Лекция 9

Марковские процессы

Марковские процессы

Случайный процесс, протекающий в системе, называется **марковским**, если он обладает отсутствием последствия. Т.е. если рассматривать текущее состояние процесса $\xi(t_0)$ - как настоящее, совокупность возможных состояний $\{\xi(s), s < t\}$ - как прошлое, совокупность возможных состояний $\{\xi(u), u > t\}$ - как будущее, то для марковского процесса при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого, а определяется лишь настоящим и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние.

Марковские процессы

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А.Маркова, впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать "динамикой вероятностей". В дальнейшем основы этой теории явились исходной базой общей теории случайных процессов, а также таких важных прикладных наук, как теория диффузионных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и т.д.

Марков Андрей Андреевич

1856-1922

Русский математик.

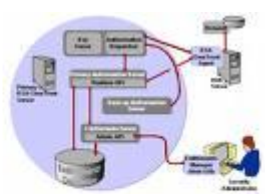
Написал около 70 работ по теории чисел, теории приближения функций, теории вероятностей. Существенно расширил сферу применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Является основоположником теории случайных процессов.

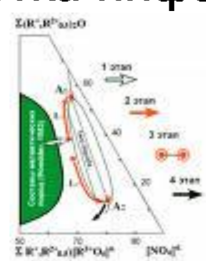
Марковские процессы

На практике марковские процессы в чистом виде обычно не встречаются. Но имеются процессы, для которых влиянием «предыстории» можно пренебречь, и при изучении таких процессов можно применять марковские модели. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях.

Марковские процессы

- Биология: процессы рождения и гибели - популяции, мутации, эпидемии.
- Физика: радиоактивные распады, теория счетчиков элементарных частиц, процессы диффузии.
- Химия: теория следов в ядерных фотоэмульсиях, вероятностные модели химической кинетики.
- Астрономия: теория флуктуационной яркости млечного пути.
- Теория массового обслуживания: телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы, системы управления гибких производственных систем, обработка информации серверами.





Марковские процессы

Пусть в настоящий момент t_0 система находится в определенном состоянии S_0. Мы знаем характеристики состояния системы в настоящем и все, что было при $t < t_0$ (предысторию процесса). Можем ли мы предсказать будущее, т.е. что будет при $t > t_0$?

В точности – нет, но какие-то вероятностные характеристики процесса в будущем найти можно. Например, вероятность того, что через некоторое время τ система S окажется в состоянии S_1 или останется в состоянии S_0 и т.д.

Марковские процессы. Пример.

Система S – группа самолетов, участвующих в воздушном бою. Пусть x – количество «красных» самолетов, y – количество «синих» самолетов. К моменту времени t_0 количество сохранившихся (не сбитых) самолетов соответственно – x_0, y_0.

Нас интересует вероятность того, что в момент времени $t_0+\tau$ численный перевес будет на стороне «красных». Эта вероятность зависит от того, в каком состоянии находилась система в момент времени t_0, а не от того, когда и в какой последовательности погибали сбитые до момента t_0 самолеты.

Дискретные цепи Маркова

Марковский процесс с конечным или счетным числом состояний и моментов времени называется дискретной цепью Маркова. Переходы из состояния в состояние возможны только в целочисленные моменты времени.

Дискретные цепи Маркова. Пример

Предположим, что речь идет о последовательных бросаниях монеты при игре "в орлянку"; монета бросается в условные моменты времени t =0, 1, ... и на каждом шаге игрок может выиграть ±1 с одинаковой вероятностью 1/2, таким образом в момент t его суммарный выигрыш есть случайная величина $\xi(t)$ с возможными значениями j = 0, ±1, ...

При условии, что $\xi(t) = k$, на следующем шаге выигрыш будет уже равен $\xi(t+1) = k \pm 1$, принимая значения $j = k \pm 1$ с одинаковой вероятностью 1/2. Можно сказать, что здесь с соответствующей вероятностью происходит переход из состояния $\xi(t)$ = k в состояние $\xi(t+1) = k \pm 1$.

Дискретные цепи Маркова

Обобщая этот пример, можно представить себе систему со счетным числом возможных состояний, которая с течением дискретного времени $t = 0, 1, \ldots$ случайно переходит из состояния в состояние.

