ПРОЕКТ ПО АЛГЕБРЕ НА ТЕМУ: «ЛОГАРИФМЫ С ПАРАМЕТРАМИ»

Авторы:

Балаев Игорь, Калашников Иван, Редькин Александр.

Введение

- Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Решение задач с параметрами вызывает большие трудности у учащихся, так как их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики, и рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях. Между тем, параметрические уравнения, в том числе и логарифмические, входят в состав сборников ЕГЭ. А ЕГЭ сдавать придется каждому.
- Данный проект должен помочь в изучении таких интересных тем, как «Логарифмы» и «Параметры», а так же должен помочь при подготовке к единому государственному экзамену.

Анализ ситуации

- Логарифмы, а тем более с параметрами – вещь очень сложная. Поэтому перед началом проекта был проведен опрос в нашем классе (22 человека, 3 не участвовали в опросе) : «Можете ли вы решать логарифмы с параметрами?».
- Результаты (представлены в диаграмме) оказались очень интересными:

Результаты опроса

- Как мы видим из результатов опроса, логарифмические уравнения с параметрами особой популярностью не пользуются. Но это и не удивительно: чтобы их решать, нужно знать все о логарифмах.

Определение логарифма

- *Логарифмом положительного числа в по основанию а, где а>0,а≠1,называется показатель степени с, в которую нужно возвести число а , чтобы получилось в.*

$$\log_a b = c,\ b>0,\ a>0,\ a\neq 1$$

$$a^x = b$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов

Пусть a>0, a=1, b>0, c>0, r, p- любые действительные числа.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^r = r\log_a b$$

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$$

Параметры

- С логарифмами и его свойствами разобрались, теперь приступим к *параметрам.*
- ***<u>Определение</u>***: *Параметрами называются переменные a, b, c, …, k, которые при решении данного уравнения считаются постоянными.*
- *Решить уравнение, содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения*

Виды логарифмических уравнений с параметрами

Логарифмические уравнения с параметрами можно разделить на три вида в зависимости от местоположения параметра:

- **Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении.**
- **Уравнения, содержащие параметры в основании.**
- **Уравнения, содержащие параметры и в основании и в логарифмируемом выражении.**

Уравнения, содержащие параметры в логарифмируемом выражении

Решить при всех a: $\log_{x+1}(x^2 + a) = 2$.

Решение:

Из определения логарифма следует, что $x + 1 > 0$, $x + 1 \neq 1$ и $x^2 + a > 0$. Получаем уравнение $x^2 + a = (x + 1)^2$. Из ограничения $x + 1 > 0$ следует, что $x^2 + a > 0$. Следовательно, нужно найти решения уравнения $x^2+a= =(x+1)^2$, удовлетворяющие неравенствам $x + 1 > 0$ и $x \neq 0$.

Раскроем скобки в правой части уравнения: $x^2 + a = x^2 + 2x + 1$. Вычитая $x^2 + 2x + a$ из обеих частей уравнения, находим $-2x = 1 - a$, откуда получаем: $x=\frac{a-1}{2}$

Из ограничения $x + 1 > 0$ следует $\frac{a-1}{2}$ >0, откуда $a - 1 + 2 > 0$. Значит, $a > -1$. Из ограничения $x \neq 0$ находим $\frac{a-1}{2} \neq 0$, что влечет $a \neq 1$.

Ответ: Если $a > -1$, $a \neq 1$, то одно решение $x=\frac{a-1}{2}$.
Если $a \leq -1$ или $a = 1$, то решений нет.

Уравнения, содержащие параметры в основании

Решить при всех а: $\log_a(x^2+2x-8)=2$

Решение:

Из определения логарифма следует, что

$a \neq 1$, $a>0$, $x^2+2x-8>0$ $(x<-4;\ x>2)$. Значит, требуется решить уравнение $a^2=x^2+2x-8$. Решая это уравнение, получаем $x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32+4a^2}}{2}$ или $x=-1\pm\sqrt{9+a^2}$. Подкоренное выражение положительно при всех значениях а, поэтому дальнейших ограничений не последует.

Ответ: Если $a > 0$, $a \neq 1$, то $x=-1\pm\sqrt{9+a^2}$.

Если $a \leq 0$ или $a = 1$, то решений нет.

Уравнения, содержащие параметры и в основании и в логарифмируемом выражении

Решить при всех a уравнение $\log_a(ax + 1) = 1$.

Решение

Из определения логарифма следует, что $a > 0$, $a \neq 1$, $ax + 1 > 0$. Получаем уравнение $ax + 1 = a$. Заметим, что так как $a > 0$, то $ax + 1 = a > 0$. Следовательно, надо решить уравнение $ax + 1 = a$ при ограничениях на параметр a: $a > 0$, $a \neq 1$. Вычитая из обеих частей уравнения единицу, получим $ax = a - 1$. Так как $a > 0$, то уравнение имеет единственное решение x= $\frac{a-1}{a}$.

<u>Ответ</u>: При $a \leq 0$ и $a = 1$ решений нет.

При $a > 0$ и $a \neq 1$ одно решение $x = \frac{a-1}{a}$.

Что дал этот проект?

В процессе работы мы овладели начальными навыками решений параметрических уравнений, научились решать логарифмические уравнения с параметрами. Эта работа позволила нам лучше изучить и запомнить все свойства логарифмов. А главное, мы окончательно убедились в том, что **есть вещи похуже проектной по технологии.**

Результаты повторного опроса

По окончанию данного проекта был проведен повторный опрос на тему «Можете ли вы решать логарифмические уравнения с параметрами?». Результаты оказались намного лучше предыдущих: теперь все 100% (19 человек) ответили «не могу».