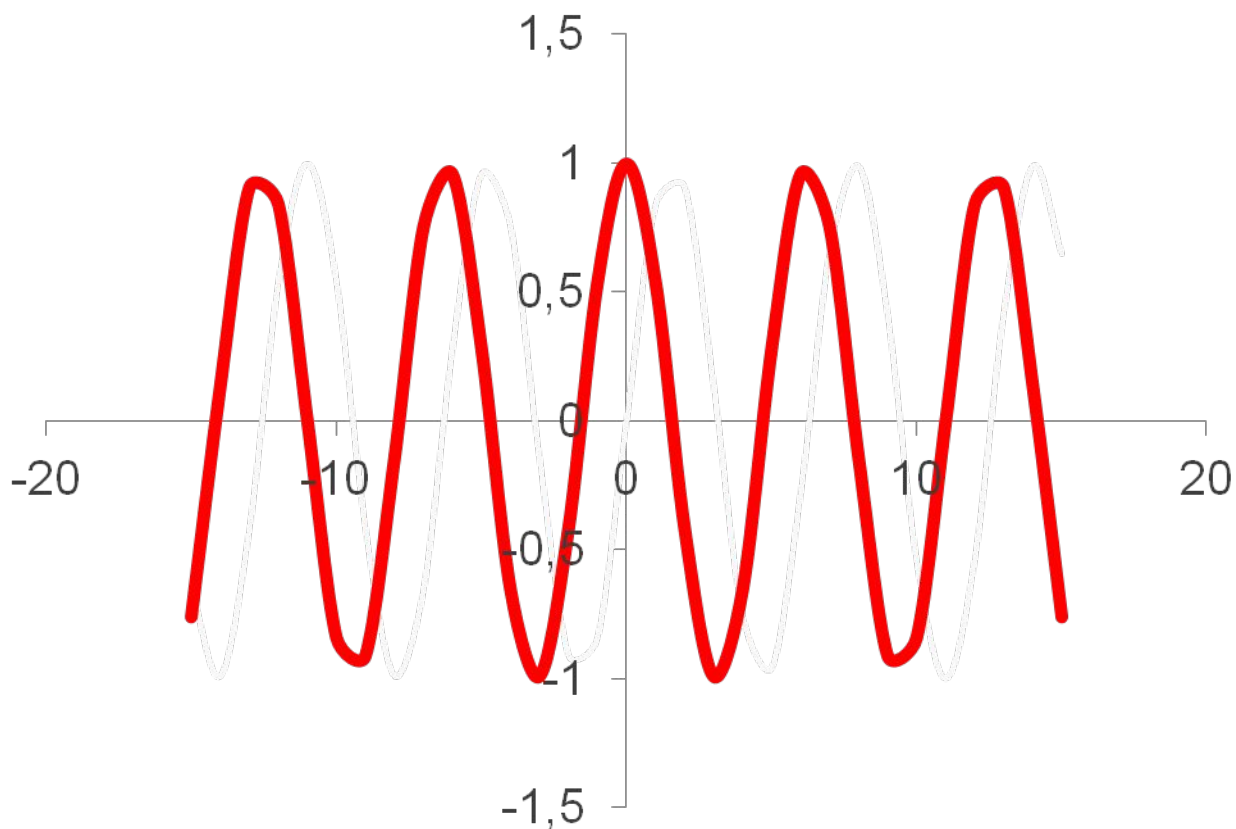


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА

МНОЖЕСТВО – совокупность объектов любой природы, объединенных по какому-либо признаку.

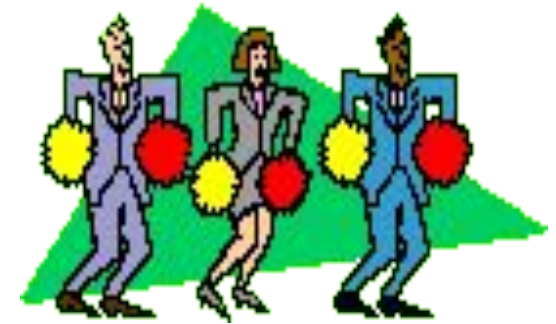
Объекты, составляющие множество, называются элементами этого множества.

Обозначается:

A – множество, a – элемент множества A

$$a \in A, \quad b \notin A$$

ПРИМЕРЫ МНОЖЕСТВ:
Множество студентов
ВУЗа



Множество рыб
в аквариуме



Множество судов
на причале



Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым \emptyset .

Пусть X и Y – два множества.

