БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

Физико-технический институт

Кафедра телекоммуникаций

Александр Васильевич Колесников

доктор технических наук, профессор

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Курс лекций для студентов 2 курса бакалавриата по направлению «Информационные системы и технологии» 230201.65.00.05

Калининград, 2015

АКАДЕМИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ «БАКАЛАВР»

Бакалавр (от латинского «*baccalarius*» – «молодой человек») – первая академическая степень в многоуровневой структуре высшего профессионального образования.

В России эта ступень подготовки введена в 1993 году. С 31 декабря 2010 года «бакалавр» и «магистр» - основные квалификациями для поступающих в российские вузы. Таким образом, степень «бакалавр» – это законченное базовое высшее образование.

Нормативный срок обучения составляет 4 года для очной формы обучения. Квалификация (степень) бакалавра присваивается после сдачи выпускных экзаменов и защиты выпускной работы.

Диплом бакалавра даёт право на работу по специальности и (или) поступление в магистратуру. В отличие от подготовки специалистов программы бакалавриата подразумевают широкопрофильное обучение. Другими словами, бакалавры получают фундаментальное образование без узкой специализации.

АКАДЕМИЧЕСКАЯ СТЕПЕНЬ «БАКАЛАВР»

Прикладной и академический бакалавриат:

Критерии	Прикладной бакалавриат	Классический (академический) бакалавриат
Основная задача	Подготовка практико-ориентированных работников к практической деятельности в реальной экономике и бизнесе	Подготовка научных работников к научно-исследовательской и аналитической деятельности теоретико-методического характера
Срок обучения	4 года	4 года
Доля практического и практико-ориентированного обучения	50% времени, отведенного на обучение (включая лабораторные и практические занятия, учебную и производственную практику)	20% времени, отведенного на обучение (включая научно-исследовательскую работу)
Связи с работодателями	Обязательно участие партнеров-работодателей в формировании учебных планов, программ, в проведении лабораторных и практических занятий, учебной и производственной практик	Возможно участие партнеров- работодателей при организации производственнойпрактики
Документ об окончании курса	Государственный диплом прикладного бакалавра	Государственный диплом бакалавра
Возможность продолжения обучения в магистратуре	Возможно поступление в магистратуру на основе конкурсного отбора	Возможно поступление в магистратуру на основе конкурсного отбора

ПОНЯТИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Образовательная программа — согласно Федеральному закону № 273 от 29 декабря 2012 года «Об образовании в Российской Федерации» комплекс основных характеристик образования (объем, содержание, планируемые результаты), организационно-педагогических условий и в случаях, предусмотренных настоящим Федеральным законом, форм аттестации, который представлен в виде учебного плана, календарного учебного графика, рабочих программ учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей), иных компонентов, а также оценочных и методических материалов.

ЛИТЕРАТУРА

В.Ф. Пономарев. Математическая логика. Часть 1. Логика высказываний. Логика предикатов. Учебное пособие – Калининград: КГТУ, 2001.

В.Ф. Пономарев. Дискретная математика для инженеров: Учебное пособие.- М.: Горячая линия –Телеком, 2009.

Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин.-2-е изд., стер.- М.: Издательский центр «Академия», 2008.

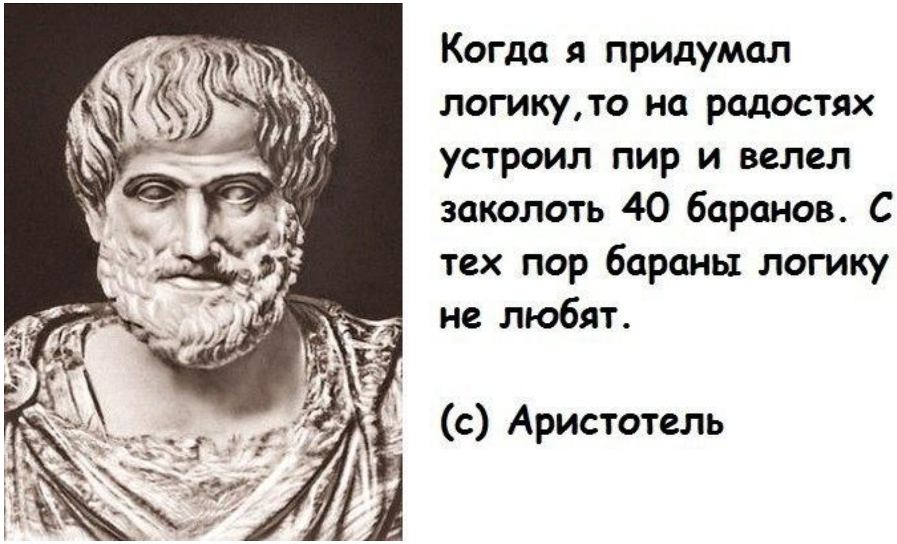
Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Игошин.-3-е изд., стер.- М.: Издательский центр «Академия», 2007.

РОЛЬ И МЕСТО ЛОГИКИ В МЫШЛЕНИИ, В НАУКЕ, В МАТЕМАТИКЕ И В ОБУЧЕНИИ

Логическое (дедуктивное) мышление – от истинных посылок всегда приводит к истинному заключению, не опираясь при этом на опыт и интуиции . Логическое мышление протекает на уровне сознания.

Интуиция (от лат. *intutio* – «пристальное всматривание») – способность постижения истины прямым усмотрением без логически строгого доказательства. Интуитивное мышление протекает на подсознательном уровне.

ЛОГИКА ТРАДИЦИОННАЯ



Логика (от греч. λογοζ (логос, смысл, слово, понятие) – наука о способах доказательств или опровержений.

Традиционная или формальная логика – наука, берущая свое начало от учения Аристотеля и изучающая формы и законы мышления, а также методы рассуждений людей.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Математическая (символьная, теоретическая) логика – применила математические методы для изучения общих структур (форм) правильного мышления и оформилась как раздел математики.

Немецкий ученый
Готфрид Лейбниц
(1646 – 1716)

Готфрид Лейбниц заложил основы математической логики. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике). Он предложил использовать символы вместо слов. Поставил задачи по созданию символьной логики.

Англичанин, математик-
самоучка
Джорж Буль
(1815 – 1864)

Джорж Буль создал Булеву алгебру или алгебру высказываний. В его работах логика обрела свой алфавит,, свою орфографию и грамматику.

Значительный вклад в развитие математической логики внесли советские математики: Н.А. Васильев, И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков, А.А. Марков, А.И. Мальцев, С.А. Яновская.

ОБЛАСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Математическая логика включает: теорию моделей, теорию доказательств и теория алгоритмов.

Теория моделей — изучает фундаментальные взаимосвязи между *синтаксисом* и *семантикой*. Название «теория моделей» было впервые предложено Альфредом Тарским в 1954 году. Основное развитие теория моделей получила в работах Тарского, Мальцева и Робинсона.

Теория доказательств – раздел математической логики, в котором само понятие математического доказательства становится предметом изучения. Математики обосновывают свои теоремы путём предъявления их доказательства (алгебра высказываний, булевы функции, логика (исчисление) высказываний, логика предикатов).

Теория алгоритмов — раздел математической логики, изучающий общие свойства алгоритмов, вычисляемых с их помощью функций, а также разнообразные модели вычислений.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Алгебра высказываний (логики) – раздел теории доказательств, изучающий высказывания и логические операции над ними.

Высказывание – важнейший объект изучения математической логики, это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Иными словами утверждение об истинности или ложности высказывания должно иметь смысл. Высказывание не должно одновременно быть истинным и ложным. Истинность или ложность, приписываемые некоторому утверждению, называются его значением истинности, или истинностным значением.

Примеры высказываний: подстанция работает в нормальном режиме, авария на линии электропередач, температура в помещении выше нормы, короткое замыкание в сети.

***Примеры предложений не являющихся высказываниями*:** фамилия диспетчера? (вопрос); прочтите инструкцию дежурного диспетчер (приказ или восклицание); все что вы говорите - неправда (внутренне противоречивое утверждение).

ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Например, предложение:

«3 - простое число» является истинным,

«3.14… - рациональное число" является ложным;

"Колумб открыл Америку" является истинным,

"Киев - столица Узбекистана" является ложным;

“число 6 делится на 2 и 3” является истинным,

“сумма чисел 2 и 3 равна 6” является ложным.

Такие высказывания называют простыми или ***элементарными***.

При формальном исследовании сложных текстов понятие “простые высказывания” замещают понятием “***пропозициональные переменные***”, которые обозначают прописными буквами латинского алфавита “A”, “B”, “C”,…

Истинность или ложность высказывания будем отмечать символами “и” – истина или “л” – ложь.

ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Пример:

если A_1 := “3 - простое число”, то A_1 = и;
если A_2 := “3 - вещественное число”, то A_2 = и;
если A_3 := “3 - целое число”, то A_3 = и;
если B_1 := “3, 14…- рациональное число”, то B_1 = л;
если B_2 := “3, 14…- не рациональное число”, то B_2 = и;
если C := “Колумб открыл Америку”, то C = и;
если D := “Киев - столица Узбекистана”, то D = л;
если E := “Число 6 делится на 1, 2 и 3”, то E = и;
если G := “Число 6 есть сумма чисел 1, 2, 3”, то G = и.

Примечание: символ “ := ” означает, что пропозициональной переменной, стоящей слева, присвоить значение высказывания, стоящего справа.

СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

Высказывания, которые формируют из простых предложений с помощью грамматических связок “не”, “и”, “или”, “если … , то …”, “… тогда и только тогда, когда …” и т.п., называют ***сложными.***

Для обозначения грамматических связок в формальном языке вводят символы, которые называют ***логическими связками.***

Например, $\vee$: = ”или”, **&** : = “и”, $\rceil$: = ”не”, $\rightarrow$: = “если … , то …”, $\leftrightarrow$: = “… тогда и только тогда, когда.

Для построения более сложных высказываний используют вспомогательные символы “(“, “)” - скобки.

СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

A_1 := “3 - простое число”;
A_2 := “3 - вещественное число”;
A_3 := “3 - целое число”;
B_1 := “3, 14…- рациональное число”;
B_2 := “3, 14…- не рациональное число”;
C := “Колумб открыл Америку”;
D := “Киев - столица Узбекистана”;
E := “Число 6 делится на 1, 2 и 3”;
G := “Число 6 есть сумма чисел 1, 2, 3”.

Пример:

если высказывание: “3 – вещественное и целое число”, то формула $(A_1 \& A_2)$ = и;
если высказывание: “число 6 делится на 1, 2, 3 и представляет сумму делителей 1, 2, 3”, то формула (E&G) = и;
для высказывания: “если 3 - целое число, то оно вещественное”, справедлива формула $(A_3 \rightarrow A_2)$ = и;
для высказывания “3 - простое число тогда и только тогда, когда оно целое”, справедлива формула $(A_1 \leftrightarrow A_2)$ = и.

СЛОЖНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста естественного языка.

Логические связки позволяют сохранять или изменять логическое значение сложного высказывания, относительно простых высказываний. Поэтому логические связки обозначают логические операции над высказываниями. Правила исполнения логических операций над высказываниями формирует ***алгебру высказываний.***

При формальном описании сложного высказывания всегда нужно исходить из его содержания. До тех пор пока не определена логическая структура сложного высказывания, его нельзя формально описывать.

Высказывания, из которых делают вывод новых высказываний, называют ***посылками***, а получаемое высказывание – ***заключением***.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Совокупность пропозициональных переменных T = {A, B, C,…} и логических операций $\boldsymbol{F}$ = { ⌉, &, ∨, →, ↔ } формируют алгебру высказываний:

$$\mathbf{A_в} = < \mathrm{T}, \boldsymbol{F} >.$$

Символы логических операций заданы логическими связками:
⌉ - отрицание, **&** - конъюнкция, ∨ - дизъюнкция, → - импликация, ↔ - эквиваленция.

Сложное высказывание составляемое из элементарных высказываний посредством логических связок, называют ***формулой*** алгебры логики.

Любая пропозициональная переменная есть ***элементарная формула*,** т. е. $A_i = F_i$. Если F_1 и F_2 – формулы, то $⌉F_1$, $⌉F_2$, $(F_1 \& F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$ и $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также формулы. Никаких других формул в исчислении высказываний нет.

Значение формулы полностью определяется значениями входящих в нее пропозициональных переменных.

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логические операции бывают ***унарными*** (одноместными) и ***бинарными*** (двухместными). Это определяется наличием одного или двух операндов. Результаты логических операций также принадлежат множеству {и; л} и их удобно описывать ***таблицами истинности***.

***Отрицание* (⌉ F)** есть одноместная операция, посредством которой ее значение есть отрицание значения операнда.
В программировании для этого используют оператор NOT: (NOT F) истинно тогда и только тогда, когда F ложно.

Если F - высказывание, то ⌉F также высказывание.

Если ⌉F есть высказывание, то ⌉(⌉F) также есть высказывание.

Таблица истинности

F	⌉F
и	л
л	и

Пример: верно ли, что высказывание “A := “4 - простое число” истинно?
Нет, “неверно, что 4 – простое число”. Тогда ⌉ A = и .

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Конъюнкция **(F_1 & F_2)** есть двухместная операция, посредством которой из двух формул F_1 и F_2 получают новую формулу $F = (F_1\&F_2)$, описывающую сложное высказывание.
В программировании для этого используют оператор AND: (F_1_AND_F_2) истинно тогда и только тогда, когда истинны значения двух операндов F_1 и F_2.

Если даны формулы F_1, F_2 ,…, F_n, то формула $F = (F_1\&F_2\&\ldots\&F_n)$ = и тогда и только тогда, когда истинны все формулы F_1, F_2 ,…, F_n.

F_1	F_2	$F_1\&F_2$
л	л	л
л	и	л
и	л	л
и	и	и

На естественном языке эта операция выражается соединительными словами: “...и…“, “...также…“, “как...,так..“, “...несмотря на ...“ и др.
Пример: даны высказывания A := "компьютер содержит основной микропроцессор", B := "компьютер содержит оперативную память", C := ” компьютер содержит контроллеры"; D := "компьютер содержит порты ввода - вывода". Тогда формула F = (A&B&C&D) отражает высказывание "компьютер содержит основной микропроцессор, оперативную память, контроллеры и порты ввода-вывода".

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
ДИЗЪЮНКЦИЯ

Дизъюнкция **($F_1 \vee F_2$)** есть двухместная операция, посредством которой из двух формул F_1 и F_2 получают новую формулу $F = (F_1 \vee F_2)$, описывающую сложное высказывание.
В программировании для этого используют оператор OR: (F_1_*OR*_F_2) ложно тогда и только тогда, когда ложны значения двух операндов F_1 или F_2.

Из определения операций дизъюнкции и отрицания очевидно, что $(F \vee \rceil F)$ = и. В естественном языке эта операция выражается разъединительными словами "..или..", "..либо.. " и т.п.

Если даны формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то значение формулы $F = (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)$ = и определяется значением "и" хотя бы одной формулы $F_1, F_2, \ldots,$или F_n.

F_1	F_2	$F_1 \vee F_2$
л	л	л
л	и	и
и	л	и
и	и	и

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
ДИЗЪЮНКЦИЯ

Следует обратить внимание, что в повседневной речи союз “или” употребляется в двух смыслах: “исключающее или”, когда истинность составного высказывания определяется истинностью только одного из двух или нескольких высказываний, и “не исключающее или”, когда истинность сложного высказывания определяется истинностью хотя бы одного из них.

Пример: даны высказывания A := "в компьютере применяют матричный принтер", B := "в компьютере применяют струйный принтер", C := "в компьютере применяют лазерный принтер"; D := "в компьютере применяют литерный принтер". Тогда формула $F = (A \vee B \vee C \vee D)$ отражает высказывание "в компьютере применяют матричный, струйный, лазерный или литерный принтеры".

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Импликация **($F_1 \to F_2$)** есть двуместная операция, посредством которой из формул F_1 и F_2 получают новую формулу $F = (F_1 \to F_2)$, отражающую сложное высказывание. Значение этого высказывания ложно тогда и только тогда, когда истинно значение F_1 и ложно F_2.

В программировании используют оператор IMPLIES: (F_1 IMPLIES F_2) ложно тогда и только тогда, когда истинно F_1 и ложно F_2.

На естественном языке эта операция выражается словами "если ..., то ... ", "тогда ..., когда ... ", "постольку ..., поскольку ... ", "при наличии ..., следует ... ", и т. п. F_1 называют ***посылкой***, а F_2 – ***заключением***

F_1	F_2	$F_1 \to F_2$
л	л	и
л	и	и
и	л	л
и	и	и

Пример: даны высказывания A:="по проводнику протекает электрический ток" и B - "вокруг проводника есть магнитное поле". Тогда формула $F = (A \to B)$ отражает высказывание "если по проводнику протекает электрический ток, то вокруг проводника возникает магнитное поле".

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
ЭКВИВАЛЕНЦИЯ

Эквиваленция **($F_1 \leftrightarrow F_2$)** есть двухместная операция, посредством которой из двух формул F_1 и F_2 получают новую формулу $F = (F_1 \leftrightarrow F_2)$, описывающую сложное высказывание.
В программировании для этого используют оператор IFF: (F_1 IFF F_2) истинно тогда и только тогда, когда оба операнда F_1 и F_2 имеют одинаковые значения.

На естественном языке эквиваленция выражается словами «для того, чтобы ..., необходимо и достаточно ...», « ... лишь при условии...» и т. п.

