

**Математические понятия
и методика их изучения
в школьном курсе математики**

**ТМОМ
Методические основы
обучения математике**

План

1. **Математические понятия (сведения из логики)**
 - a) Сущность математических понятий;
 - б) Логические характеристики понятий: содержание, объем;
 - с) Пути конструирования понятий;
 - d) Классификация понятий
2. **Определения математических понятий**
 - a) Способы определения, структура определения;
 - б) Виды определений
 - с) Требования к корректности определений
3. **Методики изучения понятий и схемы их применения**
 - a) Методы формирования понятий;
 - б) Организация усвоения понятий (этапы формирования);
 - с) Основные приемы действий с понятиями;
 - d) Система упражнений, направленная на формирование понятия.

Сущность математических понятий

Понятие – форма мышления, отражающая общие и существенные свойства и отношения вещей и явлений материального мира.

Математическое понятие – отражение в мышлении отличительных свойств форм и количественных отношений действительного мира.

В познании понятия выражаются с помощью признаков посредством речи и символов

Признаки понятия

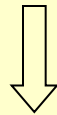
Признак – все то, с помощью чего объекты можно распознать, описать, в чем объекты могут быть сходными или различными



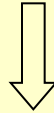
Существенные признаки - каждый из которых необходим, все вместе они достаточны, чтобы отделить данное понятие от других

Образование понятия

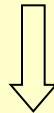
Выделение с помощью анализа признаков объекта



Соединение с помощью синтеза существенных признаков объекта



Отбрасывание с помощью абстрагирования несущественных признаков



Образование с помощью обобщения единого целого, являющегося понятием

Логические характеристики понятия

Содержание понятия - совокупность всех существенных признаков объектов, охватываемых данным понятием.

Объем понятия – совокупность всех объектов, на которое распространяется это понятие, к которым оно может быть применено.

Содержание и объем понятия жестко связаны между собой: изменение содержания влечет изменение объема и наоборот.

Закон обратного отношения

- Чем уже объем понятия, тем шире его содержание;
- Чем шире объем понятия, тем уже его содержание.

Родовидовое отношение между ПОНЯТИЯМИ

Если объем одного понятия входит в объем другого понятия, то

- понятие с меньшим объемом называется **«ВИДОВЫМ»**,
- понятие с большим объемом называется **«РОДОВЫМ»**.

Если в понятие входит только один элемент, оно называется **«ЕДИНИЧНЫМ»**

Виды понятий (по соотношению объемов)

- **Сравнимыми** называются понятия, если можно указать общий для них универсум (множество объектов, в терминах которого определяются понятия).
- **Совместными** называются понятия, объемы которых имеют общие элементы
- **Равнозначными** называются понятия, объемы которых полностью совпадают.
- **Пересекающимися** называются понятия, объемы которых частично совпадают.
- **Находящимися в отношении включения** называются понятия, если объем одного входит в объем другого.

Характеристики признаков понятия

Пусть понятие A включает класс объектов X

- Признак a называется **необходимым** или основным признаком понятия A , если признаком a обладает любой объект из X .
- Признак a называется **отделимым** признаком понятия A , если признаком a обладают только некоторые объекты из X .
- Признак a называется **противоречивым** признаком понятия A , если признаком a не обладает ни один объект из X .

Конструирование новых понятий

Осуществляется с помощью трех логических операций:

- обобщения,
- ограничения,
- классификации.

Обобщение понятий

Обобщение понятия – логическая операция конструирования нового понятия с большим объемом, чем данное (т.е. переход от видового к родовому понятию).

Обобщение понятий происходит путем отбрасывания из содержания понятия основных признаков понятия до тех пор, пока не получится предельно широкое понятие, называемое категорией (время, пространство, форма, количество, отношение), или к неопределяемому понятию, описываемому через категории.

Ограничение понятий

Ограничением понятий - логическая операция конструирования нового понятия с меньшим объемом, чем данное (т.е. переход от родового к видовому понятию).