Между ними возможны следующие отношения:



Если оба множества состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают.

$$X=Y$$



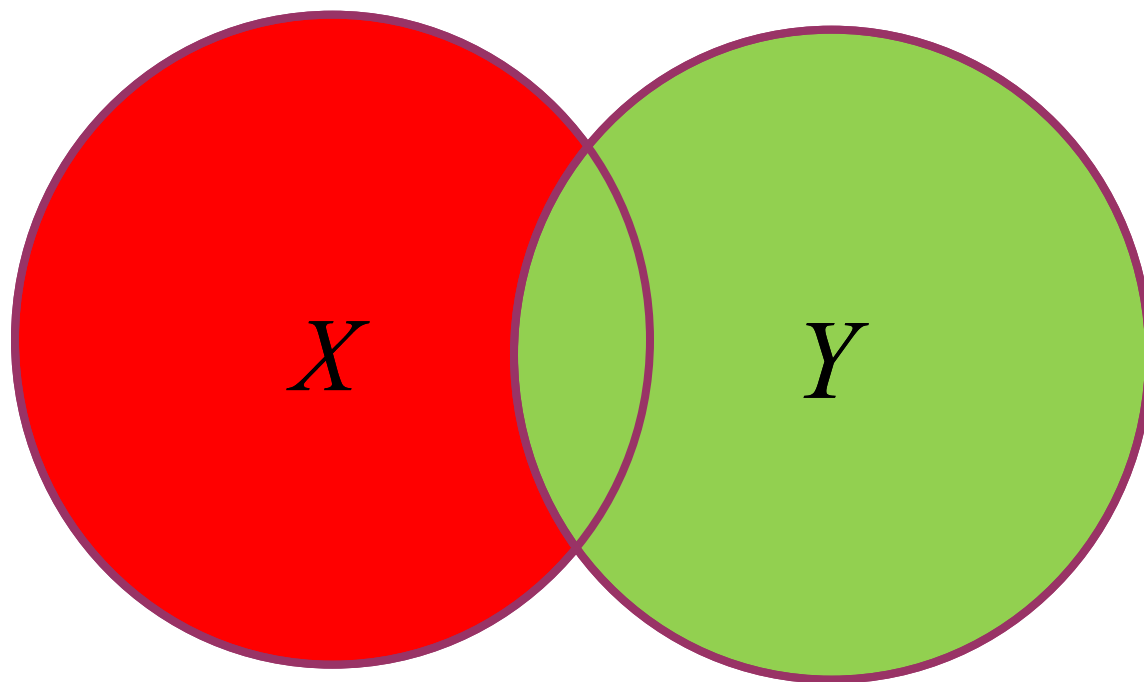
Если все элементы множества X содержатся в Y , то X является подмножеством Y .

$$X \subset Y$$



ОБЪЕДИНЕНИЕМ двух множеств X и Y
называется множество Z ,
состоящее
из всех элементов, принадлежащих
хотя бы одному из данных множеств.