F_1	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
л	л	и
л	и	л
и	л	л
и	и	и

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ
ЭКВИВАЛЕНЦИЯ

Пример: даны высказывания A := “выполнить загрузку в компьютер операционной системы” и B := “установить в компьютер дискету с записанной операционной системой“. Тогда формула F = (A↔B) отображает высказывание “для того, чтобы выполнить загрузку операционной системы в компьютер, необходимо и достаточно установить в компьютер дискету с записанной операционной системой".

Пример: даны высказывания A := ”урожай будет стабильным ежегодно” и B := "выполнены все ирригационные работы". Тогда формула F = (A↔B) отображает высказывание "урожай будет ежегодно стабильным тогда и только тогда, когда будут выполнены все ирригационные работы".

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

Для определения истинности суждения необходимо анализировать значение истинности каждого элементарного высказывания и формировать последовательно значение истинности каждой подформулы, входящей в формулу сложного суждения. Логические значения сложной формулы также удобно описывать ***таблицами истинности*.**

Пример: суждение "если инвестиции на текущий год не изменятся, то возрастает расходная часть бюджета или возникает безработица, а если возрастет расходная часть бюджета, то налоги не будут снижены и, наконец, если налоги не будут снижены и инвестиции не изменятся, то безработица не возникнет".

В этом суждении есть четыре повествовательных предложения: A := ” инвестиции на текущий год не изменяются”, B := ”возрастает расходная часть бюджета”, C := ”возникает безработица”, D := ”налоги не снижаются”

Тогда формула сложного суждения имеет вид:

$$F = (A \rightarrow (B \vee C)) \& (B \rightarrow D) \& ((D \& A) \rightarrow \rceil C).$$

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

$$F = (A\to(B\vee C))\&(B\to D)\&((D\&A)\to \rceil C).$$

A	B	C	D	$\rceil$C	4&1	2∨3	1→7	2→4	6→5	8&9	11&10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Л	Л	Л	Л	И	Л	Л	И	И	И	И	**И**
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	**И**
Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	**И**
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	**И**
Л	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	И	**И**
Л	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И	И	**И**
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	**И**
И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	И	И	И	И	И	**И**
И	И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И	Л

В 12-ом столбце таблицы выделены те строки, в которых формула имеет значение истины при различных значениях пропозициональных переменных A, B, C и D.

Анализ таблицы показывает: для того, чтобы не возникла безработица, нужно не снижать налоги (D = и) при любых инвестициях (A = и или A = л) и расходной части бюджета (B = и или B = л).

Для удобства записи любой подформулы и формулы каждый столбец пронумерован, и логические операции выполняются с индексами столбцов.

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

Пример:

суждение: “Если цены высокие (А), то и заработная плата должна быть также высокой (В). Цены высокие или применяется регулирование цен (С). Если применяется регулирование цен, то нет инфляции ($\rceil D$). Инфляция есть. Следовательно, заработная плата должна быть высокой”.

Формулы первых четырех высказываний формируют посылки, а формула пятого высказывания – заключение, т. е.

$$\frac{A \to B;\ A \vee C;\ C \to \rceil D;\ D}{B.}$$

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

$$\frac{A\rightarrow B;\ A\lor C;\ C\rightarrow \rceil D;\ D}{B}$$

A	B	C	D	1→2	1∨3	$\rceil$4	3→7
1	2	3	4	5	6	7	8
Л	Л	Л	Л	И	Л	И	**И**
Л	Л	Л	И	И	Л	Л	**И**
Л	Л	И	Л	И	И	И	**И**
Л	Л	И	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	Л	И	Л	И	**И**
Л	И	Л	И	И	Л	Л	**И**
Л	И	И	Л	И	И	И	**И**
Л	И	И	И	И	И	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	И	И	**И**
И	Л	Л	И	Л	И	Л	**И**
И	Л	И	Л	Л	И	И	**И**
И	Л	И	И	Л	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И	И	И	**И**
И	**И**	Л	**И**	**И**	**И**	Л	**И**
И	И	И	Л	И	И	И	**И**
И	И	И	И	И	И	Л	Л

Выделенная четырнадцатая строка таблицы показывает, при каких значениях A, B, C и D истинны посылки и заключение.

Анализ показывает, что заработная плата при высоких ценах и наличии инфляции должна быть высокой и не должно быть регулирования цен.

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

Пример:

суждение “если курс ценных бумаг возрастет (A) или процентная ставка снизится (B), то курс акций упадет (C) или налоги не повысятся (D); курс акций падает тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг и растут налоги; если процентная ставка снизится, то либо курс акций не понизится, либо курс ценных бумаг не возрастет. Следовательно, если налоги повысить, то не вырастет курс ценных бумаг и вырастет курс акций”.

В этом суждении четыре сложных высказывания, три из которых являются посылками, а одно – заключением:

$$\frac{(A \vee B) \rightarrow (C \vee D);\ C \leftrightarrow (A \& \neg D);\ B \rightarrow (\neg C \vee \neg A)}{(\neg D \rightarrow (\neg A \& \neg C)).}$$

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

$\underline{(A \vee B) \to (C \vee D);\ C \leftrightarrow (A \,\&\, \rceil D);\ B \to}$

$(\rceil C \vee \rceil A)$

$(\rceil D \to (\rceil A \,\&\, \rceil C)).$

A	B	C	D	1∨2	1&⌉4	3∨4	5→7	3↔6	⌉3∨⌉1	2→10	⌉1&⌉3	⌉4→12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
л	л	л	л	л	л	л	и	и	и	и	и	и
л	л	л	и	л	л	и	и	и	и	и	и	и
л	л	и	л	л	л	и	и	л	и	и	л	л
л	л	и	и	л	л	и	и	л	и	и	л	и
л	и	л	л	и	л	и	и	и	и	и	и	и
л	и	л	и	и	л	и	и	и	и	и	и	и
л	и	и	л	и	л	и	и	л	и	и	л	л
л	и	и	и	и	л	и	и	л	и	и	л	и
и	л	л	л	и	и	л	л	л	и	и	л	л
и	л	л	и	и	л	и	и	и	и	и	л	и
и	л	и	л	и	и	и	и	и	л	и	л	л
и	л	и	и	и	л	и	и	л	л	и	л	и
и	и	л	л	и	и	л	л	л	и	и	л	л
и	и	л	и	и	л	и	и	и	и	и	л	и
и	и	и	л	и	и	и	и	и	л	л	л	л
и	и	и	и	и	л	и	и	л	л	л	л	и

Выделенные строки таблицы показывают, при каких значениях A, B, C и D истинны посылки и заключение. Так как для всех шести вариантов значение C = л, то оказывается возможным рассмотреть истинность заключения для четырех вариантов:

$$(A = и)\&(D = и),$$
$$(A = и)\&(B = л),$$
$$(B = л)\&(D = и),$$
$$(B = и)\&(D = л).$$

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

- каждое вхождение логической связки “⌉” относится к пропозициональной переменной или формуле, следующей непосредственно за логической связкой справа;
- каждое вхождение логической связки “**&**” после расстановки скобок связывает пропозициональные переменные или формулы, непосредственно окружающие логическую связку;
- каждое вхождение логической связки “∨” после расстановки скобок связывает пропозициональные переменные или формулы, непосредственно окружающие эту связку и т.д.;
- в формулах нет двух рядом стоящих логических связок - они должны быть разъединены формулами;
- в формулах нет двух рядом стоящих формул - они должны быть разъединены логической связкой.
- логические связки по силе и значимости упорядочены так: ⌉, &, ∨, →, ↔, т. е. самая сильная связка - отрицание, затем коньюнкция, дизьюнкция, импликация и, наконец, эквиваленция; знания о силе логических связок позволяют опускать скобки, без которых ясен порядок исполнения логических операций.

ПРАВИЛА ЗАПИСИ СЛОЖНЫХ ФОРМУЛ

Пример.

Пусть дана формула $F = (((F_1 \vee (\rceil F_2)) \to F_3) \leftrightarrow F_4)$.

1. Убрать внешние скобки для формулы, так как они не определяют старшинство никаких операций: $F = ((F_1 \vee (\rceil F_2)) \to F_3) \leftrightarrow F_4$;
2. Убрать скобки, охватывающие формулу импликации, так как операция эквиваленции будет исполняться только после выполнения операции импликации: $F = (F_1 \vee (\rceil F_2)) \to F_3 \leftrightarrow F_4$;
3. Убрать скобки, охватывающие формулу дизъюнкции, так как операция импликации будет исполняться только после выполнения операции дизъюнкции: $F = F_1 \vee (\rceil F_2) \to F_3 \leftrightarrow F_4$;
4. Убрать скобки, охватывающие формулу отрицания, так как операция дизъюнкции будет исполняться только после выполнения операции отрицания: $F=F_1 \vee \rceil F_2 \to F_3 \leftrightarrow F_4$;

Итак, последовательность исполнения операций после задания значений пропозациональных переменных следующая:
сначала определить значение формулы $(\rceil F_2)$, затем $(F_1 \vee (\rceil F_2))$ затем $((F_1 \vee (\rceil F_2)) \to F_3)$ и, наконец, $(((F_1 \vee (\rceil F_2)) \to F_3) \leftrightarrow F_4)$.

