

# Логика высказываний

Ирина Борисовна Просвирнина

- Высказывания
- Сложные высказывания
- Условные высказывания
- Таблицы истинности сложных высказываний
- Тавтологии и противоречия
- Логическая эквивалентность высказываний
- Булева алгебра высказываний
- Выполнимые и невыполнимые высказывания
- Проблема выполнимости

# Высказывания

Определение 1 **Высказывание** – это повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не может быть истинным или ложным одновременно.

# Высказывания

Пример 1 Все предложения, приведенные ниже, являются высказываниями.

---

1. Минск – столица Беларуси.
  2. Марсель – столица Франции.
  3.  $1 + 1 = 2$ .
  4.  $2 + 2 = 3$ .
- 

Высказывания 1 и 3 являются истинными, а высказывания 2 и 4 являются ложными.

# Высказывания

Пример 2 Предложения, приведенные ниже, не являются высказываниями.

---

1. Который час?
  2. Вам следует внимательно слушать лекцию.
  3.  $x + 1 = 2$ .
  4.  $x + y = z$ .
- 

Предложения 1 и 2 не являются высказываниями, так как это не повествовательные предложения. Предложения 3 и 4 не являются высказываниями, так как мы не можем определить, истинны они или ложны.

# Высказывания

**Введем пропозициональные переменные (высказывательные переменные), значениями которых являются высказывания. Будем обозначать их строчными буквами латинского алфавита:**

*p, q, r, s, ...*

**Логическое значение** высказывания – истина (*T*), если это высказывание является истинным, и ложь (*F*), если это высказывание ложно.

# Высказывания

Раздел логики, изучающий высказывания, называется **исчислением высказываний** или **пропозициональной логикой**.

Греческий философ Аристотель, живший более 2300 лет тому назад, был первым, кто систематически изучил и изложил пропозициональную логику.

## Сложные высказывания

Рассмотрим методы построения новых высказываний из данных высказываний.

Эти методы были изложены английским математиком Джорджем Булем в его работе «*The Laws of Thought*» в 1854 году.

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

## Сложные высказывания

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Мы рассмотрим следующие логические операции:

- отрицание,
- конъюнкцию,
- дизъюнкцию,
- исключаящее или,
- импликацию,
- биимпликацию.

# Отрицание высказывания

Определение 2 **Отрицанием** высказывания  $p$  называется высказывание «не  $p$ », которое обозначается через  $\neg p$ . Отрицание высказывания  $\neg p$  истинно, когда высказывание  $p$  ложно, и ложно в противном случае.

# Отрицание высказывания

Таблица истинности для отрицания высказывания.

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

## Отрицание высказывания

Пример 3 Построить отрицание высказывания «Смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти» и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Решение Отрицание высказывания:

«Не верно, что смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти».

Более привычный вариант отрицания высказывания:

«Смартфон Анны имеет менее 32 GB памяти».

# Конъюнкция высказываний

Определение 3 **Конъюнкцией** высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  и  $q$ », которое обозначается через  $p \wedge q$ . Конъюнкция  $p \wedge q$  истинна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  истинны и ложна в противном случае.

# Конъюнкция высказываний

Таблица истинности для  
конъюнкции двух высказываний

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

## Конъюнкция высказываний

Пример 4 Построить конъюнкцию высказываний  $p$  и  $q$ , где  $p$  – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а  $q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

# Конъюнкция высказываний

$p$  – «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,

$q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1

$\text{GHz}$ »  
Решение Конъюнкция высказываний  $p$  и  $q$ :

«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска и процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

Более привычный вариант конъюнкции высказываний  $p$  и  $q$ :

«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске и работает быстрее, чем 1 GHz».

## Дизъюнкция высказываний

Определение 4 **Дизъюнкцией** высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  или  $q$ », которое обозначается через  $p \vee q$ . Дизъюнкция  $p \vee q$  ложна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  ложны, и истинна в противном случае.