$$Z = X \cup Y$$

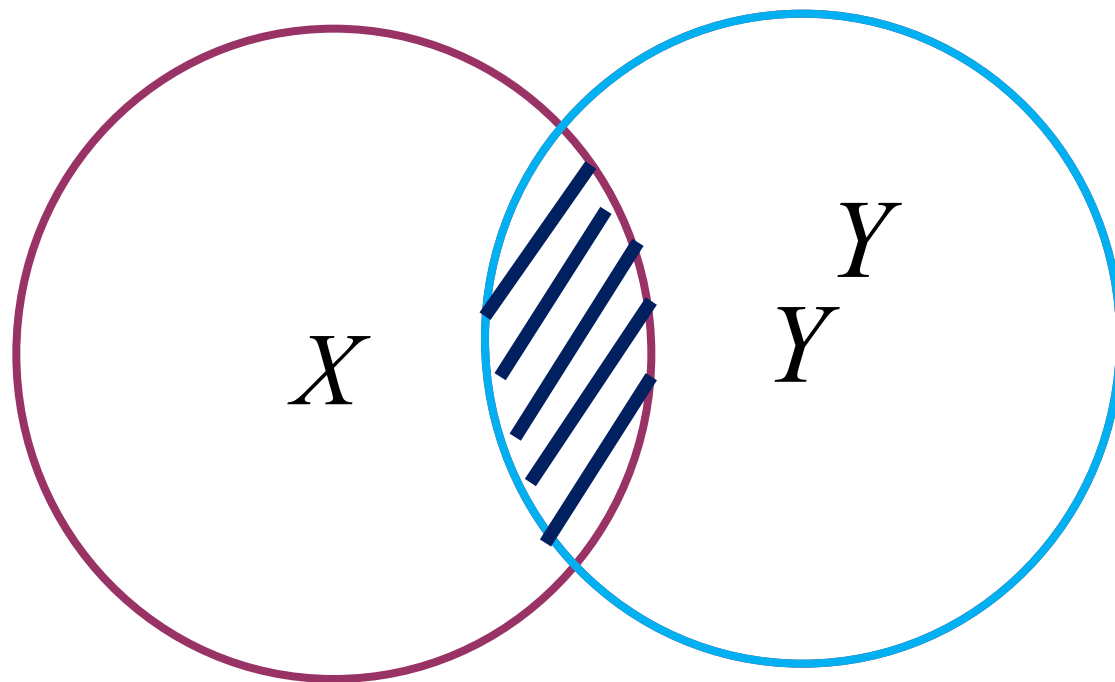


объединение множеств



ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ двух множеств X и Y
называется множество Z ,
состоящее
из всех элементов, одновременно
принадлежащих каждому из данных
множеств.

$$Z = X \cap Y$$

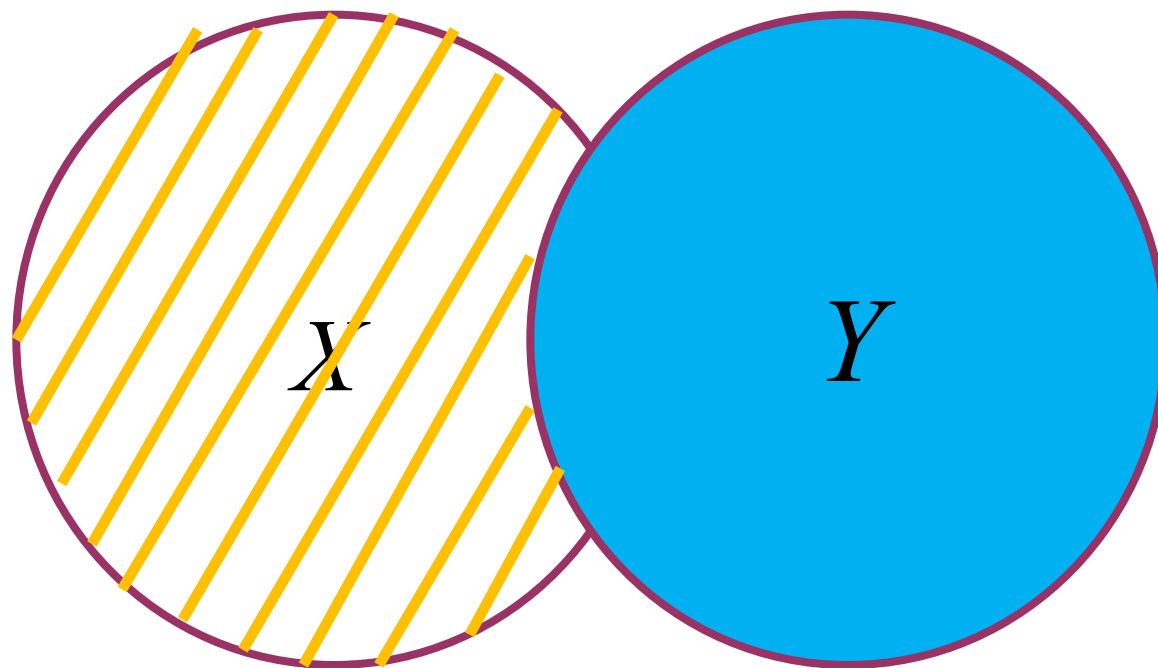


пересечение множеств



РАЗНОСТЬЮ двух множеств X и Y называется множество E , состоящее из всех элементов множества X , которые не принадлежат множеству Y .

$$E = X \setminus Y$$



разность множеств

ПРИМЕР.

Даны множества

$$X=\{2;4;6;8\} \quad Y=\{2;4;5;9\}$$

Найти пересечение, объединение и разность этих множеств.

РЕШЕНИЕ:

$$X \cap Y = \{2;4;5;6;8;9\}$$

$$X \cap Y = \{2;4\}$$

$$X \setminus Y = \{6;8\}$$

ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие определенный элемент y множества Y , то говорят, что на множестве X задана функция

$$y = f(x)$$

Свойства функций

1. Четность

Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любого x

$$f(-x) = f(x)$$

Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если для любого x

$$f(-x) = -f(x)$$

Если оба эти условия не выполняются, то функция называется функцией общего вида.