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Две формулы F_1 и F_2 называются ***равносильными***, если они имеют одинаковое значение “и” или “л” при одинаковых наборах пропозициональных переменных, включаемых в F_1 и F_2, т.е. $F_1 = F_2$.

Если две формулы равносильны, то они ***эквивалентны***, т.е. $(F_i \leftrightarrow F_j)$.

Если формула F имеет вхождением подформулу F_i, для которой существует эквивалентная подформула F_j, т.е. $F_i \leftrightarrow F_j$, то возможна ***подстановка*** всюду в формулу F вместо формулы F_i подформулы F_j без нарушения истинности формулы F.

Подмножество эквивалентных формул для преобразований сложных логических суждений формируют ***законы алгебры высказываний.***

Таблица законов алгебры высказываний

Наименование закона	Равносильные формулы $F_i = F_j$
Коммутативности	$(F_1 \vee F_2) = (F_2 \vee F_1)$; $(F_1 \& F_2) = (F_2 \& F_1)$
Ассоциативности	$F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = (F_1 \vee F_2) \vee F_3$; $F_1 \& (F_2 \& F_3) = (F_1 \& F_2) \& F_3$
Дистрибутивности	$F_1 \vee (F_2 \& F_3) = (F_1 \vee F_2) \& (F_1 \vee F_3)$; $F_1 \& (F_2 \vee F_3) = F_1 \& F_2 \vee F_1 \& F_3$
Идемпотентности	$F \vee F = F$; $F \& F = F$
Исключенного третьего	$F \vee \rceil F =$ и;
Противоречия	$F \& \rceil F =$ л
Де Моргана	$\rceil(F_1 \vee F_2) = \rceil F_1 \& \rceil F_2$; $\rceil(F_1 \& F_2) = \rceil F_1 \vee \rceil F_2$
Поглощения	$F_1 \vee (F_1 \& F_2) = F_1$; $F_1 \& (F_1 \vee F_2) = F_1$
Дополнения	$\rceil(\rceil F) = F$
Свойства констант	$F \vee$ л $= F$; $F \&$ л $=$ л; $F \vee$ и $=$ и; $F \&$ и $= F$

ТАБЛИЦА ЗАКОНОВ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Наименование закона	Равносильные формулы $F_i = F_j$
Коммутативности	$(F_1 \vee F_2) = (F_2 \vee F_1)$; $(F_1 \& F_2) = (F_2 \& F_1)$
Ассоциативности	$F_1 \vee (F_2 \vee F_3) = (F_1 \vee F_2) \vee F_3$; $F_1 \& (F_2 \& F_3) = (F_1 \& F_2) \& F_3$
Дистрибутивности	$F_1 \vee (F_2 \& F_3) = (F_1 \vee F_2) \& (F_1 \vee F_3)$; $F_1 \& (F_2 \vee F_3) = F_1 \& F_2 \vee F_1 \& F_3$
Идемпотентности	$F \vee F = F$; $F \& F = F$
Исключенного третьего	$F \vee \neg F = и$;
Противоречия	$F \& \neg F = л$
Де Моргана	$\neg(F_1 \vee F_2) = \neg F_1 \& \neg F_2$; $\neg(F_1 \& F_2) = \neg F_1 \vee \neg F_2$
Поглощения	$F_1 \vee (F_1 \& F_2) = F_1$; $F_1 \& (F_1 \vee F_2) = F_1$
Дополнения	$\neg(\neg F) = F$
Свойства констант	$F \vee л = F$; $F \& л = л$; $F \vee и = и$; $F \& и = F$

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пример: $F_1 \vee (F_1 \& F_2) = F_1$

Сравните значения логических функций в третьем и четвертом столбцах. Так можно проверить первый закон поглощения.

F1	F2	1&2	1∨3
1	2	3	4
Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	Л
И	Л	Л	И
И	И	И	И

Пример: $](F_1 \vee F_2) =]F_1 \&]F_2$

Сравните значения логических функций в третьем и четвертом столбцах. Так можно проверить первый закон де Моргана.

F1	F2	](1∨2)	]1&]2
1	2	3	4
Л	Л	И	И
Л	И	Л	Л
И	Л	Л	Л
И	И	Л	Л

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ

Знание законов алгебры высказываний позволяет выполнять эквивалентные преобразования любых логических формул, сохраняя их значения для любых наборов пропозициональных переменных. Ниже на примерах рассмотрены эквивалентные преобразования основных логических операций.

Пример: $F_1 \to F_2 = \rceil F_1 \vee F_2 = \rceil(F_1 \& \rceil F_2)$.

Сравните значения логических функций в третьем, четвертом и пятом столбцах. То есть операцию импликации всегда можно заместить исполнением операций дизьюнкции и отрицания или коньюнкции и отрицания.

F_1	F_2	$1 \to 2$	$\rceil 1 \vee 2$	$\rceil(1 \& \rceil 2)$
1	2	3	4	5
Л	Л	И	И	И
Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л
И	И	И	И	И

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ

Пример: $F_1 \leftrightarrow F_2$ = $]F_1\&]F_2 \vee F_1\&F_2$ = $](](]F_1\&]F_2)\&](F_1\&F_2))$.

Сравните значения логических функций в третьем, шестом и восьмом столбцах. Это значения трех эквивалентных функций.

F_1	F_2	$1\leftrightarrow2$	$]1\&]2$	$1\&2$	$4\vee5$	$]4\&]5$	$]7$
1	2	3	4	5	6	7	8
Л	Л	И	И	Л	И	Л	И
Л	И	Л	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	И	Л
И	И	И	Л	И	И	Л	И

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ

Выполненные примеры показывают, что всякую формулу алгебры логики можно заместить равносильной ей формулой, содержащей вместо импликации или эквиваленции только две логических операции: дизьюнкцию и отрицание или коньюнкцию и отрицание.

Этот факт показывает, что множество логических связок дизъюнкции и отрицания, конъюнкции и отрицания формируют функционально полные алгебраические системы. Они достаточны для выражения любой логической функции, любой таблицы истинности.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ ПРАВИЛА ЗАМЕНЫ И ПОДСТАНОВКИ

Правило замены.

Если формула F содержит подформулу F_i, то замена подформулы F_i в формуле F на эквивалентную ей формулу F_j не изменяет значения формулы F при любом наборе пропозициональных переменных.

Правило подстановки.

Если необходима подстановка в формулу F вместо формулы F_i новой формулы F_j, то эту операцию нужно выполнить всюду по символу F_i.

Правила замены и подстановки расширяют возможности эквивалентных преобразований формул сложных высказываний.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ ПРАВИЛА ЗАМЕНЫ И ПОДСТАНОВКИ

Пример: Дано $F = \neg(F_1 \rightarrow F_2) \& (\neg F_3 \vee \neg F_4) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \& \neg(F_3 \& F_4)$.
Выполнить эквивалентные преобразования для упрощения алгебраического выражения.

Преобразования:

1) Удалить логическую связку “→”:

$F = \neg(\neg F_1 \vee F_2) \& (\neg F_3 \vee \neg F_4) \vee \neg(F_1 \vee F_2) \& \neg(F_3 \& F_4)$;

$F_1 \rightarrow F_2 = \neg F_1 \vee F_2 = \neg(F_1 \& \neg F_2)$.

2) Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана:

$F = F_1 \& \neg F_2 \& (\neg F_3 \vee \neg F_4) \vee \neg F_1 \& \neg F_2 \& (\neg F_3 \vee \neg F_4)$;

$\neg(F_1 \vee F_2) = \neg F_1 \& \neg F_2$; $\neg(F_1 \& F_2) = \neg F_1 \vee \neg F_2$

3) Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F = (F_1 \vee \neg F_1) \& \neg F_2 \& (\neg F_3 \vee \neg F_4)$;

$F_1 \vee (F_2 \& F_3) = (F_1 \vee F_2) \& (F_1 \vee F_3)$;

$F_1 \& (F_2 \vee F_3) = F_1 \& F_2 \vee F_1 \& F_3$

4) Удалить член $(F_1 \vee \neg F_1) =$ и:

$F = \neg F_2 \& (\neg F_3 \vee \neg F_4)$.

Дальнейшее упрощение формулы F невозможно.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ ПРАВИЛА ЗАМЕНЫ И ПОДСТАНОВКИ

Пример: Дано суждение "или верно, что Петр поступил в университет (А), и при этом неверно, что Петр не поступил и Андрей не поступил, или Петр поступил и Семен поступил (С), или даже Петр поступил и Семен поступил, и Андрей поступил (В)".

