

# Исследования по теории показателей А. М. Ляпунова

Научная школа В.  
М. Миллионщикова:  
И.Н. Сергеев, А.  
Н. Ветохин, В.В. Быков

*Кафедра дифференциальных уравнений  
Механико-математический факультет  
Московский государственный  
университет имени М.В.Ломоносова*

# Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918, Россия)



В 1892 г. для исследования устойчивости нулевого решения системы по ее первому приближению ввел *верхние характеристические показатели* решений (ненулевых).

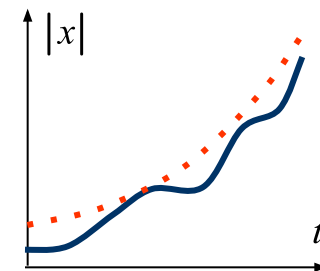
Показатель Ляпунова осуществляет экспоненциальную верхнюю оценку нормы решения.

$$\dot{x} = A(t)x + o(x)$$

$$(x \rightarrow 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0)$$

$$\chi(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

$$|x(t)| \leq C_\varepsilon e^{(\chi(x) + \varepsilon)t} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$



# А.М. Ляпунов (1857–1918, Россия)



Доказал, что в случае *правильной* (в частности, автономной) системы *первого приближения* верно следующее:

- если показатели всех ее решений отрицательны, то имеет место экспоненциальная устойчивость;
- если показатель хотя бы одного ее решения положителен, то имеет место неустойчивость.

$$\dot{x} = A(t)x$$

$$\forall x \quad \chi(x, t) < 0 \Rightarrow$$

$$\exists x \quad \chi(x, t) > 0 \Rightarrow$$

# А.М. Ляпунов (1857–1918, Россия)



Изучил показатели всех решений  $n$ -мерной линейризованной системы (с ограниченными коэффициентами):

- всего их оказалось ровно  $n$  (с учетом кратности);
- показатель с номером  $i$  отвечает за условную  $i$ -устойчивость (с начальными значениями из  $i$ -мерного многообразия);
- если система автономна, то показатели Ляпунова совпадают с действительными частями собственных значений ее матрицы.

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A \in M^n$$

$$\lambda_1(A) \leq K \leq \lambda_n(A)$$

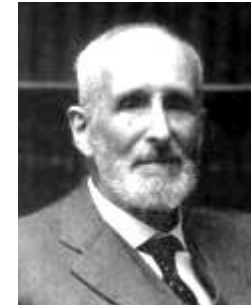
$$\lambda_i(A) < 0 \Rightarrow i\text{-устойчивость}$$

$$\lambda_i(A) > 0 \Rightarrow i\text{-неустойчивость}$$

$$A = \text{const} \Rightarrow \lambda_i(A) = \text{Re} \alpha_i(A),$$

где  $\alpha_i(A)$  –  $i$ -е собств. зн.

# Перрон Оскар (1880–1975, Германия)



В 1913 г. привел пример *точки разрыва* старшего показателя Ляпунова системы как функции от ее коэффициентов.

В результате встал вопрос об описании точек непрерывности (полунепрерывности сверху или снизу) показателей Ляпунова, рассматриваемых:

- как функционалы на пространстве линейных систем (с *равномерной* топологией);
- как функции параметра, задающего семейство систем (или на пространстве линейных систем с *компактно-открытой* топологией).