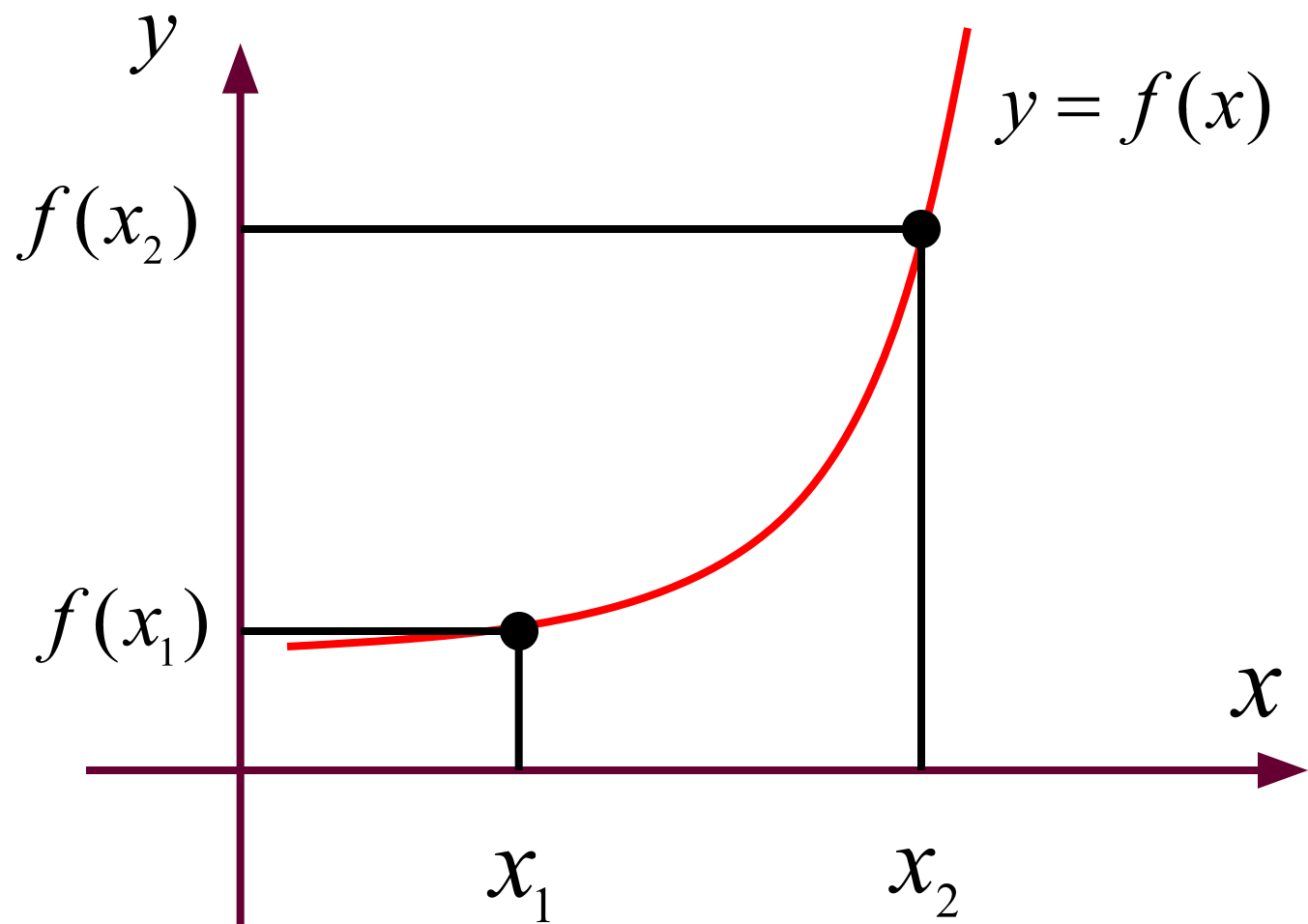
График четной функции симметричен относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

