

Логика высказываний

Ирина Борисовна Просвирнина

- Высказывания
- Сложные высказывания
- Условные высказывания
- Таблицы истинности сложных высказываний
- Тавтологии и противоречия
- Логическая эквивалентность высказываний
- Булева алгебра высказываний
- Выполнимые и невыполнимые высказывания
- Проблема выполнимости

Высказывания

Определение 1 **Высказывание** – это повествовательное предложение, которое является либо истинным, либо ложным, но не может быть истинным или ложным одновременно.

Высказывания

Пример 1 Все предложения, приведенные ниже, являются высказываниями.

1. Минск – столица Беларуси.
 2. Марсель – столица Франции.
 3. $1 + 1 = 2$.
 4. $2 + 2 = 3$.
-

Высказывания 1 и 3 являются истинными, а высказывания 2 и 4 являются ложными.

Высказывания

Пример 2 Предложения, приведенные ниже, не являются высказываниями.

1. Который час?
 2. Вам следует внимательно слушать лекцию.
 3. $x + 1 = 2$.
 4. $x + y = z$.
-

Предложения 1 и 2 не являются высказываниями, так как это не повествовательные предложения. Предложения 3 и 4 не являются высказываниями, так как мы не можем определить, истинны они или ложны.

Высказывания

Введем пропозициональные переменные (высказывательные переменные), значениями которых являются высказывания. Будем обозначать их строчными буквами латинского алфавита:

p, q, r, s, \dots

Логическое значение высказывания – истина (T), если это высказывание является истинным, и ложь (F), если это высказывание ложно.

Высказывания

Раздел логики, изучающий высказывания, называется **исчислением высказываний** или **пропозициональной логикой**.

Греческий философ Аристотель, живший более 2300 лет тому назад, был первым, кто систематически изучил и изложил пропозициональную логику.

Сложные высказывания

Рассмотрим методы построения новых высказываний из данных высказываний.

Эти методы были изложены английским математиком Джорджем Булем в его работе «*The Laws of Thought*» в 1854 году.

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Сложные высказывания

Новые высказывания, называемые **сложными высказываниями**, строятся из уже имеющихся высказываний с помощью логических операций.

Мы рассмотрим следующие логические операции:

- отрицание,
- конъюнкцию,
- дизъюнкцию,
- исключаящее или,
- импликацию,
- биимпликацию.

Отрицание высказывания

Определение 2 **Отрицанием** высказывания p называется высказывание «не p », которое обозначается через $\neg p$. Отрицание высказывания $\neg p$ истинно, когда высказывание p ложно, и ложно в противном случае.

Отрицание высказывания

Таблица истинности для
отрицания высказывания.

p	$\neg p$
T	F
F	T

Отрицание высказывания

Пример 3 Построить отрицание высказывания «Смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти» и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Решение Отрицание высказывания:

«Не верно, что смартфон Анны имеет не менее 32 GB памяти».

Более привычный вариант отрицания высказывания:

«Смартфон Анны имеет менее 32 GB памяти».

Конъюнкция высказываний

Определение 3 **Конъюнкцией** высказываний p и q называется высказывание « p и q », которое обозначается через $p \wedge q$. Конъюнкция $p \wedge q$ истинна, когда оба высказывания p и q истинны и ложна в противном случае.

Конъюнкция высказываний

Таблица истинности для
конъюнкции двух высказываний

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Конъюнкция высказываний

Пример 4 Построить конъюнкцию высказываний p и q , где p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Конъюнкция высказываний

p – «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,

q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1

GHz »
Решение Конъюнкция высказываний p и q :

«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска и процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

Более привычный вариант конъюнкции высказываний p и q :

«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске и работает быстрее, чем 1 GHz».

Дизъюнкция высказываний

Определение 4 **Дизъюнкцией** высказываний p и q называется высказывание « p или q », которое обозначается через $p \vee q$. Дизъюнкция $p \vee q$ ложна, когда оба высказывания p и q ложны, и истинна в противном случае.

