Логика предикатов

Понятие предиката

ПРЕДИКАТ (лат. praedicatum – высказанное) – термин, обозначающий член предложения – сказуемое.

Пример. Студент уныло **слушает** лекцию.

Субъект Атрибут ***Предикат*** *Объект*

Другое значение термина «предикат» – выражение отношения между лицами, предметами, событиями, явлениями.

Пример. Студент уныло ***слушает*** лекцию.

Слушает (кто, кого, как)

Определение. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные $x_1,\ldots,x_n$, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Обозначаются предикаты $P,Q,\ldots$

Переменные $x_1,\ldots,x_n$, называются *предметными* или *индивидуальными переменными*. Число предметных переменных в предикате называется его *арностью* или *местностью*.

Более точно, предикат P с n предметными переменными называется *n-арным* или *n-местным предикатом* и обозначается $P(x_1,\ldots,x_n)$.

Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1 = a_1,\ldots,x_n = a_n$ его *n* предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1,\ldots,a_n))$.

Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как функцию со значениями в множестве $\{0,1\}$.

Рассматривая такую функцию на некотором фиксированном множестве M допустимых значений предметных переменных предиката, получим n-арное отношение на множестве M, состоящее из всех таких упорядоченных наборов $(a_1,\ldots,a_n)$ n элементов $a_1,\ldots,a_n \in M$, для которых $P(a_1,\ldots,a_n)$ является истинным высказыванием.

Такое n-арное отношение обозначается символом P^+ и называется *множеством истинности* предиката P на множестве M.

Определение. Предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ *на множестве* M называется:

– *тождественно истинным*, если для любых значений $x_1=a_1\in M,\ldots,x_n=a_n\in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно, т.е. $P^+=M^n$;

– *тождественно ложным*, если для любых значений $x_1=a_1\in M,\ldots,x_n=a_n\in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ ложно, т.е. $P^+=\varnothing$;

– *выполнимым*, если для некоторых значений $x_1=a_1\in M,\ldots,x_n=a_n\in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно, т.е. $P^+\neq\varnothing$;

– *опровержимым*, если для некоторых значений $x_1=a_1\in M,\ldots,x_n=a_n\in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ ложно, т.е. $P^+\neq M^n$.

Определение. Пусть предикаты одинаковой арности $P(x_1,\ldots,x_n)$ и $Q(x_1,\ldots,x_n)$ рассматриваются на множестве M. Тогда:

– предикаты P и Q называются *эквивалентными*, если $P^+ = Q^+$, т.е. при любых значениях $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1,\ldots,a_n)$ истинно в том и только том случае, если истинно высказывание $Q(a_1,\ldots,a_n)$;

– предикат Q называется *следствием* предиката P, если $P^+ \subset Q^+$, т.е. при любых значениях $x_1 = a_1 \in M,\ldots,x_n = a_n \in M$ из истинности высказывания $P(a_1,\ldots,a_n)$ следует истинность высказывания $Q(a_1,\ldots,a_n)$.

Алгебра предикатов

Определение.

Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной x_1 на n-местный предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ называется $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,\ldots,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,\ldots,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при любых значениях $x_1=a_1\in M$ высказывание $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ истинно.

Определение.

Результатом действия квантора существования $(\exists x_1)$ по переменной x_1 на n-местный предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ называется $(n-1)$-местный предикат $(\exists x_1)P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,\ldots,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,\ldots,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при некотором значении $x_1=a_1\in M$ высказывание $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ истинно.

Квантор существования и единственности $(\exists! x)$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\exists x)(P(x) \wedge ((\forall y)(P(y) \Rightarrow x = y))).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists! x)P(x)$ и читается «существует и единственен x, для которого выполняется $P(x)$»).

Ограниченный квантор существования $(\exists Q(x))$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\exists x)(Q(x) \wedge P(x)).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\exists Q(x))P(x)$ и и читается «существует x, удовлетворяющий $Q(x)$, для которого выполняется $P(x)$».

Ограниченный квантор общности $(\forall Q(x))$ определяется как сокращение записи следующей формулы

$$(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x)).$$

Результат действия такого квантора на предикат $P(x)$ обозначается $(\forall Q(x))P(x)$ и читается «для всех x, удовлетворяющих $Q(x)$, выполняется $P(x)$».