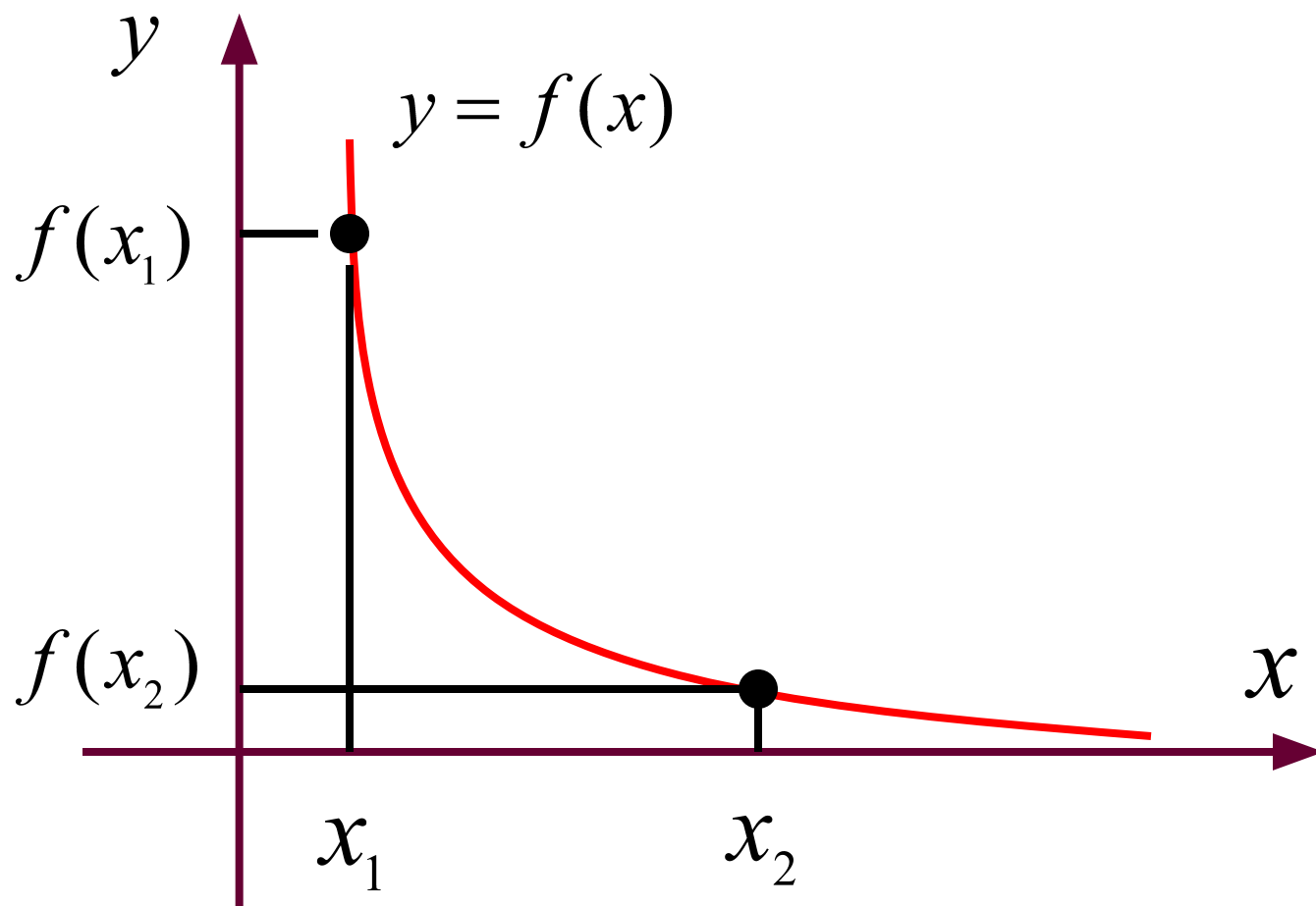
2.

Монотонность

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.



$f(x_2) > f(x_1)$ - функция возрастает



$f(x_2) < f(x_1)$ - функция убывает

3. Периодичнос ть

Функция $y=f(x)$ называется периодичной с периодом T , не равным нулю, если для любого x выполняется равенство:

$$f(x + T) = f(x)$$

Например:

