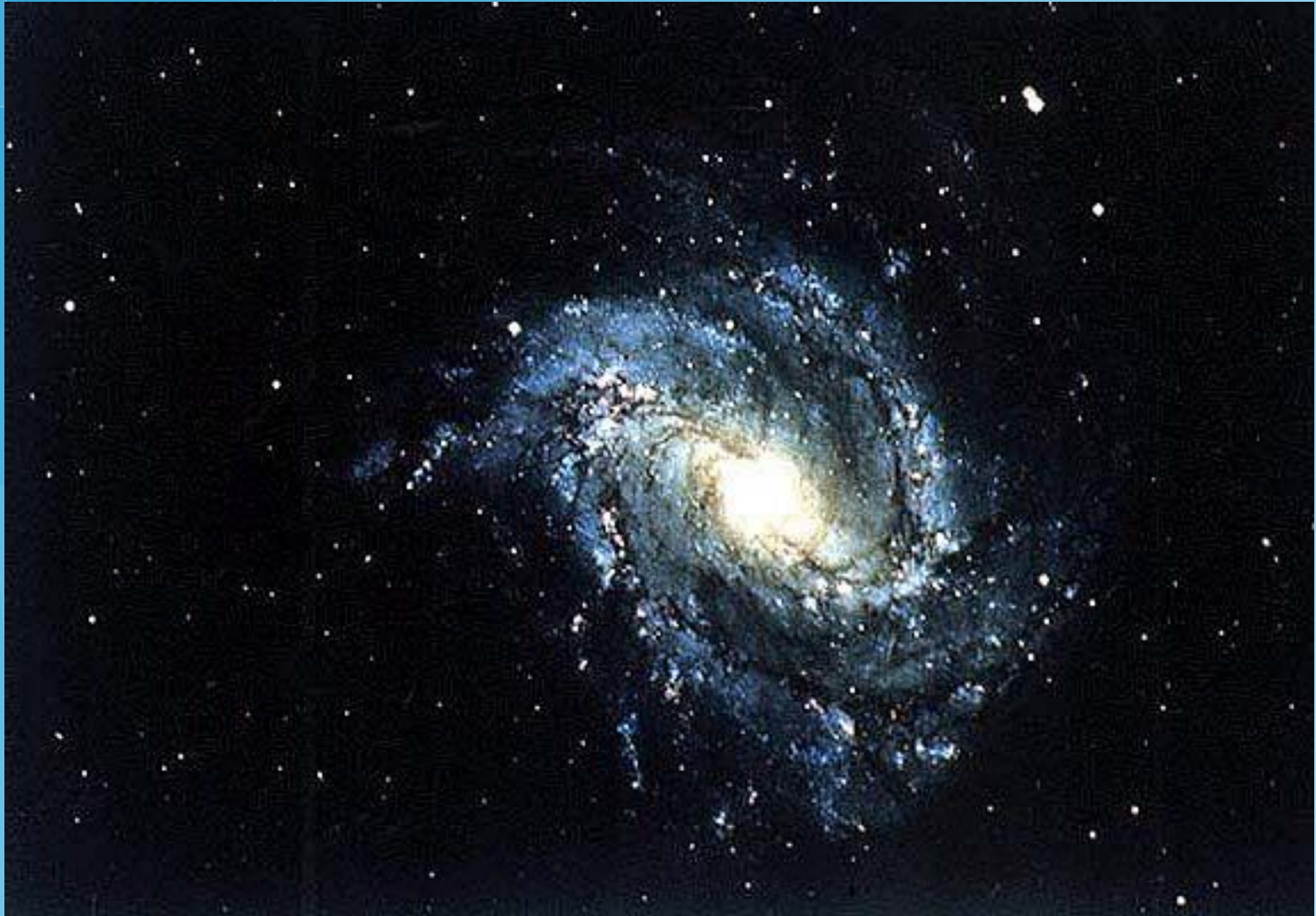
Рога таких животных, как архары, закручены по логарифмической спирали.



В подсолнухе семечки расположены по дугам, близким к логарифмической спирали



**По логарифмической спирали
формируется и тело циклона**



По логарифмическим спиральям закручены и многие галактики, в частности – Галактика Солнечной системы.



Автор идеи

Говоров Иван

Эксперт

Буравцова Надежда

Ивановна