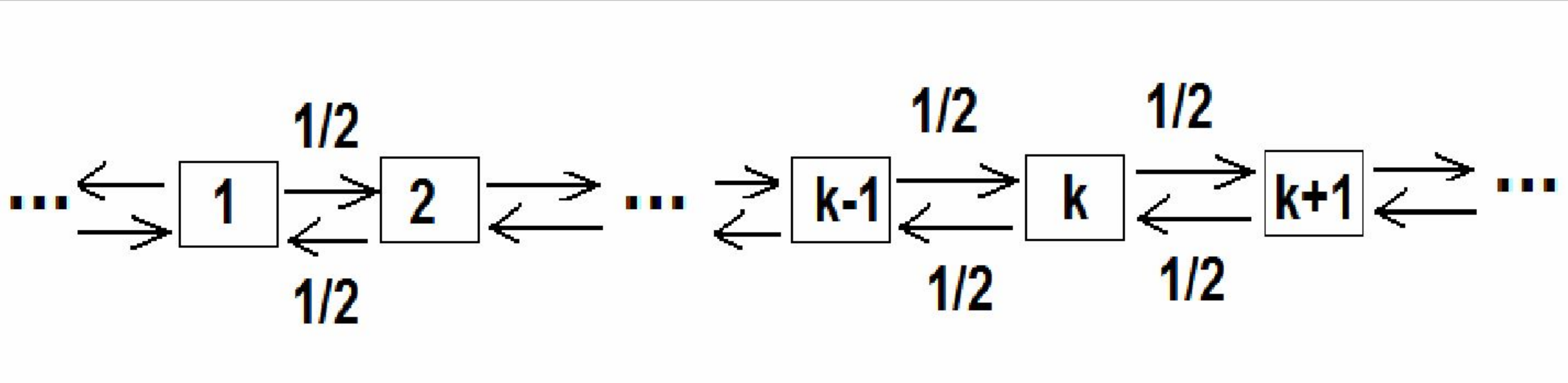
Пусть $\xi(t)$ есть ее положение в момент t в результате цепочки случайных переходов

$$\xi(0) \to \xi(1) \to \ldots \to \xi(t) \to \xi(t+1) \to \ldots \to \ldots .$$

Дискретные цепи Маркова

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой – графом состояний. Вершины графа – состояния системы. Дуги графа – возможные переходы из состояния в состояние.

Игра «в орлянку».



Дискретные цепи Маркова

Обозначим все возможные состояния целыми $i = 0, \pm 1, \ldots$ Предположим, что при известном состоянии $\xi(t) = i$ на следующем шаге система переходит в состояние $\xi(t+1) = j$ с условной вероятностью

$$P\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i\}$$

независимо от ее поведения в прошлом, точнее, независимо от цепочки переходов до момента t:

$$P\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i;\ \xi(t-1) = i_{t-1}; \ldots ; \xi(0) = i_0\} =$$

$$= P\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i\}$$

Это свойство называется марковским.

Дискретные цепи Маркова

Число $p_{ij} = P\{\xi(t+1) = j \mid \xi(t) = i\}$ называется вероятностью перехода системы из состояния i в состояние j за один шаг в момент времени $t \geq 1$.

Если переходная вероятность не зависит от t, то цепь Маркова называется однородной.

Дискретные цепи Маркова

Матрица P, элементами которой являются вероятности перехода p_{ij}, называется переходной матрицей:

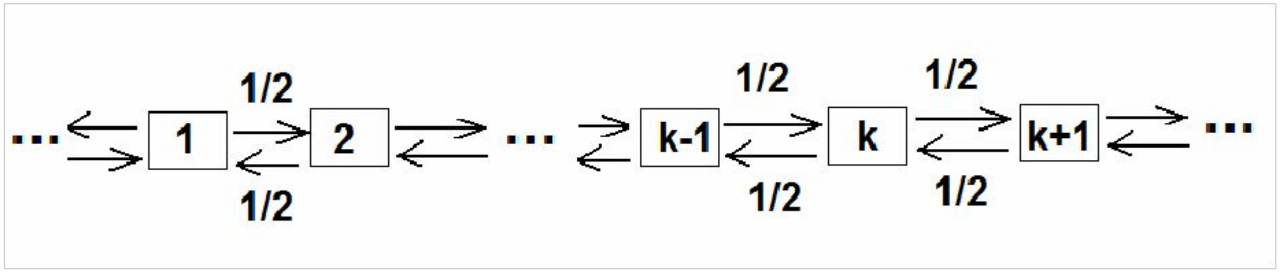
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Она является стохастической, т.е.