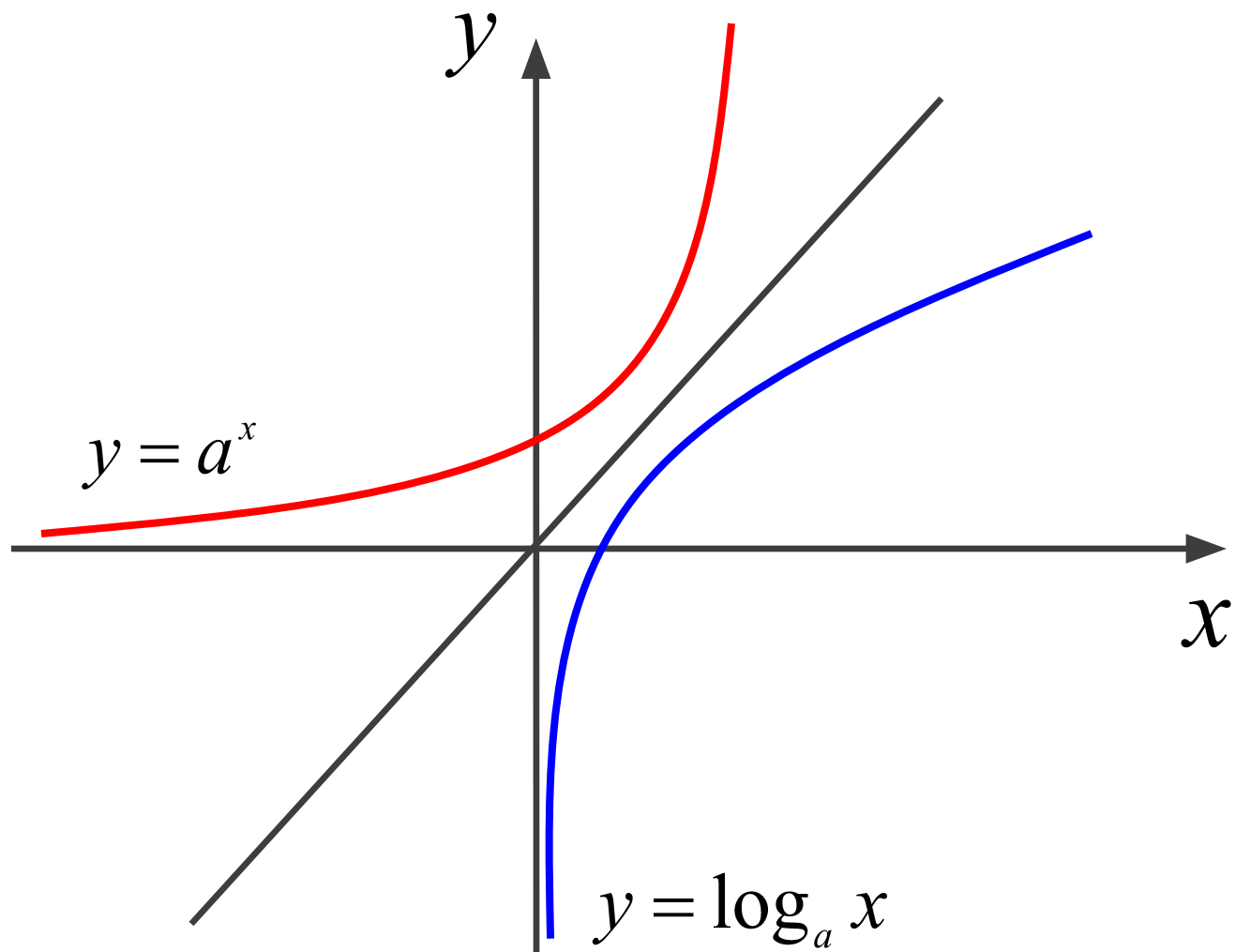
$$y = \cos x$$

**-периодичная с периодом, равным 2π , т.к. для
любого x**

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Функция $x=\varphi(y)$ определенная на множестве Y с областью значений X , называется обратной к функции $y=f(x)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число a_n , то говорят, что задана числовая последовательность

$$\{a_n\} = a_1, a_2 \dots a_n$$

Числа $a_1, a_2 \dots a_n$ называются членами последовательности, а число a_n называется общим членом или n -ым членом данной последовательности.

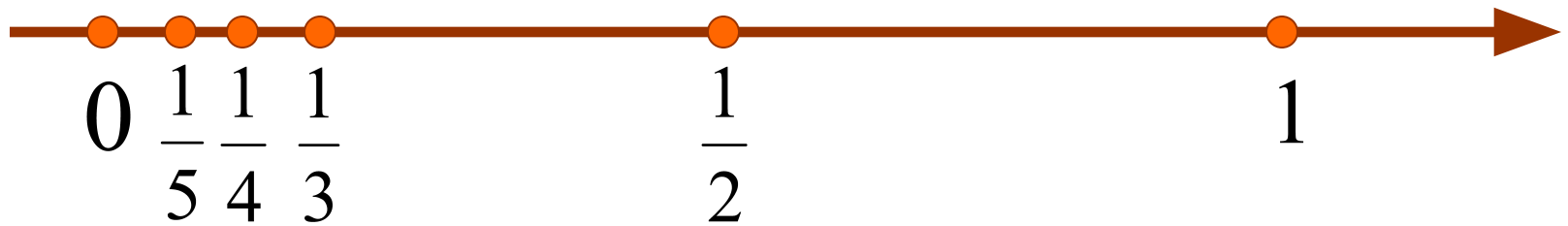
Например:

1 $2, 4, 6, 8 \dots 2n \dots$

2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots$

Изобразим члены последовательности точками на числовой оси.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \frac{1}{n} \dots$$



Можно заметить, что члены последовательности с ростом n сколь угодно близко приближаются к нулю.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (m), что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству:

$$a_n \leq M$$

$$a_n \geq m$$

*Последовательность $\{a_n\}$ называется
ограниченной, если она ограничена
сверху и снизу:*

$$m \leq a_n \leq M$$

Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N , что при всех $n > N$, выполняется неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

ПРИМЕР.

Дана последовательность

3

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \dots$$

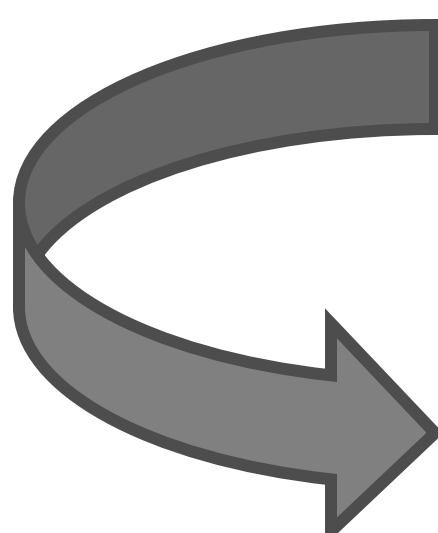
*Показать, что предел этой
последовательности
равен 1.*

РЕШЕНИЕ:

Пусть $\varepsilon=0.1$

Тогда неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$

примет вид:


$$\left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) - 1 \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n} < 0.1 \quad \Rightarrow \quad n > 10$$

Если $\varepsilon=0.01$, то неравенство выполняется при

$$n > 100$$

Для любого $\varepsilon > 0$, неравенство выполняется при

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n = \frac{1}{\varepsilon}$

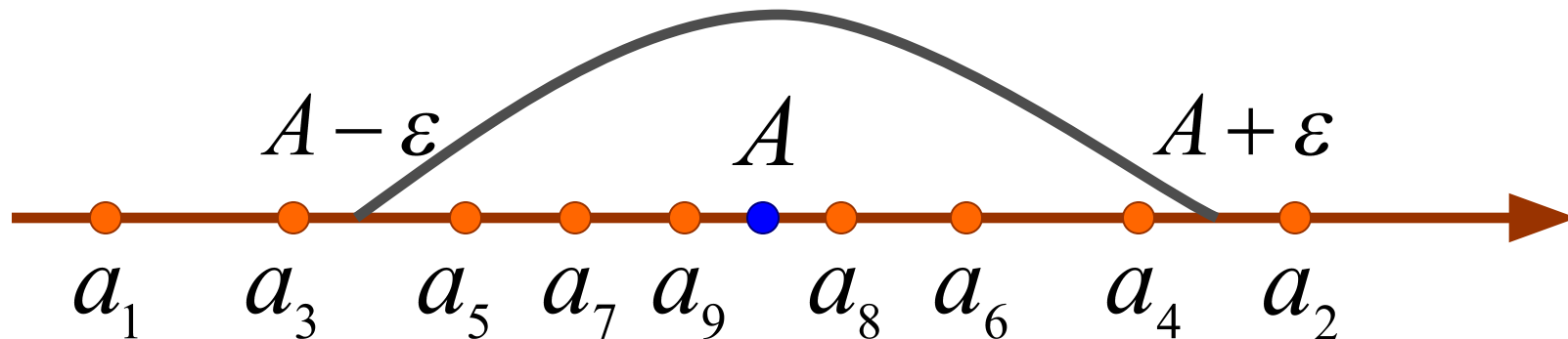
Что для всех $n > N$, выполняется неравенство:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Рассмотрим геометрический смысл предела числовой последовательности. Для этого изобразим члены последовательности (3) точками на числовой оси.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad a_5 = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = \frac{7}{6}, \quad a_7 = \frac{6}{7}, \quad a_8 = \frac{9}{8}, \quad a_9 = \frac{8}{9}, \dots$$



Неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$

равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

которое соответствует попаданию членов
последовательности в ε – окрестность точки A .