# Дизъюнкция высказываний

Таблица истинности для  
дизъюнкции двух высказываний

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

## Дизъюнкция высказываний

Пример 5 Построить дизъюнкцию высказываний  $p$  и  $q$ , где  $p$  – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а  $q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

# Дизъюнкция высказываний

$p$  – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,

$q$  – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

**Решение.** Дизъюнкция высказываний  $p$  и  $q$ :

«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска, или процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

Более привычный вариант дизъюнкции высказываний  $p$  и  $q$ :

«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске или работает быстрее, чем 1 GHz».

## Исключающее или

### Определение 5 **Исключающим или**

высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  или  $q$ , но не одновременно  $p$  и  $q$ », которое обозначается через  $p \square q$ . Исключающее или  $p \square q$  истинно, когда в точности одно из высказываний  $p$  или  $q$  истинно, и ложно в противном случае.

# Исключающее или

Таблица истинности для  
исключающего или двух  
высказываний

$p$	$q$	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

## Исключающее или

Пример 6 Исключающее или используется в следующей ситуации.

Студенты изучающие математический анализ или программирование, но не обе эти дисциплины одновременно, могут записаться на дополнительный курс по менеджменту.

Это значит, что студенты, изучающие обе дисциплины: математический анализ и программирование, – не могут изучать дополнительный курс по менеджменту.

# Условные высказывания

Определение 6 Пусть  $p$  и  $q$  – два высказывания. Высказывание «если  $p$ , то  $q$ » называется **условным высказыванием** и обозначается через  $p \rightarrow q$ . Условное высказывание  $p \rightarrow q$  ложно, когда  $p$  истинно и  $q$  ложно, и истинно в противном случае.

В условном высказывании  $p \rightarrow q$  высказывание  $p$  называется **условием**, а высказывание  $q$  **заключением**.

Условное высказывание еще называется **импликацией**.

# Условные высказывания

Таблица истинности для условного высказывания  $p \rightarrow q$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Условное высказывание  $p \rightarrow q$  ложно, когда  $p$  истинно и  $q$  ложно, и истинно в противном случае.

# Условные высказывания

Условное высказывание  $p \rightarrow q$  можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- из  $p$  следует  $q$ ;
- $p$  влечет  $q$ ;
- $p$  достаточно для  $q$ ;
- $p$  является достаточным условием для  $q$ ;
- $q$  необходимо для  $p$ ;
- $q$  является необходимым условием для  $p$ .

## Условные высказывания

Пример 7 Пусть  $p$  – высказывание «Мария изучает дискретную математику», а  $q$  – высказывание «Мария найдет интересную и высокооплачиваемую работу». Выразить высказывание  $p \rightarrow q$  на русском языке.

Решение Варианты высказывания  $p \rightarrow q$ :

«Если Мария изучает дискретную математику, то она найдет интересную и высокооплачиваемую работу»,

«Чтобы Мария нашла интересную и высокооплачиваемую работу, ей достаточно изучать дискретную математику».

# Конверсия, контрапозиция, инверсия

С условным высказыванием  $p \rightarrow q$  связаны еще три условных высказывания:

- высказывание  $q \rightarrow p$  называется **конверсией** высказывания  $p \rightarrow q$ ;
- высказывание  $\neg q \rightarrow \neg p$  называется **контрапозицией** высказывания  $p \rightarrow q$ ;
- высказывание  $\neg p \rightarrow \neg q$  называется **инверсией** высказывания  $p \rightarrow q$ ;

## Конверсия, контрапозиция, инверсия

Пример 7 Пусть  $p$  – высказывание «Футбольный клуб «Неман» выигрывает матч», а  $q$  – высказывание «Идет дождь». Построить конверсию, контрапозицию и инверсию импликации  $p \rightarrow q$  на русском языке.

### Решение

- Конверсия импликации  $p \rightarrow q$ : «Если идет дождь, то футбольный клуб «Неман» выигрывает матч».
- Контрапозиция импликации  $p \rightarrow q$ : «Если дождь не идет, то футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч».
- Инверсия импликации  $p \rightarrow q$ : «Если футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч, то дождь не идет».

