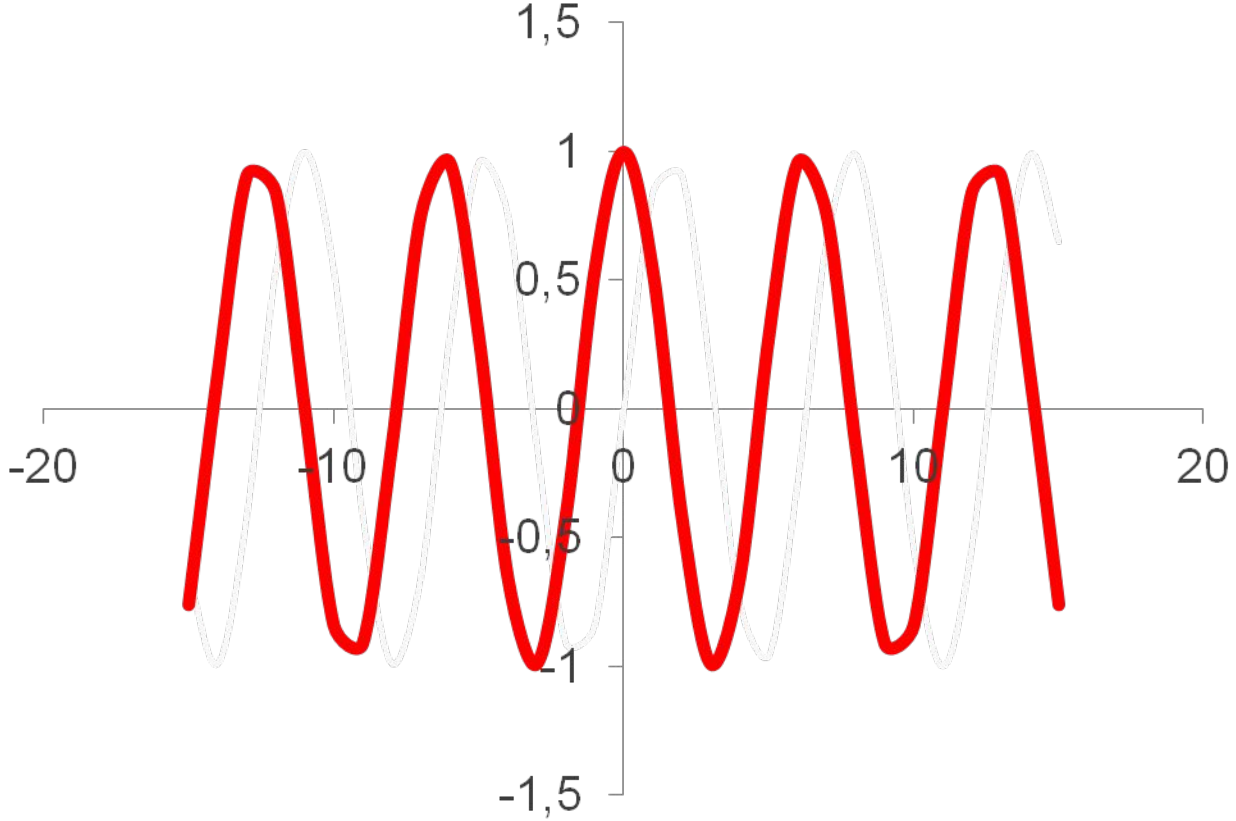
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



МНОЖЕСТВО – совокупность объектов любой природы, объединенных по какому-либо признаку.

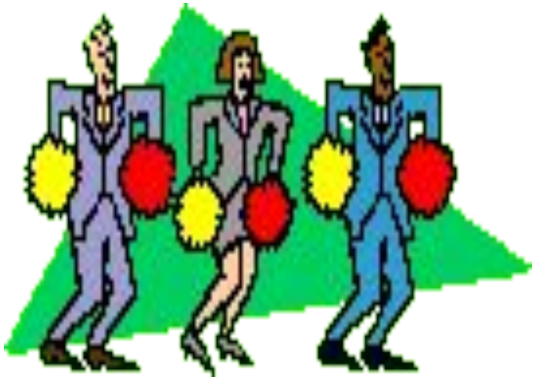
Объекты, составляющие множество, называются элементами этого множества.

Обозначается:

A **– множество,** ***a*** **– элемент множества** ***A***

$$a \in A, \quad b \notin A$$

***ПРИМЕРЫ МНОЖЕСТВ*:**



Множество студентов *ВУЗа*

Множество рыб в аквариуме

Множество судов на причале

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым $\emptyset$.

Пусть *Х* и *У* – два множества.

Между ними возможны следующие отношения:

1

Если оба множества состоят из одних и тех же элементов, то они совпадают.