Дизъюнкция высказываний

Таблица истинности для
дизъюнкции двух высказываний

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Дизъюнкция высказываний

Пример 5 Построить дизъюнкцию высказываний p и q , где p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска», а q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz», и записать полученное высказывание на привычном русском языке.

Дизъюнкция высказываний

p – высказывание «На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска»,

q – высказывание «Процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz»

Решение. Дизъюнкция высказываний p и q :

«На персональном компьютере Андрея свободно более 16 GB жесткого диска, или процессор персонального компьютера Андрея работает быстрее, чем 1 GHz».

Более привычный вариант дизъюнкции высказываний p и q :

«Персональный компьютер Андрея имеет более 16 GB памяти на жестком диске или работает быстрее, чем 1 GHz».

Исключающее или

Определение 5 **Исключающим или**

высказываний p и q называется высказывание « p или q , но не одновременно p и q », которое обозначается через $p \oplus q$. Исключающее или $p \oplus q$ истинно, когда в точности одно из высказываний p или q истинно, и ложно в противном случае.

Исключающее или

Таблица истинности для
исключающего или двух
высказываний

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Исключающее или

Пример 6 Исключающее или используется в следующей ситуации.

Студенты изучающие математический анализ или программирование, но не обе эти дисциплины одновременно, могут записаться на дополнительный курс по менеджменту.

Это значит, что студенты, изучающие обе дисциплины: математический анализ и программирование, – не могут изучать дополнительный курс по менеджменту.

Условные высказывания

Определение 6 Пусть p и q – два высказывания. Высказывание «если p , то q » называется **условным высказыванием** и обозначается через $p \rightarrow q$. Условное высказывание $p \rightarrow q$ ложно, когда p истинно и q ложно, и истинно в противном случае.

В условном высказывании $p \rightarrow q$ высказывание p называется **условием**, а высказывание q **заключением**.

Условное высказывание еще называется **импликацией**.

Условные высказывания

Таблица истинности для условного высказывания $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Условное высказывание $p \rightarrow q$ ложно, когда p истинно и q ложно, и истинно в противном случае.

Условные высказывания

Условное высказывание $p \rightarrow q$ можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- из p следует q ;
- p влечет q ;
- p достаточно для q ;
- p является достаточным условием для q ;
- q необходимо для p ;
- q является необходимым условием для p .

Условные высказывания

Пример 7 Пусть p – высказывание «Мария изучает дискретную математику», а q – высказывание «Мария найдет интересную и высокооплачиваемую работу». Выразить высказывание $p \rightarrow q$ на русском языке.

Решение Варианты высказывания $p \rightarrow q$:

«Если Мария изучает дискретную математику, то она найдет интересную и высокооплачиваемую работу»,

«Чтобы Мария нашла интересную и высокооплачиваемую работу, ей достаточно изучать дискретную математику».

Конверсия, контрапозиция, инверсия

С условным высказыванием $p \rightarrow q$ связаны еще три условных высказывания:

- высказывание $q \rightarrow p$ называется **конверсией** высказывания $p \rightarrow q$;
- высказывание $\neg q \rightarrow \neg p$ называется **контрапозицией** высказывания $p \rightarrow q$;
- высказывание $\neg p \rightarrow \neg q$ называется **инверсией** высказывания $p \rightarrow q$;

Конверсия, контрапозиция, инверсия

Пример 7 Пусть p – высказывание «Футбольный клуб «Неман» выигрывает матч», а q – высказывание «Идет дождь». Построить конверсию, контрапозицию и инверсию импликации $p \rightarrow q$ на русском языке.

Решение

- Конверсия импликации $p \rightarrow q$: «Если идет дождь, то футбольный клуб «Неман» выигрывает матч».
- Контрапозиция импликации $p \rightarrow q$: «Если дождь не идет, то футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч».
- Инверсия импликации $p \rightarrow q$: «Если футбольный клуб «Неман» не выигрывает матч, то дождь не идет».