Формула сложного высказывания имеет вид:

$$A\&\neg(\neg A\&\neg B)\vee A\&C\vee A\&B\&C;$$

1) преобразовать, используя закон де Моргана:

$$A\&\ (A\vee B)\vee A\&C\vee A\&B\&C;$$

2) применить закон идемпотентности:

$$A\&\ (A\vee B)\vee A\&A\&C\vee A\&B\&C;$$

3) применить закон дистрибутивности по переменной А:

$$A\&((A\vee B)\vee\ A\&C\vee B\&C);$$

4) применить закон дистрибутивности по переменной С:

$$A\&((A\vee B)\vee\ C\&(A\vee B));$$

5) ввести константу "и":

$$A\&((A\vee B)\&\text{"и"}\vee\ C\&(A\vee B));$$

6) применить закон дистрибутивности для подформулы (А∨В

$$A\&(A\vee B)\&(\text{"и"}\vee C);$$

7) удалить ("и"∨С):

$$A\&(A\vee B);$$

8) применить закон поглощения: А.

Следовательно, в данном высказывании утверждается только то, что Петр поступил в университет, а об Андрее и Семене никакой информации нет.

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Определение исчисления высказываний, как и любой формальной системы, следует начинать с задания множества ***аксиом*** и ***правил вывода***, обеспечивающих последовательное их использование при доказательстве истинности заключения.

Доказательство - конечная последовательность высказываний, каждое из которых является либо аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих высказываний этой последовательности по правилам вывода.

Определение минимально возможного множества аксиом определяет ***семантическую полноту исчисления***, а определение правил, обеспечивающих последовательное использование аксиом и промежуточных высказываний в процессе формирования заключения – ***метод дедуктивного вывода.***

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ

Если дана некоторая формула F и каждой ее пропозициональной переменной приписано значение "и" или "л", то говорят что дана ***интерпретация*** формулы F.

Все множество формул логики высказываний можно разбить на три класса: ***тождественно истинные***, ***тождественно ложные*** и ***теоремы***. В каждом классе может быть перечислимое и счетное множество формул.
Тождественно истинные формулы (общезначимые) – особый класс формул, которые принимают значение “истины” при любом значении пропозициональных переменных, входящих в эту формулу. Эти формулы играют роль аксиом и законов логики высказываний.
Тождественно ложные формулы (противоречия) - особый класс формул, которые принимают значение “ложь” при любых значениях пропозициональных переменных, входящих в формулу.
Выполнимые формулы - это особый класс формул, которые принимают значения “истина” или “ложь” в зависимости от значений пропозициональных переменных.

Поиск алгоритма, определяющего к какому классу принадлежит та или иная формула, формирует проблему разрешимости исчисления высказываний.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ

Какому классу принадлежит формула:

$$F = ((A\to B)\&(A\to C)\to(A\to(B\&C))$$

Формула принадлежит классу тождественно истинных формул (см. столбец 9).

A	B	C	A→B	A→C	B&C	4&5	1→6	7→8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Л	Л	Л	И	И	Л	И	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	И	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И
И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	И
И	И	И	И	И	И	И	И	И

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ

Какому классу принадлежит формула:

$$F = A \& (\neg B \vee \neg C) \& (A \to B) \& (A \to C)$$

A	B	C	$\neg 2 \vee \neg 3$	1&4	$1 \to 2$	$1 \to 3$	5&6	8&7
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Л	Л	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л
И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	И	И	И	Л	И	Л
И	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л

Формула принадлежит классу тождественно ложных формул (см. столбец 9).

АКСИОМЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Множество формул, удовлетворяющих условиям тождественной истинности, бесконечно. Однако в качестве аксиом всегда выбирают только такие, которые при истинности посылок обеспечивают дедуктивный вывод истинности заключения. При этом стремятся создать такую систему аксиом, которая содержала бы минимальное число формул для заданного набора логических связок.

A1. $F_1 \to (F_2 \to F_1)$;

A2. $(F_1 \to F_2) \to ((F_2 \to F_3)) \to (F_1 \to F_3))$;

A3. $(F_1 \& F_2) \to F_1$;

A4. $(F_1 \& F_2) \to F_2$;

A5. $F_1 \to (F_2 \to (F_1 \& F_2))$;

A6. $F_1 \to (F_1 \vee F_2)$;

A7. $F_2 \to (F_1 \vee F_2)$;

A8. $(F_1 \to F_3) \to ((F_2 \to F_3) \to ((F_1 \vee F_2) \to F_3))$;

A9. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \to \rceil F_2) \to \rceil F_1)$;

A10. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \& F_3) \to (F_2 \& F_3))$;

A11. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \vee F_3) \to (F_2 \vee F_3))$;

A12. $\rceil\rceil F_1 \to F_1$.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ

А2. $(F_1 \to F_2) \to ((F_1 \to (F_2 \to F_3)) \to (F_1 \to F_3))$

F1	F2	F3	$1\to2$	$1\to3$	$2\to3$	$1\to6$	$7\to5$	$4\to8$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
л	л	л	и	и	и	и	и	и
л	л	и	и	и	и	и	и	и
л	и	л	и	и	л	и	и	и
л	и	и	и	и	и	и	и	и
и	л	л	л	л	и	и	л	и
и	л	и	л	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	л	л	и	и
и	и	и	и	и	и	и	и	и

А8. $(F_1 \to F_3) \to ((F_2 \to F_3) \to ((F_1 \vee F_2) \to F_3))$

F_1	F_2	F_3	$1\vee2$	$1\to3$	$2\to3$	$4\to3$	$6\to7$	$5\to8$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
л	л	л	л	и	и	и	и	и
л	л	и	л	и	и	и	и	и
л	и	л	и	и	л	л	и	и
л	и	и	и	и	и	и	и	и
и	л	л	и	л	и	л	л	и
и	л	и	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	л	л	л	и	и
и	и	и	и	и	и	и	и	и

ПРАВИЛА ВЫВОДА

Выводом формулы **В** из множества формул $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,. . ., $\mathbf{F}_n$ называется такая последовательность формул, что любая $\mathbf{F}_i$ есть либо аксиома, либо непосредственно выводима из подмножества предшествующих ей формул $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . , $\mathbf{F}_n$.
В этом случае формулу **В** называют ***заключением,*** а последовательность формул $\mathbf{F}_1$; F_2; . . . $\mathbf{F}_n$, сформированная отношением логического вывода, представляет ***схему дедуктивного вывода.***

Схему дедуктивного вывода записывают так:

$$\mathbf{F}_1; \mathbf{F}_2; \ldots \mathbf{F}_n \vdash \mathbf{B},$$

где символ $\vdash$ означает «верно, что **В** выводима из $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,... ,$\mathbf{F}_n$».
Есть определенная связь между отношением логического вывода в схеме дедуктивного вывода и импликацией в схеме закона алгебры высказываний .
Этот факт записывают так:

$$\vdash \mathbf{F}_1 \& \mathbf{F}_2 \& \ldots \& \mathbf{F}_n \rightarrow \mathrm{B}.$$

ПРАВИЛА ПОДСТАНОВКИ

Если выводимая формула **F** содержит некоторую переменную **A** (обозначим этот факт **F**(**A**)) и существует произвольная формула **B**, то формула **F**(**B**), получающаяся заменой всех вхождений **A** на формулу **B**, также выводима в исчислении высказываний. Этот факт формально описывают так:

Этот факт записывают так:

$$\frac{{}_{A}\int^{B} F(A)}{F(B).}$$

Если **F**(**A**) = **A**, то

$$\frac{{}_{A}\int^{B} A}{B.}$$

Если **F** (**⌉A**), то

$$\frac{{}_{A}\int^{B} F(\rceil A)}{F(\rceil B).}$$

Обратим внимание, что формула **F** должна быть выводимой в исчислении высказываний.

ПРАВИЛА ПОДСТАНОВКИ

Пример: пусть даны формулы $F = A\&C \rightarrow A$ и $B = C \rightarrow \rceil A$.

Если выполнить подстановку формулы B в формулу F вместо формулы A,

$$\frac{A \int^{C\rightarrow \rceil A} (A\&C\rightarrow A)}{(C\rightarrow \rceil A)\&C\rightarrow(C\rightarrow \rceil A).}$$

то получим новую формулу F`.

Проверим значения двух формул F и F’ по таблицам истинности. Выделенные столбцы показывают тождество двух формул.