Х=У

2

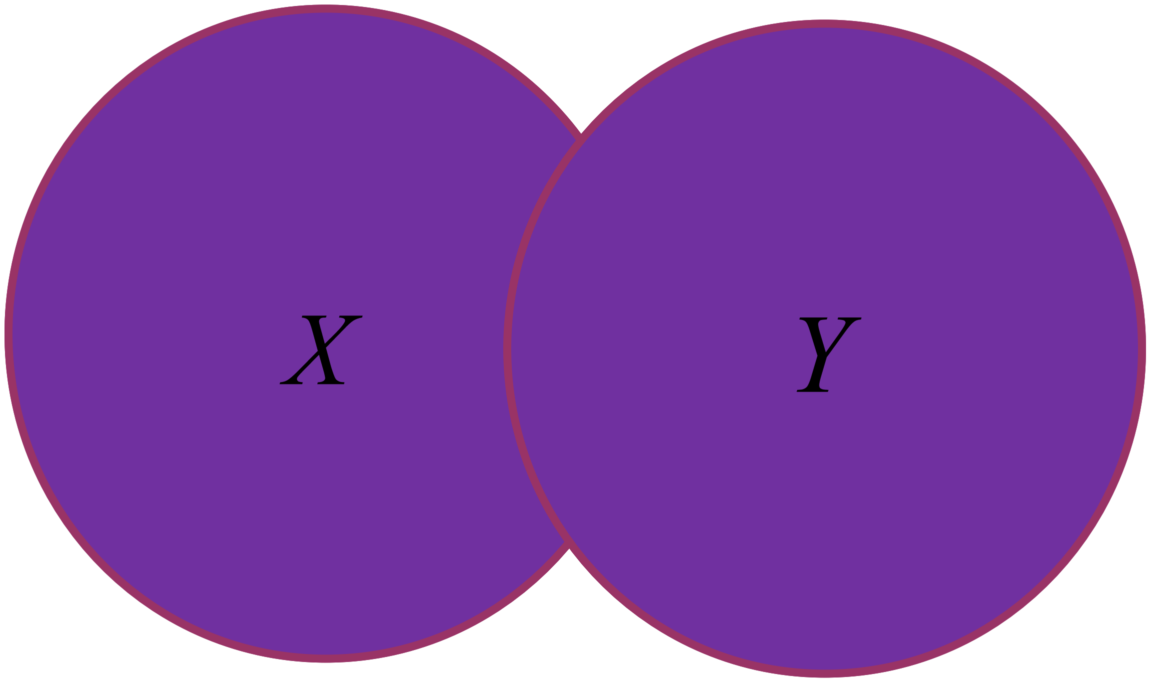
Если все элементы множества Х содержатся в У, то Х является подмножеством У.

$$X \subset Y$$

3

ОБЪЕДИНЕНИЕМ *двух множеств X и У*
называется множество Z, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.

$$Z = X \cup Y$$

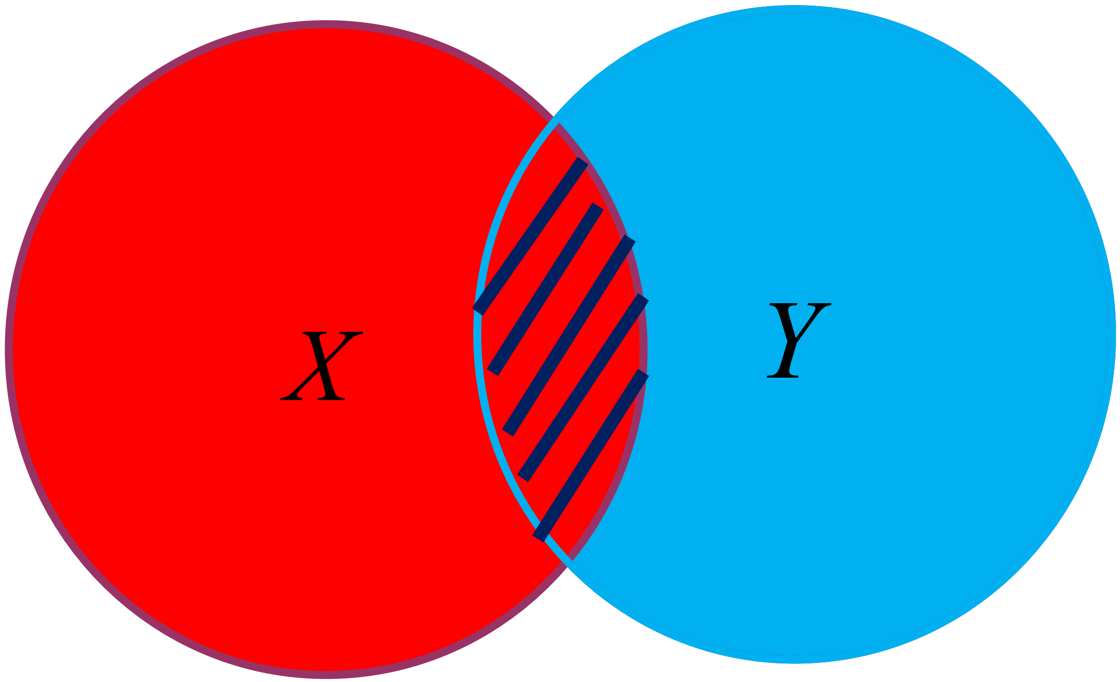


объединение множеств

4

***ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ двух множеств Х и У* называется множество Z, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств.**