$$\sum_i p_{ij} = 1; \ \forall p_{ij} \geq 0 .$$

Дискретные цепи Маркова. Пример

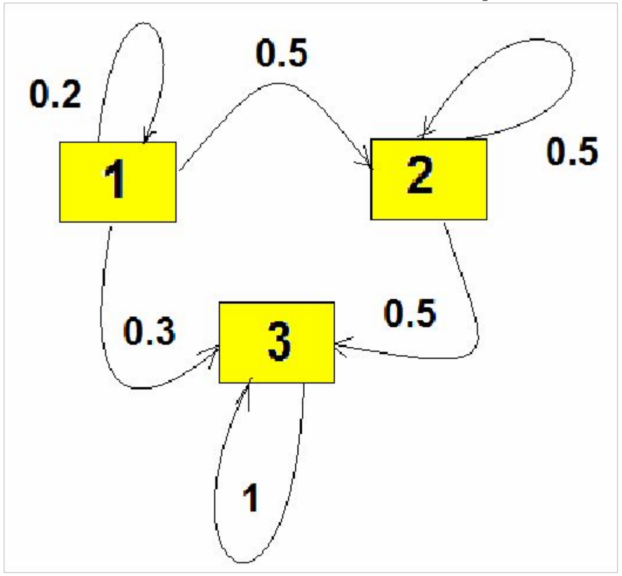
Матрица переходов для игры «в орлянку»



$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & \ldots \\
k-2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \\
k-1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \\
k & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\
k+1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \\
k+2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & \\
\ldots & & & & & &
\end{array}
$$

Дискретные цепи Маркова. Пример

Садовник в результате химического анализа почвы оценивает ее состояние одним из трех чисел — хорошее (1), удовлетвори-тельное (2) или плохое (3). В результате наблюдений на протя-жении многих лет садовник заметил, что продуктивность почвы в текущем году зависит только от ее состояния в предыдущем году. Поэтому вероятности перехода почвы из одного состояния в другое можно представить следующей цепью Маркова с матрицей P1:

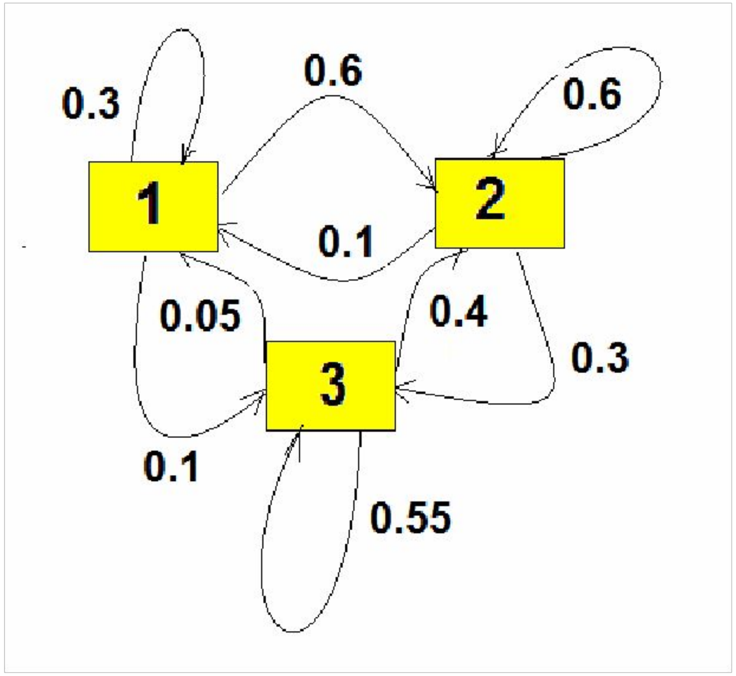


0.20	0.50	0.30
0.00	0.50	0.50
0.00	0.00	1.00

Дискретные цепи Маркова. Пример

Однако в результате агротехнических мероприятий садовник может изменить переходные вероятности в матрице Р1. Тогда матрица Р1 заменится на матрицу Р2:

0.30	0.60	0.10
0.10	0.60	0.30
0.05	0.40	0.55



Дискретные цепи Маркова

Рассмотрим, как изменяются состояния процесса с течением времени. Будем рассматривать процесс в последовательные моменты времени, начиная с момента 0. Зададим начальное распределение вероятностей $\overline{p}(0)=\{p_1(0),\dots,p_m(0)\}$, где *m* - число состояний процесса, $p_i(0)$ - вероятность нахождения процесса в состоянии *i* в начальный момент времени. Вероятность $p_i(n)$ называется безусловной вероятностью состояния *i* в момент времени $n\geq 1$.