Ограничение понятия происходит добавлением к содержанию понятия отделяемого признака до тех пор, пока не получим единичное понятие, не имеющее отделяемого признака.

Классификация понятий

Классификация понятий -

последовательное многоступенчатое разделение множества объектов на классы с помощью некоторого свойства (или свойств)

Классификации считается правильной, если:

- признак, по которому проводится классификация остается неизменным в процессе классификации;
- понятия, получаемые в классификации - взаимонезависимые;
- сумма объемов понятий, получаемых при классификации, равна объему исходного понятия;
- в процессе классификации осуществляется переход к ближайшему в родовом понятии

Виды классификаций

- **дихотомическая** (трихотомическая), где осуществляется многоступенчатое разбиение на два (три) противоречащих понятия;
- **иерархическая**, где каждый член является соподчиненным понятием;
- **последовательная**, где классификация проводится по нескольким основаниям.

При помощи классификации на основе сходства и различий объектов раскрывается объем понятия.

Определение понятия

Трактовки термина **«определение понятия»**:

- **логическая операция**, при помощи которой раскрывается содержание нового понятия через перечисление его существенных признаков;
- **математическое предложение**, в котором раскрывается содержание понятия через перечисление совокупности условий, необходимых, и достаточных для отделения класса объектов, принадлежащих какому-либо понятию, и вводится термин, обозначающий

Что значит определить понятие?

- С точки зрения логической операции – это значит свести его к уже известным понятиям и тем самым раскрыть его содержание.
- В результате этой операции и появляется математическое предложение, именуемое как определение понятия.

Типы определения понятия

- **Остенсивное определение** – описание объекта с помощью модели через показ, демонстрацию.
- **Вербальное определение** – описание объекта словами.
- **Явное определение** – прямое указание на существенные признаки понятия. Определяемое и определяющее понятия выражены четко и однозначно.
- **Неявное определение** - не содержит четкого и однозначного определяющего элемента, содержание определяемого понятия

Структура определений понятия

- **КОНЪЮНКТИВНАЯ** структура – в определении все признаки связаны союзом «И»;
- **ДИЗЪЮНКТИВНАЯ** структура – в определении признаки связаны союзом «ИЛИ»;
- **ИМПЛИКАТИВНАЯ** структура – в определении признаки связаны отношением следования (в терминах «если ..., то...»)

Виды определений

(в зависимости от определяемого объекта)

Номинальные определения – вводятся новые символы, термины, выражения или уточняется смысл ранее введенных объектов.

Реальные определения – фиксируются свойства новых определяемых объектов.

Виды определений

(в зависимости от способа выделения видовых отличий)

Характеристические определения, в которых указывается ближайший род и перечисляются видовые отличия понятия.

Генетические (конструктивные) определения, в которых описывается или указывается способ происхождения или образования понятия.

Рекурсивные (индуктивные) определения, в которых указываются исходные (базисные) объекты некоторого множества и правила, позволяющие получать другие объекты этого же множества.

Условные определения, в которых вводится

некоторое соглашение, суть договоренности

Формально-логические требования корректности определений

- признаков должно быть достаточно, чтобы отделять данное понятие от других;
- количество признаков должно быть минимальным для отделения данного понятия;
- признаки должны быть независимыми.

Логико – математический анализ определения понятия

- определение способа получения нового понятия;
- определение типа и вида определения;
- определение структуры определения;
- раскрытие математического содержания каждого элемента определения (термин, род, видовые отличия);

• определение корректности

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны

- Конструируется с помощью ограничения: к свойствам прямоугольника добавляется отдельный признак равенства всех сторон.
- Определение явное и реальное: с помощью слов фиксируются свойства квадрата.
- Структура конъюнктивная: признаки соединены союзом «и».
- Ближайший род – прямоугольник.
- Видовые отличия задаются перечислением: все стороны равны.
- Определение не вполне корректное: избыточное.