Число A называется пределом
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ
функции

$y=f(x)$, при x стремящемся
к бесконечности,

если для любого, сколь угодно малого
числа

$\varepsilon > 0$, найдется такое положительное
число

S , что при всех $|x| > S$, выполняется
 $|f(x) - A| < \varepsilon$ неравенство: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$

Рассмотрим геометрический смысл этого определения.

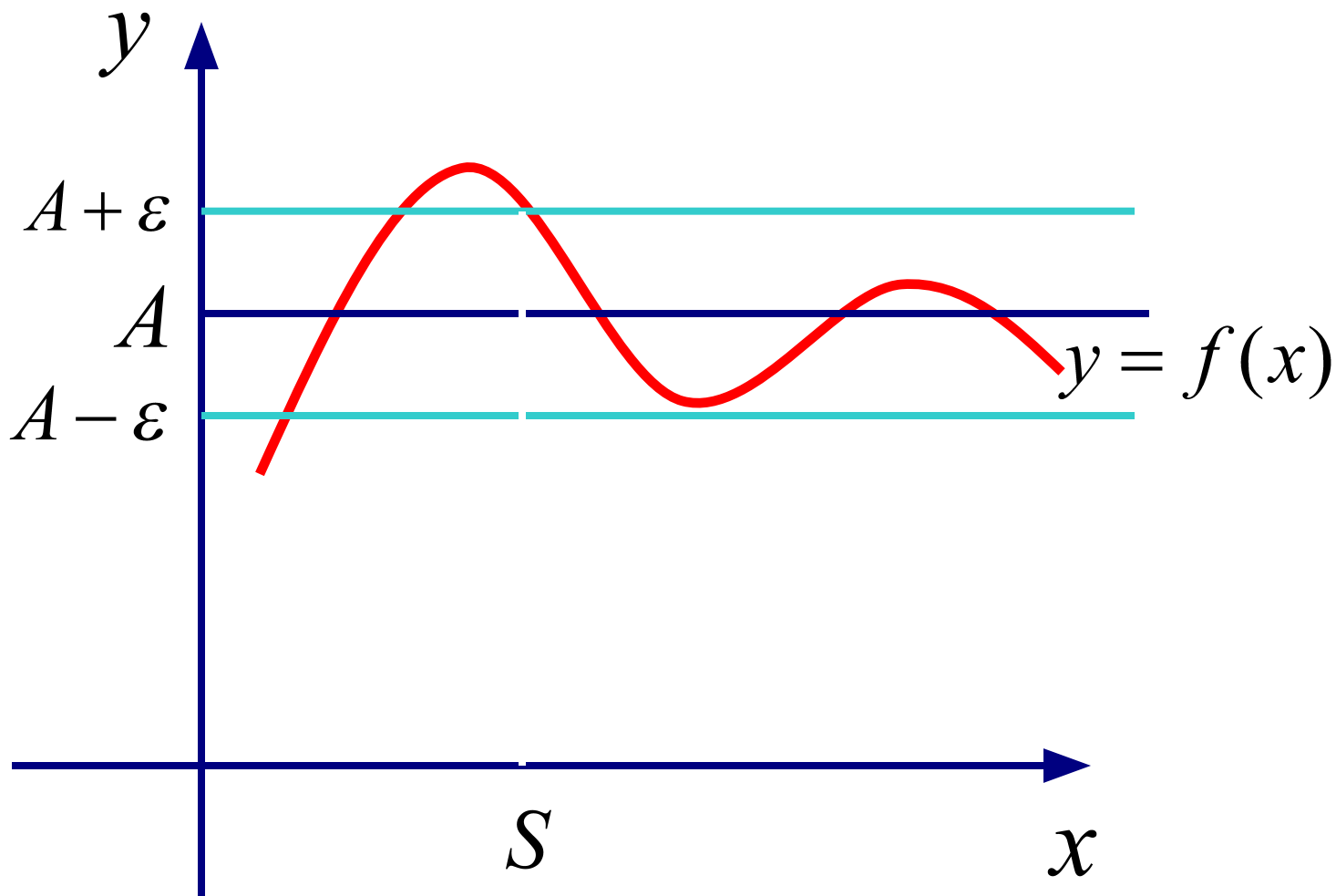
Неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

что соответствует расположению части графика $y=f(x)$ в полосе шириной 2ε .



функции

*$y=f(x)$, при $x \rightarrow x_0$ (или в
точке x_0)*

*если для любого, сколь угодно
малого числа*

$\varepsilon > 0$, найдется такое

положительное число

δ , что при всех $|x-x_0| > \delta$,

выполняется

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

неравенства