Компоненты вектора $\overline{p}(n)$ показывают, какие из возможных состояний цепи в момент времени *n* являются наиболее вероятными.

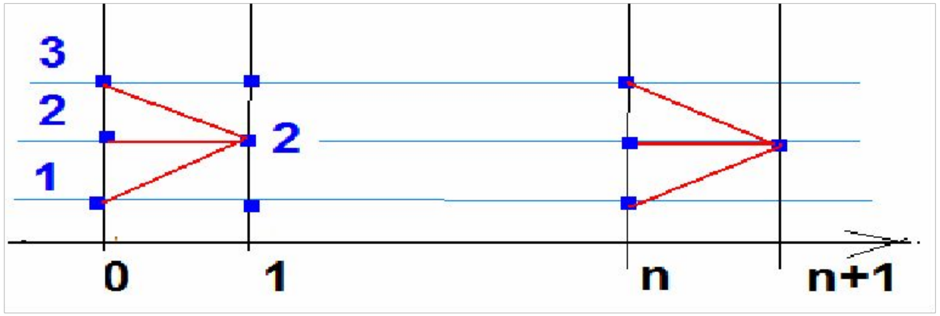
$$\sum_{k=1}^{m} p_k(n)=1$$

Дискретные цепи Маркова

Знание последовательности $\{\overline{p}(n)\}$ при $n=1,\dots$ позволяет составить представление о поведении системы во времени.

В системе с 3-мя состояниями

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$



$$p_2(1)=p_1(0)p_{12}+p_2(0)p_{22}+p_3(0)p_{32}$$

$$p_2(n+1)=p_1(n)p_{12}+p_2(n)p_{22}+p_3(n)p_{32}$$

В общем случае:

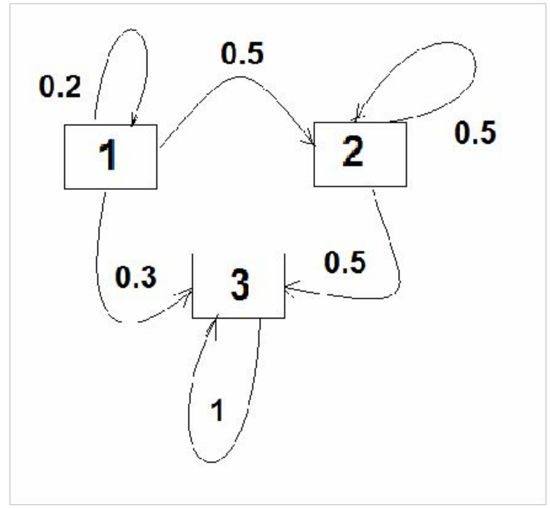
$$p_j(1)=\sum_k p_k(0)p_{kj} \qquad p_j(n+1)=\sum_k p_k(n)p_{kj}$$

$$\overline{p}(n+1)=\overline{p}(n)\bullet P$$

Дискретные цепи Маркова. Пример

Матрица

0.20	0.50	0.30
0.00	0.50	0.50
0.00	0.00	1.00



Шаг	$\{\overline{p}(n)\}$
n □ 0	1, 0, 0
n □ 1	0.2, 0.5, 0.3
n □ 2	0.04 0.35, 0.61
n □ 3	0.008, 0.195, 0.797
n □ 4	0.0016, 0.1015, 0.8969

Дискретные цепи Маркова

Матрица перехода за n шагов $P(n) = P^n$.