$$Z = X \cap Y$$

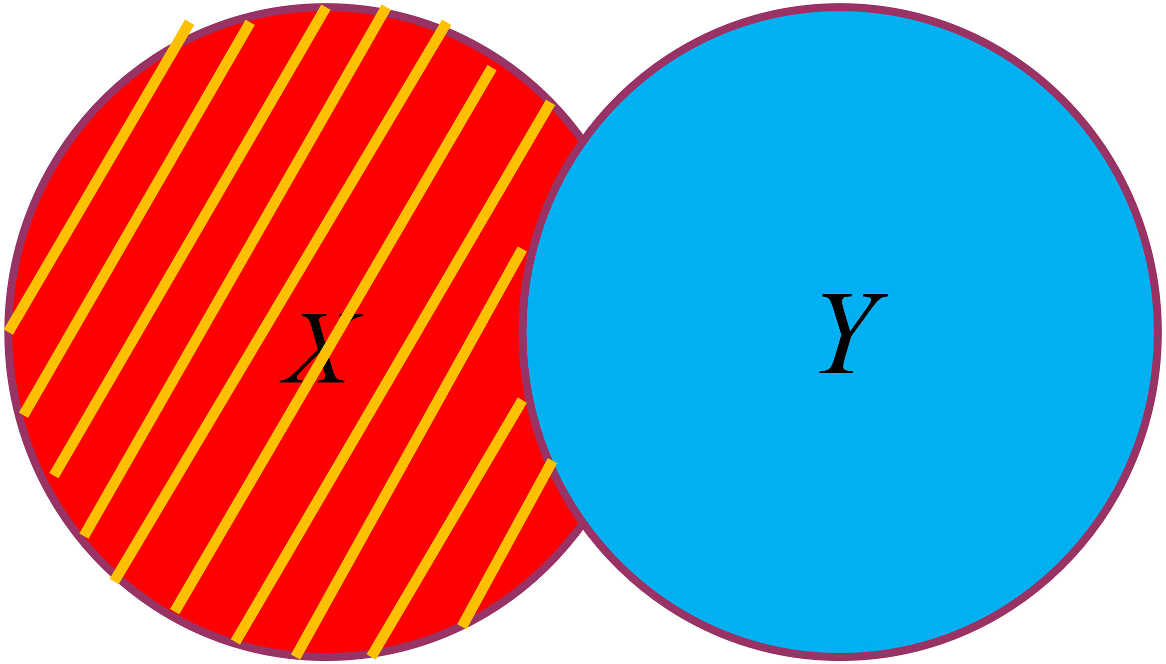


пересечение множеств

5

РАЗНОСТЬЮ двух множеств Х и У называется множество Е, состоящее из всех элементов множества Х, которые не принадлежат множеству У.

$$E = X \setminus Y$$



разность множеств

ПРИМЕР.

Даны множества

X={2;4;6;8} Y={2;4;5;9}

Найти пересечение, объединение и разность этих множеств.

РЕШЕНИЕ:

$$X \cup Y = \{2;4;5;6;8;9\}$$

$$X \cap Y = \{2;4\}$$

$$X \setminus Y = \{6;8\}$$

ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Если каждому элементу х множества Х ставится в соответствие определенный элемент у множества У, то говорят, что на множестве Х задана функция