A	B	C	1&3	4→1	3→]1	6&3	7→6
1	2	3	4	5	6	7	8
л	л	л	л	и	и	л	и
л	л	и	л	и	и	и	и
л	и	л	л	и	и	л	и
л	и	и	л	и	и	и	и
и	л	л	л	и	и	л	и
и	л	и	и	и	л	л	и
и	и	л	л	и	и	л	и
и	и	и	и	и	л	л	и

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П1. Если посылки $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ имеют значение “и”, то истинной является их конъюнкция, т.е.

$$\frac{\mathbf{F}_1\,;\,\mathbf{F}_2}{(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)}$$

Эта запись при истинности посылок $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ предусматривает возможность введения в заключение логической связки конъюнкции; это правило тождественно аксиоме А5;

П2. Если $(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)$ имеет значение “и”, то истинными являются подформулы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)}{\mathbf{F}_1} \quad \text{и} \quad \frac{(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)}{\mathbf{F}_2}.$$

Эта запись при истинности $(\mathbf{F}_1\&F_2)$ предусматривает возможность удаления в заключении логической связки конъюнкции и рассматривать истинные значения подформул F_1 и $\mathbf{F}_2$; это правило тождественно аксиомам А3 и А4;

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П3. Если $\mathbf{F}_1$ имеет значение “и”, а $(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)$ – “л”, то ложной является подформулы $\mathbf{F}_2$, т.е.

$$\frac{\mathbf{F}_1;\ \neg(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)}{\neg\mathbf{F}_2.}$$

Эта запись при ложности $(\mathbf{F}_1\&\mathbf{F}_2)$ и истинности одной из подформул предусматривает возможность удаления в заключении логической связки конъюнкции и рассматривать ложным значение второй подформулы;

П4. Если истинна хотя бы одна посылка $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$, то истинной является их дизъюнкция, т.е.

$$\frac{\mathbf{F}_1}{(\mathbf{F}_1\vee\mathbf{F}_2)} \quad \text{или} \quad \frac{\mathbf{F}_2}{(\mathbf{F}_1\vee\mathbf{F}_2).}$$

Эта запись при истинности хотя бы одной подформулы $\mathbf{F}_1$ или $\mathbf{F}_2$ предусматривает возможность введения в заключение логической связки дизъюнкции; это правило тождественно аксиомам А6 и А7;

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П5. Еесли (**$F_1 \vee F_2$**) имеет значение “и” и одна из подформул **F_1** или **F_2** имеет значение “л”, то истинной является вторая подформула **F_2** или **F_1**, т.е.

$$\frac{(F_1 \vee F_2);\ \neg F_1}{F_2} \quad \text{или} \quad \frac{(F_1 \vee F_2);\ \neg F_2}{F_1}.$$

Эта запись при истинности (**$F_1 \vee F_2$**) предусматривает возможность удаления в заключении логической связки дизъюнкции и рассматривать истинные значения подформул **F_1** или **F_2**;

П6. Если подформула **F_2** имеет значение “и”, то истинной является формула (**$F_1 \to F_2$**) при любом значении подформулы **F_1**, т.е.

$$\frac{F_2}{(F_1 \to F_2)}.$$

Эта запись при истинном значении **F_2** предусматривает возможность введения в заключение логической связки импликации при любом значении подформулы **F_1** (“истина из чего угодно”); это правило тождественно аксиоме А1.

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П7. Если подформула $\mathbf{F}_1$ имеет значение “л”, то истинной является формула ($\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2$) при любом значении подформулы $\mathbf{F}_2$, т.е.

$$\frac{\rceil \mathbf{F}_1}{(\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2).}$$

Эта запись при ложном значении $\mathbf{F}_1$ предусматривает возможность введения в заключение логической связки импликации при любом значении подформулы $\mathbf{F}_2$ (“ из ложного что угодно”);

П8. Если формула ($\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинной является формула ($\rceil \mathbf{F}_2 \rightarrow \rceil \mathbf{F}_1$), т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2)}{(\rceil \mathbf{F}_2 \rightarrow \rceil \mathbf{F}_1).}$$

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2$) определяет возможность замены местами полюсов импликации при одновременном изменении их значений; это - закон контрапозиции;

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П9. Если формула $(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)$ имеет значение “и”, то истинной является формула $((\mathbf{F}_1 \vee \mathbf{F}_3) \to (\mathbf{F}_2 \vee \mathbf{F}_3))$ при любом значении $\mathbf{F}_3$, т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)}{((\mathbf{F}_1 \vee \mathbf{F}_3) \to (\mathbf{F}_2 \vee \mathbf{F}_3)).}$$

Эта запись при истинном значении $(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)$ определяет возможность выполнить операцию дизъюнкции при любом значении формулы $\mathbf{F}_3$ над каждым полюсом импликации; это правило тождественно аксиоме А11.

П10. Если формула $(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)$ имеет значение “и”, то истинной является формула $((\mathbf{F}_1 \& \mathbf{F}_3) \to (\mathbf{F}_2 \& \mathbf{F}_3))$ при любом значении $\mathbf{F}_3$, т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)}{((\mathbf{F}_1 \& \mathbf{F}_3) \to (\mathbf{F}_2 \& \mathbf{F}_3)).}$$

Эта запись при истинном значении $(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)$ определяет возможность выполнить операцию конъюнкции при любом значении формулы $\mathbf{F}_3$ над каждым полюсом импликации; это правило тождественно аксиоме А10.

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П11. Если формулы ($\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2 \to F_3$) имеют значение "и", то истинной является формула ($\mathbf{F}_1 \to F_3$), т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2);\ (\mathbf{F}_2 \to \mathbf{F}_3)}{(\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_3).}$$

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2 \to \mathbf{F}_3$) предусматривает возможность формирования импликации ($\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_3$) (закон силлогизма);
это правило тождественно аксиоме А2;

П12. Если формулы $\mathbf{F}_1$ и ($\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$) имеют значение "и", то истинной является формула $\mathbf{F}_2$, т.е.

$$\frac{\mathbf{F}_1;\ (\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2)}{\mathbf{F}_2.}$$

Эта запись при истинном значении посылки $\mathbf{F}_1$ и импликации ($\mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$) позволяет удалить логическую связку импликации и определить истинное значение заключения $\mathbf{F}_2$;

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П13. Если формулы $\urcorner\mathbf{F}_2$ и $(\mathbf{F}_1\rightarrow\mathbf{F}_2)$ имеют значение "и", то истинной является формула $\urcorner\mathbf{F}_1$, т.е.

$$\frac{\urcorner\mathbf{F}_2;\ (\mathbf{F}_1\rightarrow\mathbf{F}_2)}{\urcorner\mathbf{F}_1.}$$

Эта запись при истинном значении посылки $\urcorner\mathbf{F}_2$ и импликации $(\mathbf{F}_1\rightarrow\mathbf{F}_2)$ позволяет удалить логическую связку импликации и определить истинное значение заключения $\urcorner\mathbf{F}_1$;

П14. Если формулы $(\mathbf{F}_1\rightarrow\mathbf{F}_2)$ и $(\mathbf{F}_2\rightarrow\mathbf{F}_1)$ имеют значение "и", то истинной является формула $(\mathbf{F}_1\leftrightarrow\mathbf{F}_2)$, т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1\rightarrow\mathbf{F}_2);\ (\mathbf{F}_2\rightarrow\mathbf{F}_1)}{(\mathbf{F}_1\leftrightarrow\mathbf{F}_2).}$$

Эта запись при истинном значении $(\mathbf{F}_1\rightarrow\mathbf{F}_2)$ и $(F_2\rightarrow\mathbf{F}_1)$ позволяет ввести логическую связку эквиваленции и определить значение формулы $(\mathbf{F}_1\leftrightarrow\mathbf{F}_2)$;

ПРАВИЛА ВВЕДЕНИЯ И УДАЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗОК

П15. Если формула ($\mathbf{F}_1 \leftrightarrow \mathbf{F}_2$) имеет значение “и”, то истинными являются формулы ($\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_1$), т.е.

$$\frac{(\mathbf{F}_1 \leftrightarrow \mathbf{F}_2)}{(\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2)} \quad \text{и} \quad \frac{(\mathbf{F}_1 \leftrightarrow \mathbf{F}_2)}{(\mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_1)}.$$

Эта запись при истинном значении ($\mathbf{F}_1 \leftrightarrow \mathbf{F}_2$) позволяет удалить логическую связку эквиваленции и определить истинное значение формул ($\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2$) и ($\mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_1$).

ПРАВИЛА ЗАКЛЮЧЕНИЯ

При выводе формулы из множества аксиом и посылок используют два основных правила:

а) если $\mathbf{F}_i$ и ($\mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{F}_j$) есть выводимые формулы, то $\mathbf{F}_j$ также выводимая формула, т.е.

$$\frac{\mathbf{F}_i;\ (\mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{F}_j)}{\mathbf{F}_j.}$$

это правило называют ***modus ponens (m.p.)***.

b) если формулы $\rceil\mathbf{F}_j$ и $(\mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{F}_j)$ есть выводимые формулы, то $\rceil\mathbf{F}_i$ также выводимая формула, т.е.

$$\frac{\rceil\mathbf{F}_j;\ (\mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{F}_j)}{\rceil\mathbf{F}_i.}$$

это правило называют ***modus tollens (m.t.)***.