0.20	0.50	0.30
0.00	0.50	0.50
0.00	0.00	1.00

$$P(2) = P^2 = \begin{pmatrix} 0.0016 & 0.1015 & 0.8969 \\ 0. & 0.0625 & 0.9375 \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

$$\overline{p}(2) = \overline{p}(0) \bullet P^2 = (1,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} 0.0016 & 0.1015 & 0.8969 \\ 0. & 0.0625 & 0.9375 \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

$$\overline{p}(2) = (0.04,\ 0.35,\ 0.61)$$

Дискретные цепи Маркова

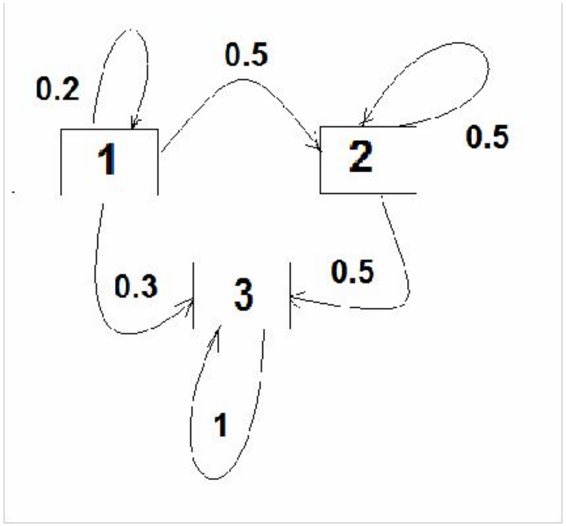
Как ведут себя марковские цепи при $n \to \infty$?

Для однородной марковской цепи при определенных условиях выполняется следующее свойство: $\overline{p}(n) \to \pi$ при $n \to \infty$.

Вероятности $\pi_i > 0$ не зависят от начального распределения $\overline{p}(0)$, а определяются только матрицей P. В этом случае $\overline{\pi}$ называется стационарным распределением, а сама цепь – эргодической. Свойство эргодичности означает, что по мере увеличения n вероятность состояний практически перестаёт изменяться, а система переходит в стабильный режим функционирования.

Дискретные цепи Маркова. Пример

0.20	0.50	0.30
0.00	0.50	0.50
0.00	0.00	1.00

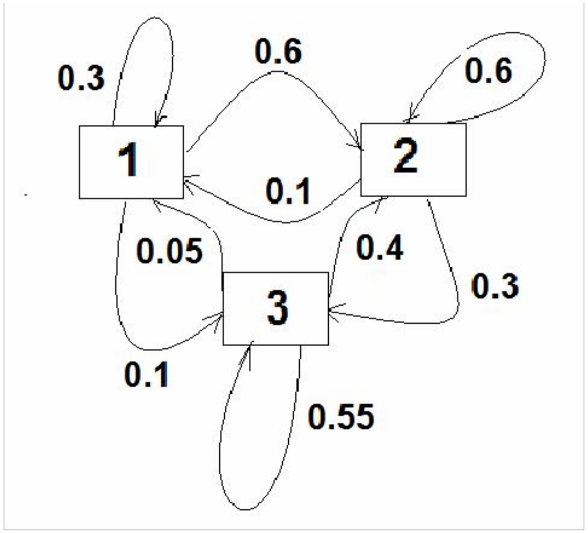


$$P(\infty)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\overline{p}(\infty)=(0,0,1)$$

Дискретные цепи Маркова. Пример

0.30	0.60	0.10
0.10	0.60	0.30
0.05	0.40	0.55



$$P(\infty)=\begin{pmatrix}0.1017 & 0.5254 & 0.3729\\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729\\ 0.1017 & 0.5254 & 0.3729\end{pmatrix}$$

$$\overline{p}(\infty)=(0.1017, 0.5254, 0.3729)$$

Марковские процессы с непрерывным временем

Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны и могут произойти в любой момент.

Пример. Технологическая система S состоит из двух устройств, каждое из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время.

Возможны следующие состояния системы:

S_0 - оба устройства исправны;

S_1 - первое устройство ремонтируется, второе исправно;