$\exists A \in M^n$  (равном. топ.):  
 $\lambda_n$  – разрывен в т.  $A$

$$\lambda_i : M^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda_i(A(\cdot, \mu))$$

# Виноград Роберт Эльюкимович (1924, Россия, Израиль)

В 1957 г. ввел (задал формулами)  
*центральные показатели*,  
доказав, что они оценивают  
сдвиги показателей Ляпунова при  
равномерно малых возмущениях  
коэффициентов линейной  
системы:

- верхний — оценивает сдвиги  
вверх старшего показателя  
Ляпунова;
- нижний — оценивает сдвиги вниз  
младшего показателя Ляпунова.

$$\Omega, \omega : M^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega(A) \geq \overline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_n(B) \equiv \overline{\lambda}_n(A)$$

$$\omega(A) \leq \underline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_1(B) \equiv \underline{\lambda}_1(A)$$

# Миллионщиков Владимир Михайлович (1939–2009, Россия )



В 1969 г. с помощью своего *метода поворотов*:

- доказал *достижимость* (обратную оценку) центральных показателей показателями Ляпунова при равномерно малых возмущениях коэффициентов линейной системы;
- описал все точки непрерывности всех одновременно показателей Ляпунова линейных систем;
- описал все точки *грубой непрерывности* (в целой окрестности) всех одновременно показателей Ляпунова линейных систем (это системы с интегральной разделенностью);
- доказал, что точки грубой непрерывности показателей всюду плотны в пространстве всех систем.

$$\Omega(A) = \overline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_n(B)$$

$$\omega(A) = \underline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_1(B)$$

# Изобов Николай Алексеевич (1940, Белоруссия)



Для старшего показателя  
Ляпунова:

- в 1976–77 гг. в двумерном случае вычислил его *миноранту* (аналог нижнего центрального показателя), описав тем самым все точки его полунепрерывности снизу;
- в 1978 г. в  $n$ -мерном случае оценил его миноранту снизу.

$$\underline{\lambda}_n(A) \equiv \underline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_n(B) \quad (n = 2)$$



# Сергеев Игорь Николаевич (1954, Россия)



Для каждого показателя Ляпунова  
в отдельности:

- в 1980 г. вычислил его *мажоранту* (аналог верхнего центрального показателя), описав тем самым все точки его полунепрерывности сверху;
- в 1993 г. в трехмерном случае вычислил его миноранту, описав тем самым и все точки его полунепрерывности снизу.

$$\overline{\lambda}_i(A) \equiv \overline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_i(B)$$

$$\underline{\lambda}_i(A) \equiv \underline{\lim}_{B \rightarrow A} \lambda_i(B) \quad (n = 3)$$

# Бэр Рене-Луи (1874–1932, Франция)



В 1899 г. предложил свою *классификацию разрывных функций*:

- нулевой класс Бэра состоит из непрерывных функций;
- если функция представляется, как поточечный предел последовательности функций нулевого класса, то она принадлежит первому классу Бэра;
- если функция представляется, как поточечный предел последовательности функций первого класса, то она принадлежит второму классу Бэра;

и т. д.

$$B_0(M^n)$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$B_1(M^n)$$

$$B_2(M^n)$$

# В.М. Миллионщиков (1939–2009, Россия )



С 1980 г. начал применять теорию разрывных функций Бэра к показателям линейных систем, доказав принадлежность:

- каждого показателя Ляпунова — 2-му классу Бэра в равномерной и компактно-открытой топологиях;
- центральных показателей в компактно-открытой топологии:
  - верхнего — 2-му классу Бэра,
  - нижнего — 3-му классу Бэра (в равномерной топологии оба принадлежат 1-му классу Бэра).

$$\lambda_i, \Omega \in B_2(M^n)$$

$$\omega \in B_3(M^n)$$

# Рахимбердиев Марат Исимгалиевич (1945–2008, Казахстан)



В 1982 г. доказал, что показатели Ляпунова не принадлежат 1-му классу Бэра (ни в равномерной, ни тем более в компактно-открытой топологии) — отсюда стало ясно, что они принадлежат в *точности* 2-му классу Бэра.

$$\lambda_i \in B_2(M^n), B_1(M^n)$$

# Ветохин Александр Николаевич (1971, Россия)



В 1995 г.:

- предложил простые *признаки непринадлежности* показателей 1-му классу Бэра в разных топологиях;
- доказал, что для всех показателей Ляпунова в компактно-открытой топологии:
  - мажоранты не принадлежат 1-му классу Бэра,
  - миноранты не принадлежат 2-му классу Бэра.

$$\overline{\lambda}_i \notin B_1(M^n)$$

$$\underline{\lambda}_i \notin B_2(M^n)$$

# Быков Владимир Владиславович (1973, Россия)



В 1996 г. доказал, что в компактно-открытой топологии миноранта старшего показателя Ляпунова принадлежит 3-му классу Бэра (тем самым — в точности 3-му).