# Биимпликация высказываний

Определение 7 **Биимпликацией** высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание « $p$  тогда и только тогда, когда  $q$ », которое обозначается через  $p \equiv q$ . Биимпликация  $p \equiv q$  истинна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

# Биимпликация высказываний

Таблица истинности для биимпликации двух высказываний

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Биимпликация  $p \leftrightarrow q$  истинна, когда оба высказывания  $p$  и  $q$  одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

# Биимпликация высказываний

Биимпликацию  $p \leftrightarrow q$  можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- $p$  необходимо и достаточно для  $q$ ;
- $p$  является необходимым и достаточным условием для  $q$ ;
- $p$  если и только если  $q$ .

## Биимпликация высказываний

Пример 8 Пусть  $p$  – высказывание «Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете», а  $q$  – высказывание «Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж». Выразить высказывание  $p \supset q$  на русском языке.

### Решение

«Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете, если и только если Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж».

# Таблицы истинности сложных высказываний

С помощью введенных логических операций конъюнкция, дизъюнкция, исключаящее или, импликация, биимпликация и отрицание можно строить сложные высказывания, состоящие из произвольного числа пропозициональных переменных.

Для определения логического значения сложных высказываний следует использовать таблицы истинности, определяющие логические значения высказываний  $\neg p$ ,  $p \wedge q$ ,  $p \vee q$ ,  $p \rightarrow q$ ,  $p \leftrightarrow q$ ,  $p \oplus q$ .

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$ .

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$ .

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
$p$	$q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$ .

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
$p$	$q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F			
T	F	T			
F	T	F			
F	F	T			

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$ .

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
$p$	$q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$ .

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
$p$	$q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	
T	F	T	T	F	
F	T	F	F	F	
F	F	T	T	F	

# Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания  $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$ .

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
$p$	$q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

# Приоритет (порядок выполнения) логических операций

## Приоритет логических операций

Операция	Приоритет
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Для уменьшения числа пар скобок в сложном высказывании установлен порядок выполнения логических операций, описанный в таблице.

# Приоритет (порядок выполнения) логических операций

## Приоритет логических операций

Операция	Приоритет
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Пример 10 Расставим скобки в сокращенной записи сложного высказывания

$p \square q \square p \square \square (p \square q)$ :

1.  $(p \square q)$   $\square p \square \square (p \square q)$ ,
2.  $(p \square q) \square$   $(p \square \square (p \square q))$ .

# Тавтологии и противоречия

Определение 1 Сложное высказывание называется **тавтологией**, если оно истинно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

# Тавтологии и противоречия

Определение 2 Сложное высказывание называется **противоречием**, если оно ложно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

# Тавтологии и противоречия

Определение 3 Сложное высказывание называется **контингенцией**, если оно не является ни тавтологией ни противоречием.

# Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

Примеры тавтологии и противоречия			
$p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

# Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную

Примеры тавтологии и противоречия

$p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

Высказывание  $p \vee \neg p$  всегда истинно, значит  $p \vee \neg p$  – тавтология.

Высказывание  $p \wedge \neg p$  всегда ложно, значит  $p \wedge \neg p$  – противоречие

# Логическая эквивалентность высказываний

Два сложных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они имеют одинаковые истинностные значения на всех возможных наборах истинностных значений входящих в них пропозициональных переменных.

Логическую эквивалентность сложных высказываний можно определить, используя тавтологию.

# Логическая эквивалентность высказываний

Определение 4 Сложные высказывания  $p$  и  $q$  называются **логически эквивалентными**, если сложное высказывание  $p \equiv q$  является тавтологией.

Запись  $p \equiv q$  означает, что  $p$  и  $q$  логически эквивалентны.

# Логическая эквивалентность высказываний

Для определения эквивалентности двух сложных высказываний можно использовать таблицы истинности.

Два сложных высказывания логически эквивалентны тогда и только тогда, когда столбцы истинностных значений этих высказываний совпадают.

Будьте внимательны! В таблицах истинности, соответствующих рассматриваемым высказываниям, наборы истинностных значений пропозициональных переменных должны располагаться в одинаковой последовательности.

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \rightarrow q)$  и  $\neg p \vee \neg q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \vee \neg q$ .						
$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \rightarrow q)$  и  $\neg p \wedge q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ .						
$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T				
T	F	T				
F	T	T				
F	F	F				

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \rightarrow q)$  и  $\neg p \wedge q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ .						
$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F			
T	F	T	F			
F	T	T	F			
F	F	F	T			

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \rightarrow q)$  и  $\neg p \wedge q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для  $\neg(p \rightarrow q)$  и  $\neg p \wedge q$ .