Биимпликация высказываний

Определение 7 **Биимпликацией** высказываний p и q называется высказывание « p тогда и только тогда, когда q », которое обозначается через $p \equiv q$. Биимпликация $p \equiv q$ истинна, когда оба высказывания p и q одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

Биимпликация высказываний

Таблица истинности для биимпликации двух высказываний

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Биимпликация $p \leftrightarrow q$ истинна, когда оба высказывания p и q одновременно истинны или одновременно ложны, и ложна в противном случае.

Биимпликация высказываний

Биимпликацию $p \leftrightarrow q$ можно выразить с помощью следующих оборотов речи:

- p необходимо и достаточно для q ;
- p является необходимым и достаточным условием для q ;
- p если и только если q .

Биимпликация высказываний

Пример 8 Пусть p – высказывание «Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете», а q – высказывание «Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж». Выразить высказывание $p \supset q$ на русском языке.

Решение

«Вы можете полететь из Минска в Париж на самолете, если и только если Вы купите билет на самолет, следующий рейсом Минск – Париж».

Таблицы истинности сложных высказываний

С помощью введенных логических операций конъюнкция, дизъюнкция, исключающее или, импликация, биимпликация и отрицание можно строить сложные высказывания, состоящие из произвольного числа пропозициональных переменных.

Для определения логического значения сложных высказываний следует использовать таблицы истинности, определяющие логические значения высказываний $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$, $p \oplus q$.

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания $(p \wedge \neg q) \vee (p \vee q)$.

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$.

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$.

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F			
T	F	T			
F	T	F			
F	F	T			

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$.

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$.

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	
T	F	T	T	F	
F	T	F	F	F	
F	F	T	T	F	

Таблицы истинности сложных высказываний

Пример 9 Построить таблицу истинности сложного высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$.

Таблица истинности высказывания $(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

Приоритет (порядок выполнения) логических операций

Приоритет логических операций

Операция	Приоритет
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

Для уменьшения числа пар скобок в сложном высказывании установлен порядок выполнения логических операций, описанный в таблице.

Приоритет (порядок выполнения) логических операций

Приоритет логических операций

Операция	Приоритет
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4
\leftrightarrow	5

Пример 10 Расставим скобки в сокращенной записи сложного высказывания

$p \square q \square p \square \square (p \square q)$:

1. $(p \square q)$ $\square p \square \square (p \square q)$,
2. $(p \square q) \square$ $(p \square \square (p \square q))$.

Тавтологии и противоречия

Определение 1 Сложное высказывание называется **тавтологией**, если оно истинно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

Тавтологии и противоречия

Определение 2 Сложное высказывание называется **противоречием**, если оно ложно при любых истинностных значениях входящих в него пропозициональных переменных.

Тавтологии и противоречия

Определение 3 Сложное высказывание называется **контингенцией**, если оно не является ни тавтологией ни противоречием.

Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную переменную.

Примеры тавтологии и противоречия			
p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

Тавтологии и противоречия

Пример 1 Можно построить тавтологию и противоречие, используя только одну пропозициональную

переменную

Примеры тавтологии и противоречия

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

Высказывание $p \square \square p$ всегда истинно, значит $p \square \square p$ – тавтология.

Высказывание $p \square \square p$ всегда ложно, значит $p \square \square p$ – противоречие

Логическая эквивалентность высказываний

Два сложных высказывания называются **логически эквивалентными**, если они имеют одинаковые истинностные значения на всех возможных наборах истинностных значений входящих в них пропозициональных переменных.

Логическую эквивалентность сложных высказываний можно определить, используя тавтологию.

Логическая эквивалентность высказываний

Определение 4 Сложные высказывания p и q называются **логически эквивалентными**, если сложное высказывание $p \equiv q$ является тавтологией.

Запись $p \equiv q$ означает, что p и q логически эквивалентны.

Логическая эквивалентность высказываний

Для определения эквивалентности двух сложных высказываний можно использовать таблицы истинности.

Два сложных высказывания логически эквивалентны тогда и только тогда, когда столбцы истинностных значений этих высказываний совпадают.

Будьте внимательны! В таблицах истинности, соответствующих рассматриваемым высказываниям, наборы истинностных значений пропозициональных переменных должны располагаться в одинаковой последовательности.