ПРАВИЛА ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Пример: суждение: “Сумма внутренних углов многоугольника равна 180º (А). Если сумма внутренних углов многоугольника равна 180º (А), то многоугольник есть треугольник (В). Следовательно, дан треугольник”.

$$\frac{A; A \to B}{B.}$$

Пример: суждение: ”Дан не треугольник (⌉В); если сумма внутренних углов многоугольника равна 180º(А), то многоугольник есть треугольник (В). Следовательно, сумма внутренних углов многоугольника не равна 180º(⌉А)”.

$$\frac{\neg B; A \to B}{\neg A.}$$

МЕТОД ДЕДУКТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема $F_1, F_2, \ldots, F_n \mid\!\!— B$ равносильна доказательству $\mid\!\!— (F_1\&F_2\&\ldots\&F_n \to B)$. Если каждая F_i = и, то $F_1\& F_2\&\ldots\&F_n$) = и, а если $(F_1\&F_2\&\ldots\&F_n \to B)$ = и, то B = и.

Следовательно, при истинности всех посылок и истинности импликации (правило m.p.), заключение всегда будет истинным.

Используя правила эквивалентных преобразований алгебры высказываний, можно показать дедуктивный характер вывода заключения:

1) $\mid\!\!—(F_1\&F_2\&\ldots\&F_n \to B)$;
2) $\mid\!\!—(\rceil(F_1\&F_2\&\ldots\&F_n) \vee B)$;
3) $\mid\!\!—(\rceil F_1 \vee \rceil F_2 \vee \ldots \vee \rceil F_n \vee B)$;
4) $\mid\!\!—(\rceil F_1 \vee \rceil F_2 \vee \ldots \vee \rceil F_{n-1} \vee (F_n \to B))$;
5) $\mid\!\!—(\rceil F_1 \vee \rceil F_2 \vee \ldots \vee (F_{n-1} \to (F_n \to B)))$;
6) $\mid\!\!—(\rceil F_1 \vee (F_2 \to \ldots \to (F_{n-1} \to (F_n \to B))\ldots))$;
7) $\mid\!\!—(F_1 \to (F_2 \to \ldots \to (F_{n-1} \to (F_n \to B))\ldots)$

Так формируется система дедуктивного вывода от посылок до заключения.

МЕТОД ДЕДУКТИВНОГО ВЫВОДА

Пример. Дано суждение: “Всякое общественноопасное деяние (A) наказуемо (B). Преступление (C) есть общественно опасное деяние (A). Дача взятки (D) - преступление (C)**.** Следовательно, дача взятки наказуема ?”.

$$\frac{A \to B; C \to A; D \to C}{D \to B.}$$

П 11

$$\frac{(F_1 \to F_2); (F_2 \to F_3)}{(F_1 \to F_3).}$$

1) $F_1 = A \to B$ посылка;
2) $F_2 = C \to A$ посылка;
3) $F_3 = D \to C$ посылка;
4) $F_4 = C \to B$ заключение по формулам F_1 и F_2 и аксиоме A2 или правилу 11;
5) $F_5 = D \to B$ заключение по формулам F_3 и F_4 и аксиоме A2 или правилу 11.

Следовательно, дача взятки (D) наказуема (B).

МЕТОД ДЕДУКТИВНОГО ВЫВОДА

Пример. “Если Петров не трус (A), то он поступит в соответствие с собственными убеждениями (B). Если Петров честен (C), то он не трус (A). Если Петров не честен ¬(C), то он не признает своей ошибки (D). Но Петров признает свои ошибки ¬(D). Следовательно, он поступит согласно собственным убеждениям (B)?"

$$\frac{A \to B;\ C \to A;\ \neg C \to D;\ \neg D}{B.}$$

1) $F_1 = A \to B$ посылка;
2) $F_2 = C \to A$ посылка;
3) $F_3 = \neg C \to D$ посылка;
4) $F_4 = \neg D$ посылка;
5) $F_5 = C \to B$ заключение по формулам F_1, F_2 и аксиоме А2 или правилу 11;
6) $F_6 = \neg B \to \neg C$ заключению по формуле F_5 и правилу 8);
7) $F_7 = \neg B \to D$ заключение по формулам F_3 и F_6 и аксиоме А2 или правилу 11;
8) $F_8 = B$ заключение по формулам F_4, F_7 и правилу m.t..

П 11

$$\frac{(F_1 \to F_2);\ (F_2 \to F_3)}{(F_1 \to F_3).}$$

П 8

$$\frac{(F_1 \to F_2)}{(\neg F_2 \to \neg F_1).}$$

m.t.

$$\frac{\neg F_j;\ (F_i \to F_j)}{\neg F_i.}$$

Так доказано, что Петров поступает согласно собственным убеждениям.

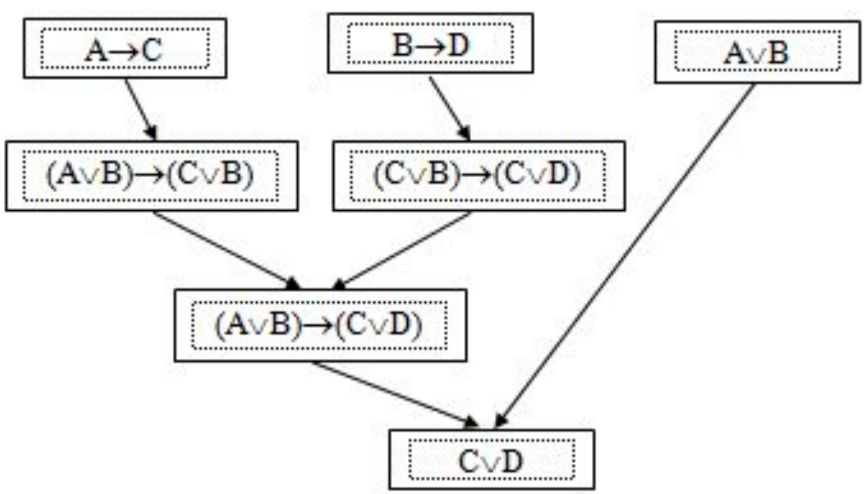
МЕТОД ДЕДУКТИВНОГО ВЫВОДА

Пример. Доказать истинность заключения

$$\frac{(A \vee B);\ (A \rightarrow C);\ (B \rightarrow D)}{(C \vee D).}$$

1) $F_1=(A\rightarrow C)$ посылка;
2) $F_2=(A \vee B)\rightarrow(C \vee B)$ заключение по формуле F_1 и правилу 9;
3) $F_3=(B\rightarrow D)$ посылка;
4) $F_4=(C \vee B)\rightarrow(C \vee D)$ заключение по формуле F_3 и правилу 9;
5) $F_5=(A \vee B)\rightarrow(C \vee D)$ заключение по формулам F_2 и F_4 и правилу 11;
6) $F_6=(A \vee B)$ посылка;
7) $F_7=(C \vee D)$ заключение по формулам F_5 и F_6 и правилу *m. p.*.

Так доказана истинность заключения $(C \vee D)$.



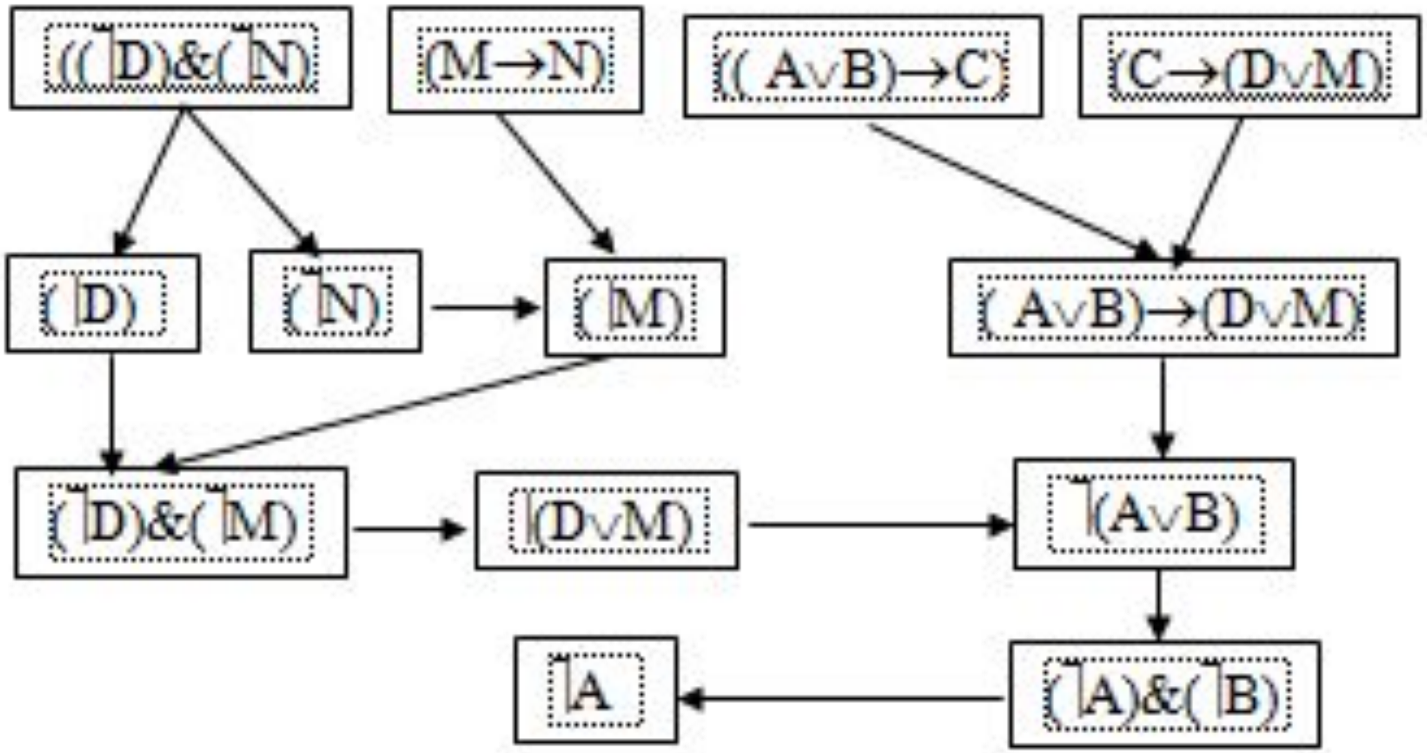
МЕТОД ДЕДУКТИВНОГО ВЫВОДА

<u>Пример:</u> Доказать истинность заключения :

$$\frac{((A \vee B) \to C); (C \to (D \vee M)); (M \to N); ((\rceil D)\&(\rceil N))}{\rceil A.}$$