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F	F		
T	F	T	F	F		
F	T	T	F	T		
F	F	F	T	T		

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \wedge q)$  и  $\neg p \vee \neg q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$ .						
$p$	$q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	
T	F	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	F	
F	F	F	T	T	T	

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \wedge q)$  и  $\neg p \vee \neg q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$ .						
p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что  $\neg(p \rightarrow q)$  и  $\neg p \wedge q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ .						
$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

# Логическая эквивалентность высказываний

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Истинностные значения высказываний  $\neg(p \vee q)$  и  $\neg p \wedge \neg q$  совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание  $\neg(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$  является тавтологией, и сложные высказывания  $\neg(p \vee q)$  и  $\neg p \wedge \neg q$  логически эквивалентны.

$\neg(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$  – один из **законов Де Моргана**.

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что  $\neg p \vee \neg q$  и  $p \wedge q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для  $\neg p \vee \neg q$  и  $p \wedge q$

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что  $\neg(p \wedge q)$  и  $p \vee \neg q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для  $\neg(p \wedge q)$  и  $p \vee \neg q$

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg q$
T	T	F		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$  и  $p \vee q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$  и  $p \vee q$

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
T	T	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	F	T	T	

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что  $\neg p \vee q$  и  $p \rightarrow q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для  $\neg p \vee q$  и  $p \rightarrow q$

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что  $\neg(\neg p \wedge \neg q)$  и  $p \vee q$  логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ и $p \vee q$				
$p$	$q$	$\neg p$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

# Логическая эквивалентность высказываний

Таблицы истинности для $\neg p \vee q$ и $p \rightarrow q$				
$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Истинностные значения высказываний  $\neg p \vee q$  и  $p \rightarrow q$  совпадают на всех наборах истинностных значений переменных  $p$  и  $q$ , значит, сложное высказывание  $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$  является тавтологией, и сложные высказывания  $\neg p \vee q$  и  $p \rightarrow q$  логически эквивалентны.

# Логическая эквивалентность высказываний

Пример 4 Покажем, что сложные высказывания  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  и  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$  логически эквивалентны.

В высказывания  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  и  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$  входят три пропозициональные переменные  $p$ ,  $q$  и  $r$ .

Поэтому в таблицах истинности будет 8 строк с комбинациями истинностных значений пропозициональных переменных  $p$ ,  $q$  и  $r$ :

**T T T, T T F, T F T, T F F, F T T, F T F и F F F.**

**Мы будем всегда использовать в таблицах истинности этот порядок строк!**

# Доказательство логической эквивалентности

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$  и  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

# Доказательство логической эквивалентности

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$  и  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T				
T	T	F	F				
T	F	T	F				
T	F	F	F				
F	T	T	T				
F	T	F	F				
F	F	T	F				
F	F	F	F				

# Доказательство логической эквивалентности

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$  и  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T			
T	T	F	F	T			
T	F	T	F	T			
T	F	F	F	T			
F	T	T	T	T			
F	T	F	F	F			
F	F	T	F	F			
F	F	F	F	F			









# Доказательство логической эквивалентности

$$p \wedge (q \vee r) \text{ и } (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Итак,  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  –  
**дистрибутивный закон дизъюнкции**  
**относительно конъюнкции.**

Таблица 1. Логические эквивалентности

Эквивалентность	Название
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Законы тождества
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Законы доминирования
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Законы идемпотентности
$\neg(\neg p) \equiv p$	Закон двойного отрицания
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Законы коммутативности

## Логические эквивалентности (продолжение таблицы 1)

Эквивалентность	Название
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Законы ассоциативности
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Законы дистрибутивности
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Законы де Моргана
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Законы поглощения
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Законы отрицания

# Логическая эквивалентность высказываний

Множество сложных высказываний, на котором заданы логические операции  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ , удовлетворяющие законам тождества, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и отрицания, является **булевой алгеброй**.