$$y = f(x)$$

Свойства функций

1. Четность

Функция y=f(x) называется <u>четной</u>, если для любого x

$$f(-x) = f(x)$$

Функция y=f(x) называется <u>нечетной</u>, если для любого x

$$f(-x) = -f(x)$$

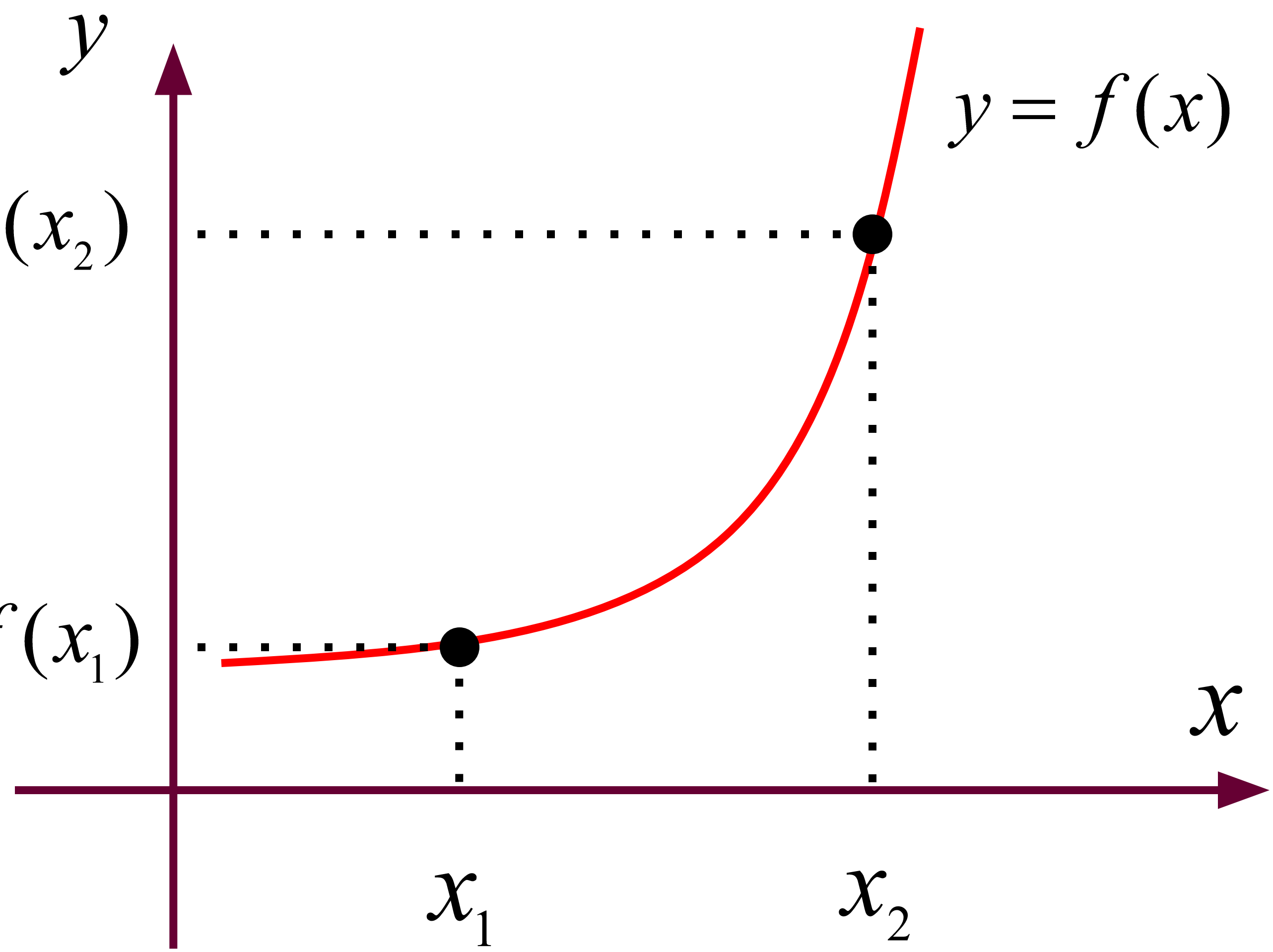
Если оба эти условия не выполняются, то функция называется функцией общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

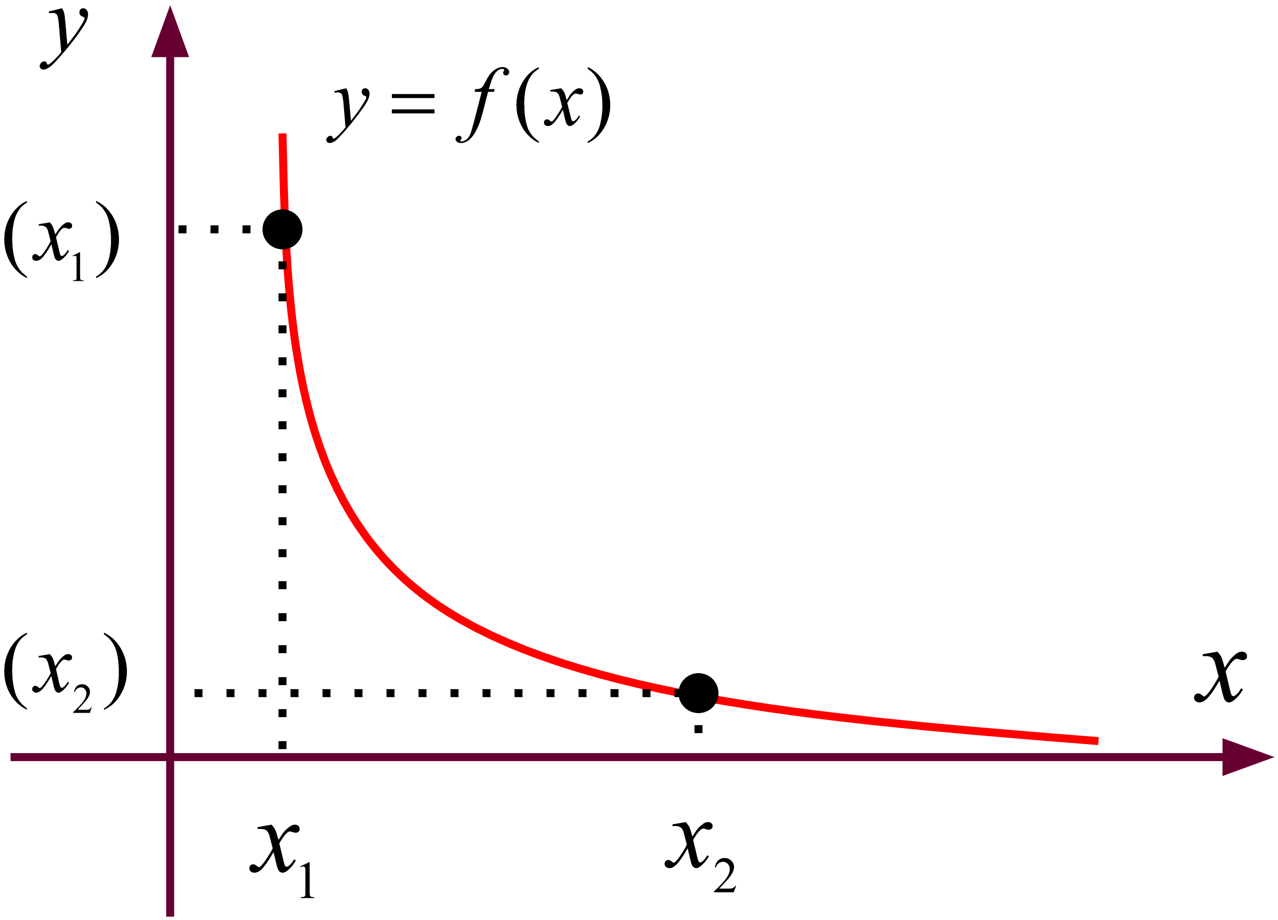
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2. Монотоннос ть