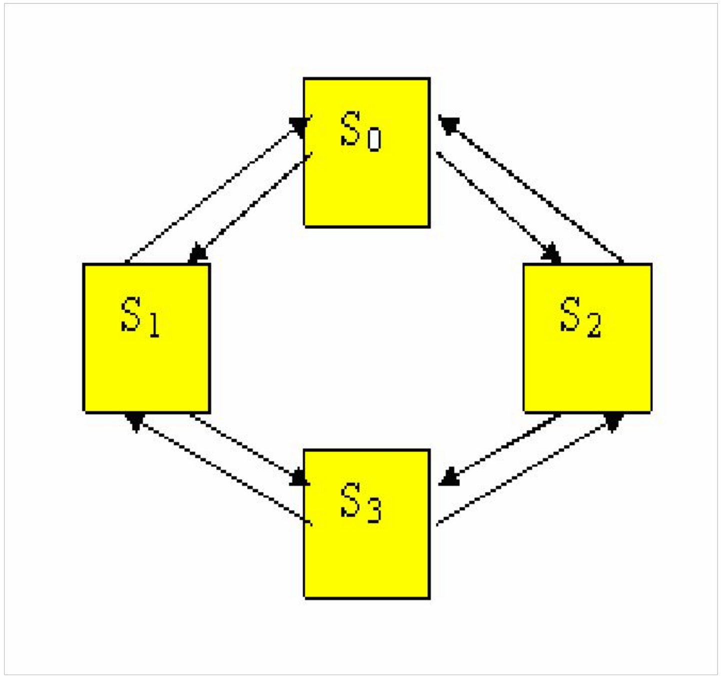
S_2 - второе устройство ремонтируется, первое исправно;

S_3 - оба устройства ремонтируются.

Марковские процессы с непрерывным временем

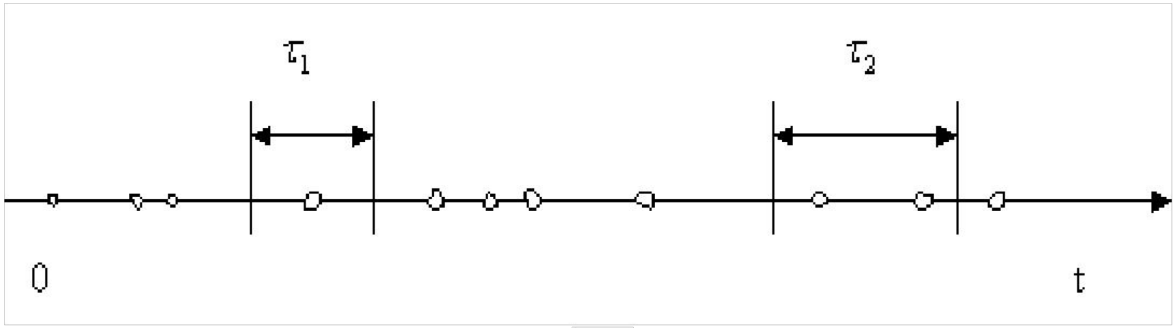
Переходы системы S из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или иного устройства или окончания ремонта.

Вероятностью одновременного выхода из строя обоих устройств можно пренебречь.



Потоки событий

Поток событий – последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени.



Интенсивность потока событий λ – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени.

Потоки событий

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

В частности, интенсивность λ стационарного потока постоянна. Поток событий неизбежно имеет сгущения или разрежения, но они не носят закономерного характера, и среднее число событий, приходящееся на единицу времени, постоянно и от времени не зависит.

Потоки событий

Поток событий называется потоком без последствий, если для любых двух непересекающихся участков времени τ_1 и τ_2 число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой. Другими словами, это означает, что события, образующие поток, появляются в те или иные моменты времени независимо друг от друга и вызваны каждое своими собственными причинами.

Поток событий называется ординарным, если вероятность появления на элементарном участке Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного события, т.е. события в нем появляются поодиночке, а не группами по нескольку сразу

Потоки событий

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он обладает сразу тремя свойствами: 1) стационарен, 2) ординарен, 3) не имеет последствий.

Простейший поток имеет наиболее простое математическое описание. Он играет среди потоков такую же особую роль, как и закон нормального распределения среди других законов распределения. А именно, при наложении достаточно большого числа независимых, стационарных и ординарных потоков (сравнимых между собой по интенсивности) получается поток, близкий к простейшему.

Потоки событий

Для простейшего потока с интенсивностью λ интервал времени *T* между соседними событиями имеет показательное распределение с плотностью

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x \geq 0 .$$

Для случайной величины *T*, имеющей показательное распределение, математическое ожидание есть величина, обратная параметру λ.

Марковские процессы с непрерывным временем

Рассматривая процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, можно считать, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием простейших потоков событий (потоков вызовов, потоков отказов, потоков восстановлений и т.д.).

Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским.

Марковские процессы с непрерывным временем

Пусть на систему, находящуюся в состоянии S_i, действует простейший поток событий. Как только появится первое событие этого потока, происходит «перескок» системы из состояния S_i в состояние S_j.