Таблица 2. Логические эквивалентности, содержащие условные высказывания

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$$

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

Таблица 3. Логические эквивалентности, содержащие биимпликации

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

## Применение законов Де Моргана

Пример 5 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «Сергей пойдет на концерт, или Евгений пойдет на концерт».

Решение Пусть  $p$  – «Сергей пойдет на концерт», а  $q$  – «Евгений пойдет на концерт», Тогда «Сергей пойдет на концерт, **или** Евгений пойдет на концерт» можно представить как  $p \vee q$ .

По первому закону Де Моргана  $\neg(p \vee q)$  логически эквивалентно  $\neg p \wedge \neg q$ .

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «Сергей не пойдет на концерт, **и** Евгений не пойдет на концерт».

# Применение законов Де Моргана

Пример 6 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «У Ольги есть смартфон, и у нее есть ноутбук».

Решение Пусть  $p$  – «У Ольги есть смартфон», а  $q$  – «У Ольги есть ноутбук», Тогда «У Ольги есть смартфон, **и** у нее есть ноутбук» можно представить как  $p \wedge q$ .

По первому закону Де Моргана  $\neg(p \wedge q)$  логически эквивалентно  $\neg p \vee \neg q$ .

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «У Ольги нет смартфона, **или** у нее нет ноутбука».

## Построение новых логических эквивалентностей

Логические эквивалентности таблиц 1, 2 и 3 можно использовать для построения новых логических эквивалентностей.

Пусть высказывание  $P$  входит в состав сложного высказывания  $C(P)$ .  $P$  можно заменить логически эквивалентным ему высказыванием  $Q$ , при этом истинностное значение сложного высказывания  $C(Q)$  будет таким же как у  $C(P)$ .

# Построение новых логических эквивалентностей

Пример 7 Покажем с помощью преобразований, что высказывания  $\neg(p \vee q)$  и  $p \wedge \neg q$  логически эквиваленты.

## Решение

$\neg(p \vee q) \equiv \neg(\neg\neg(p \vee q))$  – пример 3

$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$  – второй закон Де  
Моргана

$\equiv p \wedge \neg q$  – закон двойного отрицания

# Построение новых логических эквивалентностей

Пример 8 Покажем с помощью преобразований, что высказывания  $\neg(p \wedge (\neg p \wedge q))$  и  $(\neg p \wedge \neg q)$  логически эквивалентны.

Решение

$$\begin{aligned}\neg(p \wedge (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q)\end{aligned}$$

# Построение новых логических эквивалентностей

Пример 9 Покажем с помощью преобразований, что высказывание  $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$  является тавтологией.

Решение

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (p \wedge q) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \wedge q) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \wedge (\neg q \wedge q) \\ &\equiv T \wedge T \\ &\equiv T\end{aligned}$$

# Выполнимые и невыполнимые высказывания

Определение 5 Сложное высказывание называется **выполнимым**, если существует набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором это сложное высказывание является истинным. Если сложное высказывание ложно на любом наборе истинностных значений пропозициональных переменных, то оно называется **невыполнимым**.

# Проблема выполнимости

Определение 6 Набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором выполнимое высказывание принимает значение истина, называется **решением** данной проблемы выполнимости.

# Выполнимые и невыполнимые высказывания

## Пример 9

Выясним, какие из следующих высказываний являются выполнимыми:

- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$  – выполнимо  
 $(p = T, q = T, r = T)$ ;
- $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$  – выполнимо  
 $(p = T, q = F, r = T)$ ;
- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$  – невыполнимо (почему?).

# Проблема выполнимости

В терминах выполнимости сложных высказываний моделируются задачи из различных областей науки и техники:

- робототехники,
- разработки программного обеспечения,
- компьютерного проектирования,
- проектирования функциональных схем,
- организации компьютерных сетей,
- генетики.

## Головоломка Судоку 9×9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Большой квадрат 9×9 делят на 9 маленьких квадратов 3×3. В некоторых из 81 ячеек записаны цифры от 1 до 9. Нужно заполнить пустые ячейки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом квадрате 3×3 не повторялись одинаковые цифры.

# Головоломка Судоку 9×9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

## Задача

Построить сложное высказывание, выполнимость которого равносильна решению головоломки Судоку 9×9.