Логические законы

Логические законы и правила преобразования логических выражений

Равносильность

Логические выражения называются *равносильными*, если их истинностные значения совпадают при любых значениях, входящих в них логических переменных.

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений. Приведем соотношения, отражающие эти законы.

Аналоги математических законов

1. Закон двойного отрицания:

$$A = A$$

Двойное отрицание исключает отрицание.

2. *Переместительный (коммутативный) закон*:

— для логического сложения:

$$A \vee B = B \vee A;$$

— для логического умножения:

$$A \& B = B \& A.$$

Результат операции над высказываниями не зависит от того, в каком порядке берутся эти высказывания.

В обычной алгебре a + b = b + a, a x b = b x a.

Аналоги математических законов

3. ***Сочетательный (ассоциативный) закон:***

— для логического сложения:

$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

— для логического умножения:

$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$.

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

В обычной алгебре:

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$,

$a \times (b \times c) = a \times (b \times c) = a \times b \times c$.

Аналоги математических законов

4. ***Распределительный (дистрибутивный) закон***:

— для логического сложения:

$(A \vee B)\&C = (A\&C) \vee (B\&C)$;

— для логического умножения:

$(A\&B) \vee C = (A \vee C)\&(B \vee C)$.

Определяет правило выноса общего высказывания за скобку.

В обычной алгебре:

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Законы де Моргана

5. *Закон общей инверсии (законы де Моргана):*

— для логического сложения

` $\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$;

— для логического умножения:

$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

6. *Закон идемпотентности* (от латинских слов idem — тот же самый и potens —сильный; дословно — равносильный):

— для логического сложения:

$A \vee A = A$;

— для логического умножения:

$A \& A = A$.

Закон означает отсутствие показателей степени.

Законы констант:

7. ***Законы исключения констант:***

— для логического сложения:

A v 1 = 1,   *A* v 0 = *A*;

— для логического умножения:

A & 1 = *A*,   *A* & 0 = 0.

8. ***Закон противоречия:***

A & A = $\overline{0}$.

Невозможно, чтобы противоречащие высказывания были одновременно истинными.

9. ***Закон исключения третьего***:

A v A = $\overline{1}$.

Из двух противоречащих высказываний об одном и том же предмете одно всегда истинно, а второе — ложно, третьего не дано.

Неочевидные законы:

10. *Закон поглощения*:

— для логического сложения:

$A \vee (A \& B) = A$;

— для логического умножения:

$A \& (A \vee B) = A$.

11. *Закон исключения (склеивания)*:

— для логического сложения:

$(A \& B) \vee (A \& \overline{B}) = B$;

— для логического умножения:

$(A \vee B) \& (A \vee \overline{B}) = B$.

Задания для самостоятельного выполнения

3.22. Какое тождество записано неверно:

1) $X \vee \overline{X} = 1$;

2) $X \vee X \vee X \vee X \vee X \vee X = 1$;

3) $X \,\&\, X \,\&\, X \,\&\, X \,\&\, X = X$.

3.23. Определите, каким законам алгебры чисел (сочетательному; переместительному; распределительному; аналога нет) соответствуют следующие логические тождества:

а) $A \vee B = B \vee A$;

б) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$;

в) $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$;

г) $(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$.

3.24. Логическое выражение называется *тождественно-ложным*, если оно принимает значения 0 на всех наборах входящих в него простых высказываний. Упростите следующее выражение и покажите, что оно тождественно-ложное.

$$(A \& B \& \overline{B}) \vee (A \& \overline{A}) \vee (B \& C \& \overline{C}).$$

Задания для самостоятельного выполнения

3.25. Логическое выражение называется *тождественно-истинным*, если оно принимает значения 1 на всех наборах входящих в него простых высказываний. Упростите следующее выражение и покажите, что оно тождественно-истинное.

$$(A\&B\&\overline{C}) \vee (A\&B\&C) \vee \overline{(A\&B)}\ .$$

3.26. Упростите логические выражения. Правильность упрощения проверьте с помощью таблиц истинности для исходных и полученных логических формул.

а) $A \vee (A\&\overline{B})$;

б) $A\&(A \vee \overline{B})$;

в) $(A \vee B)\&(B \vee \overline{A})\&(C \vee \overline{B})$.