λ_{ij} - интенсивность потока событий, переводящий систему из состояния S_i в S_j.

Марковские процессы с непрерывным временем

Пусть рассматриваемая система *S* имеет n возможных состояний $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Вероятность $p_{ij}(t)$ является **вероятностью перехода** из состояния *i* в состояние *j* за время *t*.

Вероятность *i* - го состояния $p_i(t)$ - это вероятность того, что в момент времени *t* система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента времени сумма всех вероятностей состояний равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$.

Марковские процессы с непрерывным временем

Для нахождения всех вероятностей состояний $p_i(t)$ как функций времени составляются и решаются дифференциальные уравнения Колмогорова – особого вида уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

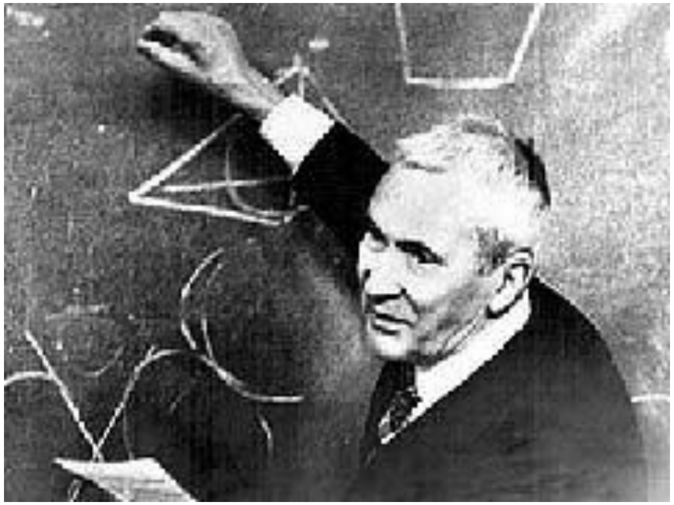
Для переходных вероятностей:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\lambda_{kj}$$

Для безусловных вероятностей:

$$p'_j(t) = \sum_k p_k(t)\lambda_{kj}$$

Колмогоров Андрей Николаевич



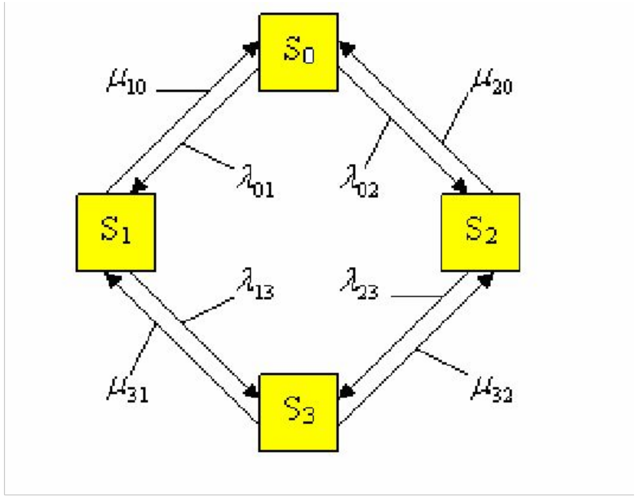
1903-1987

Великий русский математик.

Марковские процессы с непрерывным временем

λ_{ij} - интенсивности потока отказов; μ_{ij} - интенсивности потока восстановлений.

Пусть система находится в состоянии S_0. В состояние S_1 ее переводит поток отказов первого устройства. Его интенсивность равна $\lambda_{01} = 1/T_{ср.раб.1}, ед.времени^{-1}$, где $T_{ср.раб.1}$ - среднее время безотказной работы устройства.