Функция y=f(x) называется <u>возрастающей</u> (убывающей) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.



$f(x_2) > f(x_1)$ - **функция возрастает**



$f(x_2) < f(x_1)$ - **функция убывает**

3. Периодичность

Функция y=f(x) называется <u>периодичной</u> с периодом Т, не равным нулю, если для любого х выполняется равенство:

$$f(x+T)=f(x)$$

Например:

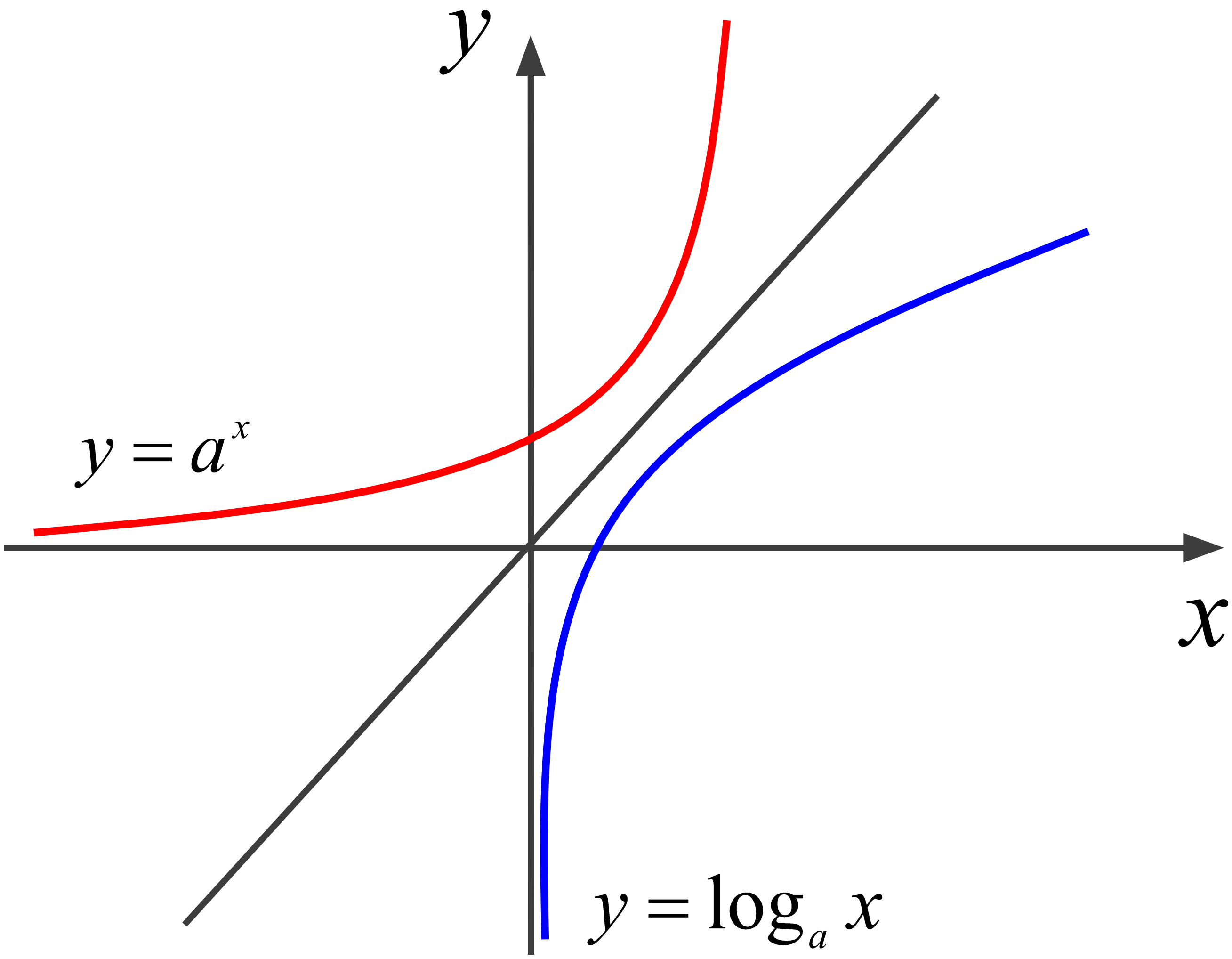
$$y = \cos x$$

-периодичная с периодом, равным *2П*, т.к. для любого *x*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Функция $x=\varphi(y)$ определенная на множестве У с областью значений Х, называется <u>обратной</u> к функции $y=f(x)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.


y
x
$y = a^x$
$y = \log_a x$

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставлено в соответствие определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность

$$\{a_n\} = a_1, a_2 \ldots a_n$$

Числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ называются членами последовательности, а число a_n называется общим членом или n-ым членом данной последовательности.

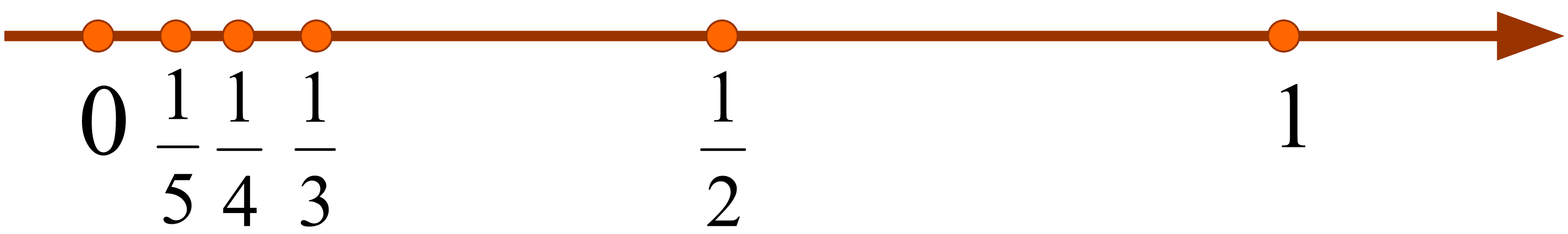
Например:

1 $2,4,6,8 \ldots 2n \ldots$

2 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots$

Изобразим члены последовательности точками на числовой оси.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n} \ldots$$