Формирование понятия – длительный процесс

Начальные этапы работы с понятием

- **Профессиональный** – выполнение логико-математического анализа, выбор методов работы, отбор содержания.
- **Подготовительный** – актуализация необходимых знаний учащихся, установление связей с субъектным опытом ребенка, мотивация.
- **Введение понятия и его определения** – организация знакомства и первичное усвоение понятия и его определения учащимися.

Введение понятия и его определения

Схема применения конкретно- индуктивного метода

- анализируется эмпирический материал, при этом привлекаются такие мыслительные операции как сравнение, классификация, абстрагирование;
- через обобщение выделяются признаки, характеризующие новое понятие;
- на основе синтеза конструируется формулировка определения, вводится термин, обозначающий понятие;
- рассматриваются примеры и контрпримеры;
- понятие и его определение усваивается в процессе его дальнейшего применения.

Схема применения абстрактно- дедуктивного метода

- формулируется принятое в науке (или учебнике) определение нового понятия;
- через рассмотрение частных примеров и контрпримеров осуществляется конкретизация определения;
- понятие и его определение усваиваются в процессе дальнейшего применения.

Усвоение понятия

- **Раздельный метод** – сначала происходит запоминание формулировки определения. А затем формируется навык ее применения.
- **Компактный метод** – запоминание формулировки происходит одновременно с приобретением навыка по ее применению.
- **Алгоритмический метод** – запоминание и формирование навыка происходят в процессе выполнения предписаний алгоритма.

Этапы организации усвоения понятия (в соответствии с концепцией обогащающей модели обучения М.А. Холодной)

- **Мотивировка** - создание условий для осознания учащимися недостаточности их прошлого математического опыта.
- **Категоризация** – введение знаково-символического обозначения нового понятия, ориентация ребенка на выделение отличительных признаков соответствующего понятия.
- **Обогащение** – накопление и дифференциация опыта оперирования вводимым понятием, расширение возможных ракурсов осмысления его содержания.
- **Перенос** – применение усваиваемого понятия в разных ситуациях, в том числе и в условиях самостоятельного выстраивания отдельных аспектов его содержания.
- **Свертывание** – представление образа понятия в

Организация обучения учащихся работе с ПОНЯТИЯМИ

(в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина)

- формирование мотивации введения нового понятия;
- представление основного содержания подлежащего усвоению понятия в краткой схематической форме, т.е. создание ООД;
- организация работы учащихся с понятиями, позволяющей контролировать и ее ход, и ее результат;
- организация постепенного перехода от пошагового контроля к самоконтролю

Основные приемы действий с определениями понятий

- **Подведение объекта под понятие** – распознавание объектов, принадлежащих объему данного понятия, установление факта возможности называть объект связанным с понятием термином.
- **Выведение следствий из определения понятия** – наделение конкретного объекта, именуемого термином, связанным с понятием, всеми характеристическими свойствами понятия, выделенными в определении.

Система упражнений, направленная на формирование понятий

Задачи и упражнения – основное средство формирования понятий.

Системообразующий фактор



**Этапы
формирования
понятия**
(система Г.И. Саранцева)

**Структура понятийной
познавательной
деятельности**
(система М.А. Холодной)

Система задач Г.И. Саранцева

- на мотивацию (практического характера);
- на построение объектов, удовлетворяющих выделенным свойствам;
- на распознавание объектов, принадлежащих объему понятия;
- на выделение следствий из определения понятия;
- на дополнение условий (для распознавания и выведения следствий) на составление родословной понятия;
- на применение понятий в разных ситуациях;
- на систематизацию понятий.

Система задач М.А. Холодной

- на формирования способности к словесно-образному переводу разной степени общности;
- на выделение признаков усвояемого понятия;
- на включение изучаемого понятия в систему связей с другими понятиями;
- на развитие мыслительных операций, лежащих в основе образования понятия;
- на подключение предметного опыта учащихся.

Благодарю за
внимание!