Этот результат:

- ранее был установлен лишь в трехмерном случае (И.Н. Сергеев, 1995 г.);
- позднее был распространен на миноранты всех остальных показателей Ляпунова (Е.Е. Салов, 1999 г.).

$$\underline{\lambda}_n \in B_3(M^n), B_2(M^n)$$

$$\underline{\lambda}_i \in B_3(M^n), B_2(M^n)$$

# О. Перрон (1880–1975, Германия)

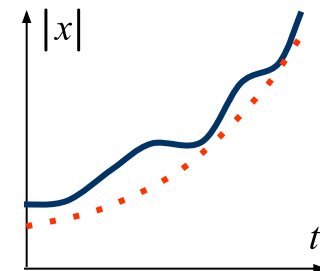


В 1930 г.:

- рассмотрел *нижние характеристические показатели* решений (ненулевых), которые:
  - осуществляют *нижние экспоненциальные оценки* их нормы,
  - в случае *правильной системы* совпадают с *верхними*;
- обнаружил, что количество различных *нижних показателей* решений одной  $n$ -мерной системы может быть больше  $n$  (уже при  $n=2$ ).

$$\pi(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

$$|x(t)| \geq C_\varepsilon e^{(\pi(x) - \varepsilon)t} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$



## Н.А. Изобов (1940, Белоруссия)



Показал, что *показатели Перрона* (нижние) устроены гораздо сложнее, чем *показатели Ляпунова* (верхние):

- количество нижних показателей диагональной системы может достигать  $2^n - 1$  (1964 г.);
- множество нижних показателей решений двумерной системы может включать целый отрезок (1965 г.);
- нижние показатели почти всех решений одной системы одинаковы (1968 г.).

Впоследствии было получено полное описание всех возможных множеств нижних показателей (Е.А. Барабанов, 1986 г.).



# И.Н. Сергеев (1954, Россия)



В 2004 г.:

- *регуляризовал по Миллионщикову* нижние характеристические показатели, получив ровно  $n$  показателей Перрона для любой  $n$ -мерной системы;
- указал мажоранту старшего и миноранту младшего показателей Перрона, которые совпадают с верхним и, соответственно, нижним центральными показателями (нижнепредельными).

$$\pi_1(A) \leq K \leq \pi_n(A)$$

$$\overline{\pi}_n(A), \underline{\pi}_1(A)$$

# И.Н. Сергеев (1954, Россия)



В 2004 г. для линейных уравнений  $n$ -го порядка:

- ввел *характеристические частоты* решений (ненулевых), задающие среднее число нулей решения (на промежутке длины  $\pi$ );
- доказал, что *спектр* (множество различных значений) частот автономного уравнения 4-го порядка может содержать сколь угодно большое число значений.

Оказалось, что спектр частот последнего уравнения может даже заполнять целый отрезок (А.Ю. Горицкий, 2008 г.).

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0,$$

$$a \equiv (a_1, \dots, a_n) \in E^n$$

$$v(a) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{x} v(y, x),$$

$v(a)$  — число нулей на  $[0, x]$

$$v(\sin t + c \sin \omega t), \quad \omega \notin \mathbb{Q}$$

# И.Н. Сергеев (1954, Россия)



В 2004 г., регуляризовав по Миллионщикову характеристические частоты, получил ровно  $n$  значений для любого уравнения  $n$ -го порядка и доказал, что они:

- в случае автономного уравнения совпадают с модулями мнимых частей корней характеристического многочлена;
- являются разрывными функциями коэффициентов уравнения.

$$\omega_1(a) \leq K \leq \omega_n(a)$$

$$a = \text{const} \Rightarrow \omega_i(a) = \left| \text{Im } \alpha_i(a) \right|,$$

где  $\alpha_i(a)$  –  $i$ -й кор. хар. мн.