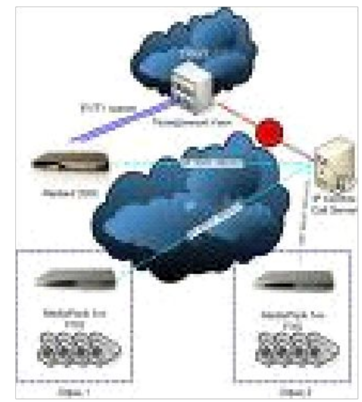


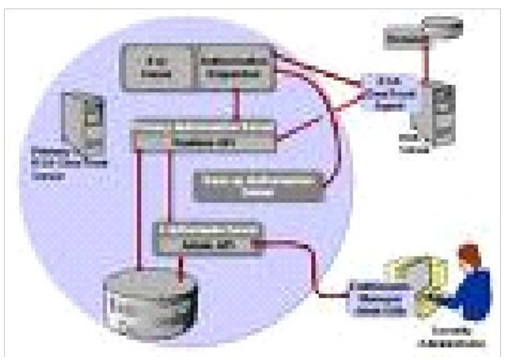
Из состояния S_1 в S_0 систему переводит поток восстановлений первого устройства. Его интенсивность равна $\mu_{10} = 1/T_{ср.рем.1}, ед.времени^{-1}$, где $T_{ср.рем.1}$ - среднее время ремонта первого станка.

Аналогично вычисляются интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем дугам графа.

Системы массового обслуживания

Примеры систем массового обслуживания (СМО): телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы, справочные бюро, станочные и другие технологические системы, системы управления гибких производственных систем, обработка информации серверами и т.д.





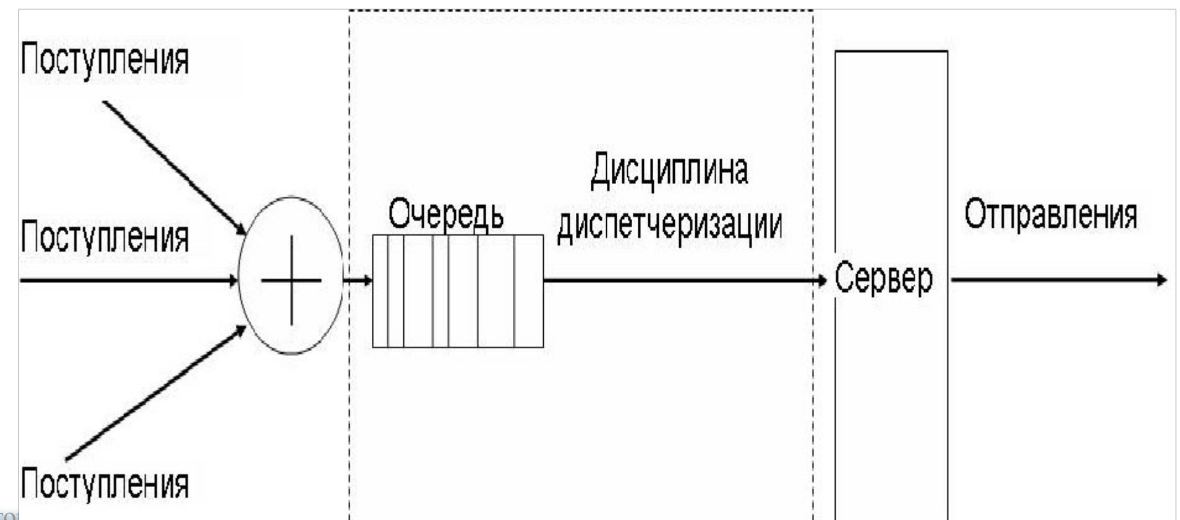
Системы массового обслуживания

СМО состоит из какого – то количества обслуживающих единиц, которые называются каналами обслуживания (это станки, роботы, линии связи, кассиры и т.д.). Всякая СМО предназначена для обслуживания потока заявок (требований), поступающих в случайные моменты времени.

Обслуживание заявки продолжается случайное время, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки.

Системы массового обслуживания

Процесс работы СМО – случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких - то событий (прихода новой заявки, окончания обслуживания, момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).



Системы массового обслуживания

Классификация систем массового обслуживания

1. СМО с отказами;
2. СМО с очередью.

В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшем не обслуживается.

В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, не уходит, а становится в очередь и ожидает возможности быть обслуженной.

СМО с очередями подразделяются на разные виды в зависимости от того, как организована очередь – ограничена или не ограничена. Ограничения могут касаться как длины очереди, так и времени ожидания, «дисциплины обслуживания».

Системы массового обслуживания

Предмет теории массового обслуживания – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими нас характеристиками – показателями эффективности СМО. Эти показатели описывают способность СМО справляться с потоком заявок. Ими могут быть: среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени; среднее число занятых каналов; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания и т.д.

СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ !!!

☺☺☺

Построить граф переходов

0.30	0.70	0.0
0.10	0.60	0.30
0.50	0.50	0.0