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \vee \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \vee \neg q$.						
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$.						
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T				
T	F	T				
F	T	T				
F	F	F				

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F			
T	F	T	F			
F	T	T	F			
F	F	F	T			

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F	F		
T	F	T	F	F		
F	T	T	F	T		
F	F	F	T	T		

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$.						
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F	F	F	
T	F	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	F	
F	F	F	T	T	T	

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \vee \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \vee \neg q$.						
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 2 Покажем, что $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \rightarrow q)$ и $\neg p \wedge q$.						
p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Истинностные значения высказываний $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q, значит, сложное высказывание $\neg(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ является тавтологией, и сложные высказывания $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$ логически эквивалентны.

$\neg(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ – один из **законов Де Моргана**.

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что $\neg p \vee \neg q$ и $p \wedge q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg p \vee \neg q$ и $p \wedge q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что $\neg(p \wedge q)$ и $p \vee \neg q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(p \wedge q)$ и $p \vee \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg q$
T	T	F		
T	F	F		
F	T	T		
F	F	T		

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ и $p \vee q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ и $p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
T	T	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	F	T	T	

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что $\neg p \vee \neg q$ и $p \wedge q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg p \vee \neg q$ и $p \wedge q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	F	T	T	F

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 3 Покажем, что $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ и $p \vee q$ логически эквивалентны.

Таблицы истинности для $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ и $p \vee q$				
p	q	$\neg p$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Логическая эквивалентность высказываний

Таблицы истинности для $\neg p \vee q$ и $p \rightarrow q$				
p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Истинностные значения высказываний $\neg p \vee q$ и $p \rightarrow q$ совпадают на всех наборах истинностных значений переменных p и q , значит, сложное высказывание $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$ является тавтологией, и сложные высказывания $\neg p \vee q$ и $p \rightarrow q$ логически эквивалентны.

Логическая эквивалентность высказываний

Пример 4 Покажем, что сложные высказывания $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ и $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ логически эквивалентны.

В высказывания $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ и $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ входят три пропозициональные переменные p , q и r .

Поэтому в таблицах истинности будет 8 строк с комбинациями истинностных значений пропозициональных переменных p , q и r :

T T T, T T F, T F T, T F F, F T T, F T F и F F F.

Мы будем всегда использовать в таблицах истинности этот порядок строк!

Доказательство логической эквивалентности

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ и $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

Доказательство логической эквивалентности

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ и $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T				
T	T	F	F				
T	F	T	F				
T	F	F	F				
F	T	T	T				
F	T	F	F				
F	F	T	F				
F	F	F	F				

Доказательство логической эквивалентности

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \text{ и } (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
T	T	T	T	T			
T	T	F	F	T			
T	F	T	F	T			
T	F	F	F	T			
F	T	T	T	T			
F	T	F	F	F			
F	F	T	F	F			
F	F	F	F	F			

Доказательство логической эквивалентности

$p \wedge (q \vee r)$ и $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Итак, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ –
дистрибутивный закон дизъюнкции
относительно конъюнкции.

Таблица 1. Логические эквивалентности

Эквивалентность	Название
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Законы тождества
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	Законы доминирования
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Законы идемпотентности
$\neg(\neg p) \equiv p$	Закон двойного отрицания
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Законы коммутативности

Логические эквивалентности (продолжение таблицы 1)

Эквивалентность	Название
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Законы ассоциативности
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Законы дистрибутивности
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Законы де Моргана
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Законы поглощения
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	Законы отрицания

Логическая эквивалентность высказываний

Множество сложных высказываний, на котором заданы логические операции \neg , \wedge , \vee , удовлетворяющие законам тождества, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности и отрицания, является **булевой алгеброй**.

Таблица 2. Логические эквивалентности, содержащие условные высказывания

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$$

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

Таблица 3. Логические эквивалентности, содержащие биимпликации

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

Применение законов Де Моргана

Пример 5 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «Сергей пойдёт на концерт, или Евгений пойдёт на концерт».