$\forall i \exists a \in \mathbf{E}^n$  (равном. топ.):

$\omega_i$  – разрывна в т.  $a$

# И.Н. Сергеев (1954, Россия)



В 2009–10 гг., рассмотрев решения (ненулевые) линейных систем:

- распространил на них понятие частоты, определив *полную частоту* решения;
- ввел *показатель блуждаемости* решения (связанный со средней скоростью его вращения);
- доказал, что полные частоты и показатели блуждаемости всех решений автономной системы совпадают с модулями мнимых частей собственных значений ее матрицы.

$$\sigma(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} v(x, m)$$

$$\rho(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^n} \mu(Lx),$$

$$\mu(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left( \frac{x(\tau)}{|x(\tau)|} \right) \right| d\tau$$

# Различные показатели ляпуновского типа

Показатели:

- верхние (Ляпунов);
- нижние (Перрон);
- степенные (Демидович);
- неправильности (Перрон, Гробман, Миллионщиков);
- центральные (Виноград);
- особые (Боль), генеральные (Персидский);
- экспоненциальные (Изобов);
- вспомогательные (Миллионщиков);
- блуждаемости, колеблемости (Сергеев).

# Классы линейных систем

- Системы с ограниченными коэффициентами (основной класс).
- Системы с неограниченными коэффициентами.
- Постоянные, периодические.
- Приводимые, почти приводимые.
- Правильные, бирегулярные.
- Системы с интегральной разделенностью.
- Системы, отвечающие уравнениям.
- Управляемые, с обратной связью.
- Гамильтоновы.

$M^n$

$\mathbb{M}^n$

$E^n$

# Топологии и классы возмущений

Топологии (на полуоси):

- равномерная;
- сходимости на компактах (компактно-открытая);
- интегральная;
- сходимости в среднем.

Возмущения:

- экспоненциальные;
- бесконечно малые;
- заданного порядка малости;
- не выводящие из заданного класса систем.

# Возможные темы научных работ по линейным системам

- Найти формулу для мажоранты старшего показателя Ляпунова двумерной системы с неограниченными коэффициентами.
- Предъявить двумерную систему без интегральной разделенности, но с грубо устойчивым старшим показателем Ляпунова.
- Существует ли такая трехмерная система, что для любой пары двумерных подпространств ее решений наибольший показатель Перрона в первом из них больше наименьшего — во втором?
- Описать все возможные спектры полных частот или показателей блуждаемости произвольного уравнения третьего порядка.
- Существует ли характеристика вектор-функции, принимающая на решениях любой  $n$ -мерной системы не более  $n$  значений, совпадающих в случае автономной системы с мнимыми частями (по модулю) собственных значений ее матрицы?



# Возможные темы научных работ по классам Бэра

- Какому классу Бэра принадлежит миноранта старшего показателя Ляпунова, рассматриваемая как функционал на пространстве систем с неограниченными коэффициентами с компактно-открытой топологией?
- Существует ли такое семейство систем, коэффициенты которых непрерывно зависят от вещественного параметра, что старший показатель Ляпунова, как функция параметра, не является полунепрерывным снизу ни в одной точке?
- Какому классу Бэра принадлежат частоты уравнения (не считая младшей)?
- Какому классу Бэра принадлежат показатели Перрона (не считая старшего)?

$$\lambda_n : \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega_2(a), \mathbb{K}, \omega_n(a)$$

$$\pi_1(A), \mathbb{K}, \pi_{n-1}(A)$$

# Учебники и монографии по теории показателей Ляпунова