Можно заметить, что члены последовательности с ростом *n* сколь угодно близко приближаются к нулю.

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число M (m), что любой элемент этой последовательности удовлетворяет неравенству:

$$a_n \le M$$

$$a_n \ge m$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу:

$$m \le a_n \le M$$

Число А называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, найдется такой номер N, что при всех $n>N$, выполняется неравенство:

$$\left|a_n - A\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

<u>ПРИМЕР.</u>

Дана последовательность

3

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \ldots$$

Показать, что предел этой последовательности равен 1.

РЕШЕНИЕ:

Пусть $\varepsilon = 0.1$

Тогда неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$

примет вид:

$$\left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{n} < 0.1 \quad \Rightarrow \quad n > 10$$

Если *ε=0.01*, то неравенство выполняется при

$$n > 100$$

Для любого *ε* >0, неравенство выполняется при

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Т.е. для любого *ε* >0 существует номер $n = \frac{1}{\varepsilon}$

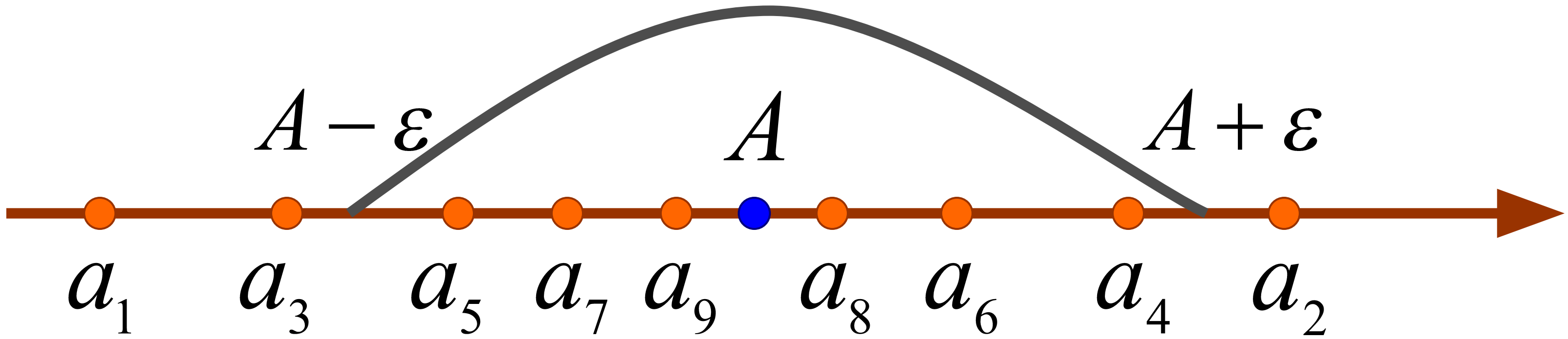
Что для всех *n*>*N*, выполняется неравенство:

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Рассмотрим геометрический смысл предела числовой последовательности. Для этого изобразим члены последовательности (3) точками на числовой оси.

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{5}{4},\ a_5 = \frac{4}{5}$$

$$a_6 = \frac{7}{6},\ a_7 = \frac{6}{7},\ a_8 = \frac{9}{8},\ a_9 = \frac{8}{9},\ldots$$



Неравенство $\left|a_n - A\right| < \varepsilon$

равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

которое соответствует попаданию членов последовательности в ε – окрестность точки A.

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Число А называется пределом функции
y=f(x), при x стремящемся к бесконечности,
если для любого, сколь угодно малого числа
ε>0, найдется такое положительное число
S, что при всех |x|>S, выполняется неравенство:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

Рассмотрим геометрический смысл этого определения.

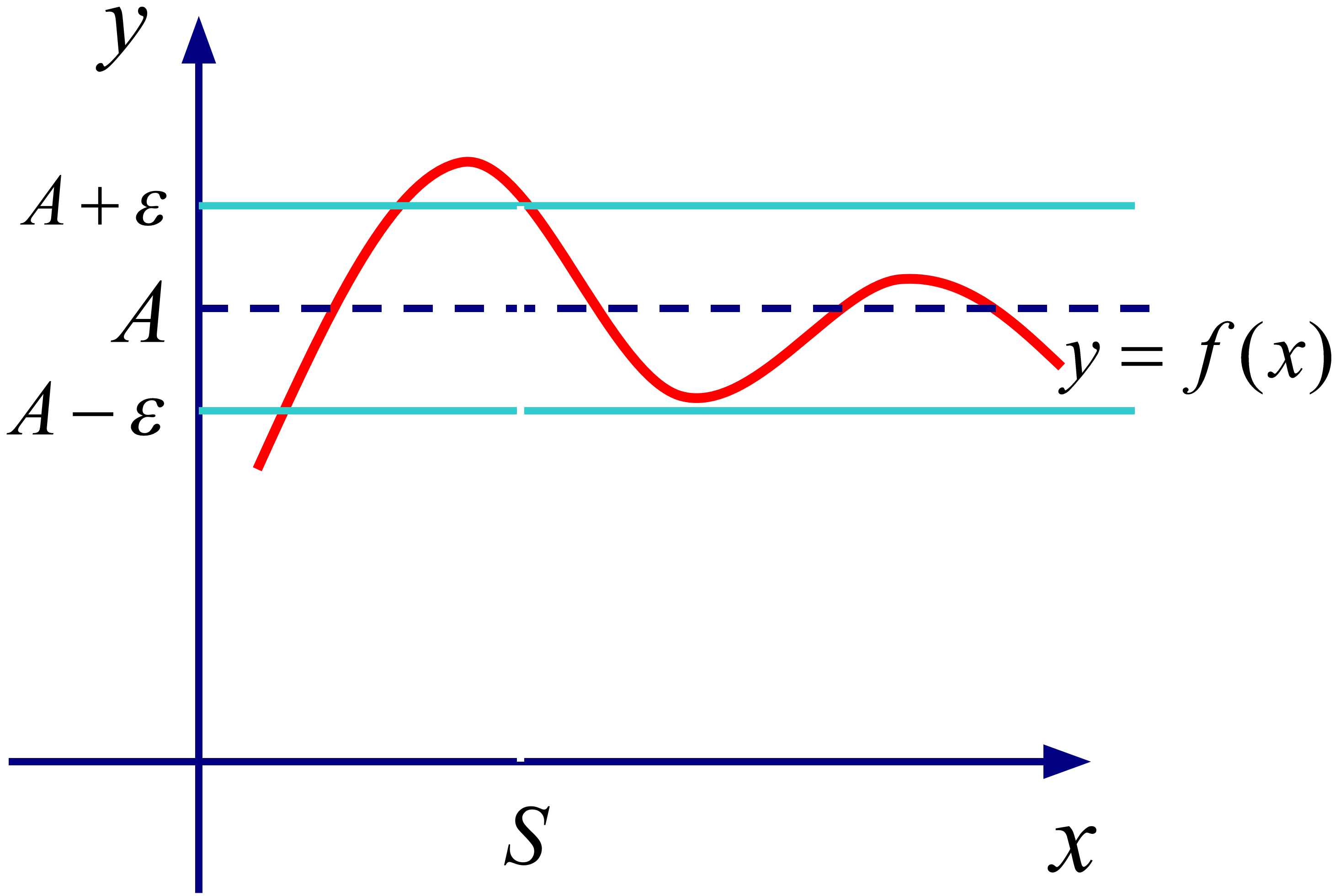
Неравенство

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

что соответствует расположению части графика *y=f(x)* в полосе шириной *2ε*.