1) $F_1=((\rceil D)\&(\rceil N))$ посылка;
2) $F_2=\rceil N$ заключение по формуле F_1 и правилу 2;
3) $F_3=(M \to N)$; посылка ;
4) $F_4=\rceil M$ заключение по формулам F_2 и F_3 и правилу m.t;
5) $F_5=\rceil D$ заключение по формуле F_1 и правилу 2;
6) $F_6=(\rceil D)\&(\rceil M)$ заключение по формулам F_4 и F_5 и правилу 1;
7) $F_7=\rceil(D \vee M)$ заключение по формуле F_6 и закону де Моргана;
8) $F_8=((A \vee B) \to C)$ посылка;
9) $F_9=(C \to (D \vee M))$ посылка;
10) $F_{10}=((A \vee B) \to (D \vee M))$ заключение по формулам F_8 и F_9 и правилу 11;
11) $F_{11}=\rceil(A \vee B)$ заключение по формулам F_7 и F_{10} и правилу m.t.;
12) $F_{12}=(\rceil A)\&(\rceil B)$ заключение по формуле F_{11} и закону де Моргана;
13) $F_{13}=\rceil A$ заключение по формуле F_{12} и правилу 2.

МЕТОД ДЕДУКТИВНОГО ВЫВОДА



БУЛЕВА АЛГЕБРА

Алгебра, использующая операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над множеством, элементы которого принимают значения из множества $\{0,\ 1\}$, называется ***булевой алгеброй*** в часть английского математика Дж. Буля:

$$A = < X, \vee, \cdot, \square \ , 0, 1 >,$$

где X – ***носитель*** алгебры, а $\{\vee, \ \cdot, \square \ \}$ - ***сигнатура*** алгебры.

Операторы конъюнкции, дизъюнкции и отрицания называют также логическими связками.

БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ

Дизъюнкция $(x_1 \vee x_2)$ есть бинарная операция, значение которой равно 0 в том и только в том случае, когда оба операнда равны 0. Схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j)$ = disjunction (x_i, x_j). Операцию дизъюнкции можно выполнять на произвольном числе элементов множества X. Например,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i.$$

v	x_i	x_j	$x_i \vee x_j$
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ

Конъюнкция $(x_1 \cdot x_2)$ есть бинарная операция, значение которой равно 1 в том и только в том случае, когда оба операнда равны 1.
Схема операции имеет вид: $f(x_i, x_j) = \text{conjunct}\ (x_1, x_2)$. Операцию конъюнкции можно выполнять на произвольном числе элементов множества X. Например,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = {}_{i=1}\&^n x_i,$$

·	x_i	x_j	$x_i \cdot x_j$
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ

Отрицание □x есть унарная операция, значение которой противоположно значению операнда. Схема операции имеет вид: (x) = not(x). Операцию отрицания можно распространить на произвольные формулы булевой алгебры. Например,

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) =](x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = \overline{(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)},$$

$$f(x_1, x_2,\ldots,x_n) =](x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \overline{(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)}.$$

—	x	$\bar{x}$
	1	0
	0	1

ЗАКОНЫ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

Аксиомы общей алгебры формируют ***законы булевой алгебры***:

коммутативности: $x_i \vee x_j = x_j \vee x_i$ и $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$,

ассоциативности: $x_i \vee (x_j \vee x_k) = (x_j \vee x_j) \vee x_k$ и $x_i \cdot (x_j \cdot x_k) = (x_j \cdot x_j) \cdot x_k$,

дистрибутивности: $x_i \vee (x_j \cdot x_k) = (x_i \vee x_j) \cdot (x_i \vee x_k)$ и $x_i \cdot (x_j \vee x_k) = (x_i \cdot x_j) \vee (x_i \cdot x_k)$,

идемпотентности: $(x_i \vee x_i) = x_i$ и $(x_i \cdot x_i) = x_i$,

поглощения: $x_i \vee (x_i \cdot x_j) = x_i$ и $x_i \cdot (x_i \vee x_j) = x_i$,

противоречия: $(x \vee \square x) = 1$ и $(x \cdot \square x) = 0$,

двойного отрицания: $\rceil(\square x) = x$,

склеивания: $x \cdot F \vee \square x \cdot F = F$, $(x \vee F) \cdot (\square x \vee F) = F$,

де Моргана: $\rceil(x_i \vee x_j) = \square x_i \cdot \square x_j$ и $\rceil(x_i \cdot x_j) = \square x_i \vee \square x_j$,

Порецкого $x \vee x \cdot y = x \vee y$, $x \cdot (\square x \vee y) = x \cdot y$,

константы: $(x \vee 0) = x$, $(x \cdot 0) = 0$, $(x \vee 1) = 1$, $(x \cdot 1) = x$.

ФОРМУЛА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Функцию $y = f(x_1, x_2,..x_n)$, значение которой и значения компонент аргумента принадлежат множеству {0, 1}, называют ***булевой***, а аргумент – ***булевым вектором.*** Компоненты булевого вектора называют ***булевыми*** (или ***двоичными***) ***переменными***.

Алгебраическое выражение булевой функции, использующее только булевы переменные булевого вектора и только логические связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, называют ***формулой***.

Если даны булевы переменные x_i, x_j, то элементарными формулами являются F =□x_i, F=]x_j, $F= (x_i \vee x_j)$, $F = (x_i \cdot x_j)$, а производными формулами F=]F, $F = (F_i \vee F_j)$, $F = (F_i \cdot F_j)$.

ФОРМУЛА БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Для описания функции формулами используют два правила: ***подстановки*** и ***замещения***.

Пусть даны равносильные формулы F_i и F_j, т. е. ($F_i = F_j$), которые содержат переменную x. Если всюду в формулы F_i и F_j вместо x подставить произвольную формулу F, то будут получены также равносильные между собой формулы F'_i и F'_j, т. е. $F'_i = F'_j$.

Пусть дана формула ($F_i = F_j$) и существует формула F_k, равносильная только одной подформуле F_i, т. е. ($F_i = F_k$). Тогда F_i может быть замещена формулой F_k и получена новая формула ($F_k = F_j$). При этом не обязательно ее замещение всюду в алгебраическом выражении булевой функции.

ОПИСАНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

При ***табличном описании*** булевой функции необходимо для каждого набора двоичных переменных булевого вектора указывать её значение. Если значение функции определено не для всех наборов булевого вектора, то функцию называют частично определённой.

Число строк таблицы детерминированной функции от n компонентов аргумента равно 2^n.

x_1	x_2	…	x_n	$f(x_1;x_2;\ldots\ldots x_n)$
0	0	…	0	0
1	0	…	0	0
0	1	…	0	1
1	1	…	0	1
…	…	…	…	……
1	1		1	0

При ***аналитическом описании*** булевой функции используют элементарные унарные и бинарные операторы булевой алгебры, а также правила подстановки и замещения при формировании формул булевой функции.

Число логических функций для n компонентов аргумента определяется выражением: 2^p, где $p=2^n$.

ОПИСАНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Для n = 1 число возможных значений логической функции равно 4.

Анализ таблицы позволяет дать определение каждой из четырёх логических функций:

X	y=f(x)			
	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0(x)$ – функция-константа “0”, т.к. она не изменяет своего значения при изменении аргумента, т.е. (y = 0);

$f_1(x)$ – функция-повторитель, т.к. она принимает значения, равные значению аргумента, т.е. (y = x);

$f_2(x)$ - функция-инверсия (или отрицания), т.к. она принимает значения противоположные значению аргумента, т.е. (y =□x);

$f_3(x)$ - функция-константа “1”, т.к. она не изменяет своего значения при изменении аргумента, т.е. (y = 1).