Решение Пусть p – «Сергей пойдёт на концерт», а q – «Евгений пойдёт на концерт», Тогда «Сергей пойдёт на концерт, **или** Евгений пойдёт на концерт» можно представить как $p \vee q$.

По первому закону Де Моргана $\neg(p \vee q)$ логически эквивалентно $\neg p \wedge \neg q$.

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «Сергей не пойдёт на концерт, **и** Евгений не пойдёт на концерт».

Применение законов Де Моргана

Пример 6 Используем закон Де Моргана для построения отрицания высказывания: «У Ольги есть смартфон, и у нее есть ноутбук».

Решение Пусть p – «У Ольги есть смартфон», а q – «У Ольги есть ноутбук», Тогда «У Ольги есть смартфон, **и** у нее есть ноутбук» можно представить как $p \wedge q$.

По первому закону Де Моргана $\neg(p \wedge q)$ логически эквивалентно $\neg p \vee \neg q$.

Значит, отрицание исходного высказывания можно выразить так: «У Ольги нет смартфона, **или** у нее нет ноутбука».

Построение новых логических эквивалентностей

Логические эквивалентности таблиц 1, 2 и 3 можно использовать для построения новых логических эквивалентностей.

Пусть высказывание P входит в состав сложного высказывания $C(P)$. P можно заменить логически эквивалентным ему высказыванием Q , при этом истинностное значение сложного высказывания $C(Q)$ будет таким же как у $C(P)$.

Построение новых логических эквивалентностей

Пример 7 Покажем с помощью преобразований, что высказывания $\neg(p \vee q)$ и $p \wedge \neg q$ логически эквиваленты.

Решение

$\neg(p \vee q) \equiv \neg(\neg\neg(p \vee q))$ – пример 3

$\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q$ – второй закон Де
Моргана

$\equiv p \wedge \neg q$ – закон двойного отрицания

Построение новых логических эквивалентностей

Пример 8 Покажем с помощью преобразований, что высказывания $\neg(p \wedge (\neg p \wedge q))$ и $(\neg p \wedge \neg q)$ логически эквиваленты.

Решение

$$\begin{aligned}\neg(p \wedge (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \\ &\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv F \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee F \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q)\end{aligned}$$

Построение новых логических эквивалентностей

Пример 9 Покажем с помощью преобразований, что высказывание $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ является тавтологией.

Решение

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (p \wedge q) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \wedge q) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q) \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \wedge (\neg q \wedge q) \\ &\equiv T \wedge T \\ &\equiv T\end{aligned}$$

Выполнимые и невыполнимые высказывания

Определение 5 Сложное высказывание называется **выполнимым**, если существует набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором это сложное высказывание является истинным. Если сложное высказывание ложно на любом наборе истинностных значений пропозициональных переменных, то оно называется **невыполнимым**.

Проблема выполнимости

Определение 6 Набор истинностных значений пропозициональных переменных, на котором выполнимое высказывание принимает значение истина, называется **решением** данной проблемы выполнимости.

Выполнимые и невыполнимые высказывания

Пример 9

Выясним, какие из следующих высказываний являются выполнимыми:

- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ – выполнимо
 $(p = T, q = T, r = T)$;
- $(p \wedge q \wedge r) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ – выполнимо
 $(p = T, q = F, r = T)$;
- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \wedge q \wedge r) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ – невыполнимо (почему?).

Проблема выполнимости

В терминах выполнимости сложных высказываний моделируются задачи из различных областей науки и техники:

- робототехники,
- разработки программного обеспечения,
- компьютерного проектирования,
- проектирования функциональных схем,
- организации компьютерных сетей,
- генетики.

Головоломка Судоку 9×9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Большой квадрат 9×9 делят на 9 маленьких квадратов 3×3. В некоторых из 81 ячеек записаны цифры от 1 до 9. Нужно заполнить пустые ячейки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом квадрате 3×3 не повторялись одинаковые цифры.

Головоломка Судоку 9×9.

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

Задача

Построить сложное высказывание, выполнимость которого равносильна решению головоломки Судоку 9×9.