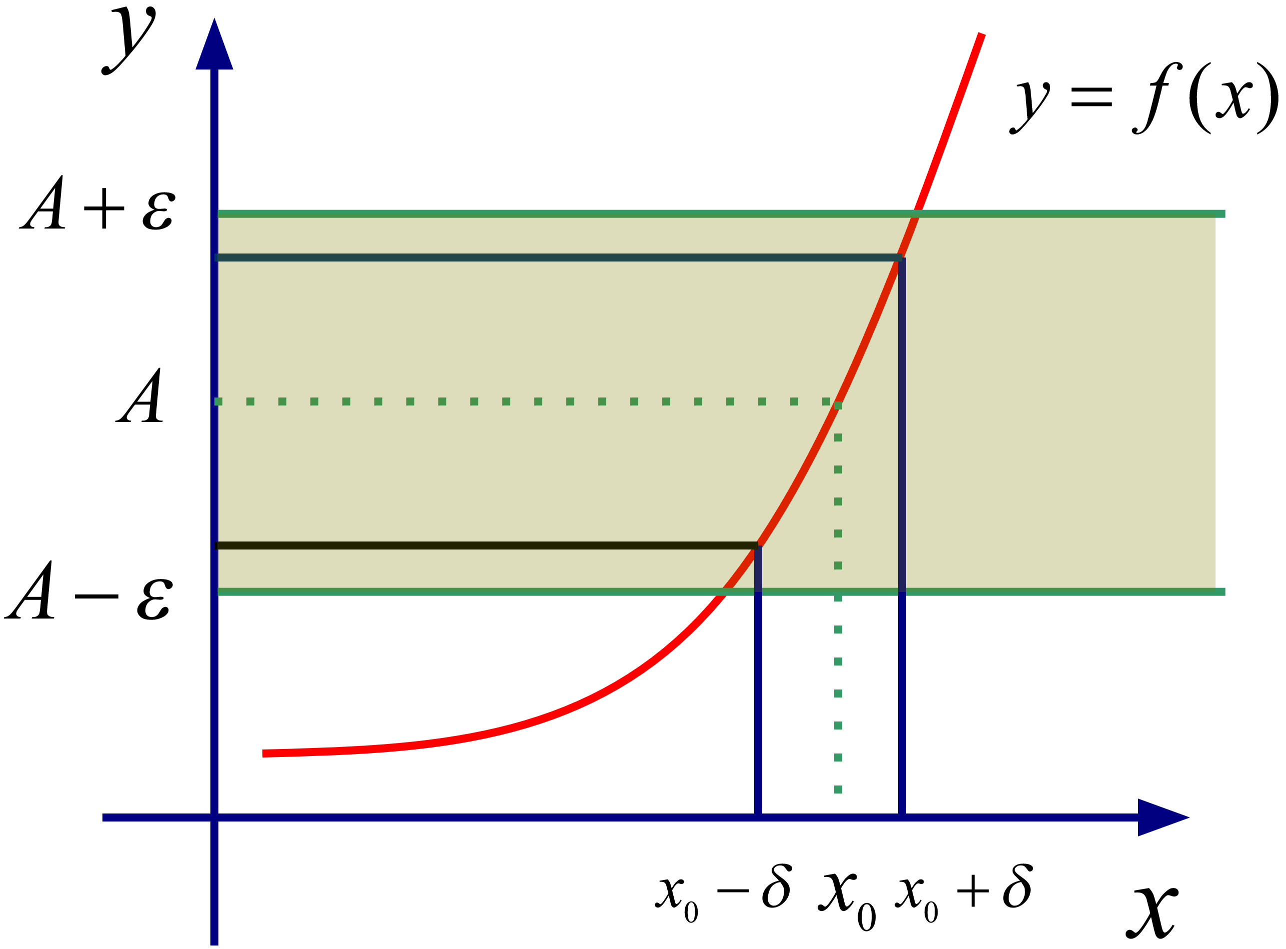

y
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
$y=f(x)$
S
x

Число А называется пределом функции

y=f(x), при $x \to x_0$, (или в точке x_0)

если для любого, сколь угодно малого числа ε>0, найдется такое положительное число δ, что при всех $|x-x_0|> \delta$, выполняется неравенство:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)=A$$


y
$y = f(x)$
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$
x