



Тольяттинский социально-педагогический университет

Преподаватель математических  
дисциплин: Лихачева Е.С.

# Учебный модуль 1

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Тема 1.1

Математические понятия, предложения, доказательства



## Предмет математики:

- Родовое понятие.
- Видовое отличие.





# Объем и содержание понятий.

**Понятие** - форма мышления, в которой отражаются существенные отличительные признаки предметов. (*Например: «апельсин», «фрукт», «трапеция», «белизна», «река Нил», «ураганный ветер»*)

**Признаком** предмета называется то, в чем предметы сходны друг с другом или чем они друг от друга отличаются.

**Содержанием** понятия называется совокупность существенных признаков, отраженных в этом понятии. (*Содержанием понятия «ромб» является совокупность двух существенных признаков: «быть параллелограммом» и «иметь равные стороны»*)





# Виды признаков

- Существенными называются такие признаки, каждый из которых, взятый отдельно, необходим, а все вместе взятые достаточны, чтобы с их помощью отличить (выделить) данный предмет (явление) от всех остальных и обобщить однородные предметы в класс. *(Например, одним из существенных признаков понятия «человек» является наличие сознания.)*
- Несущественные - это преходящие, второстепенные признаки, приобретая или теряя которые, предмет остается самим собой. *(Например, несущественным признаком понятия «человек» является цвет его волос, вес, рост и др.)*





# Родовое понятие и видовое отличие

Рассмотрим определение параллелограмма:  
*«Параллелограммом называется четырехугольник,  
противоположные стороны которого параллельны».*

Как видим, это определение построено так:

Сначала указано название объекта определяемого понятия — параллелограмм, затем указаны такие его свойства:

- 1) параллелограмм — это четырехугольник;
- 2) противоположные стороны параллельны.

Первое свойство — это указание того более общего понятия, к которому принадлежит определяемое понятие. Это более общее понятие называется **родовым** по отношению к определяемому понятию. В данном случае родовым понятием для параллелограмма является четырехугольник. Второе свойство — это указание **видового** свойства, которое отличает параллелограмм от других видов четырехугольника.







# Объем понятия

- Объем понятия - это множество предметов, каждому из которых принадлежат признаки, относящиеся к содержанию понятия.

*Например, объем понятия «река» включает в себя множество, состоящее из рек, носящих имена Обь, Иртыш, Енисей, Волга и др. Объём понятия «ученик» включает в себя всех людей, которые когда-либо учились (чему-нибудь и как-нибудь), учатся сейчас или будут учиться.*

*Автомобиль - транспортное средство, имеющее двигатель, кузов, колеса и устройство управления. Это **содержание** понятия, а его **объемом** являются все существующие в мире автомобили.*





# Задание

Укажите хотя бы один элемент объема понятия:

- 1. Президент
- 2. Алфавит
- 4. Текст
- 5. Поезд
- 6. Мелодия
- 7. Студенческая группа
- 9. МГУ имени М.В. Ломоносова
- 10. Вечный двигатель
- 11. Русский алфавит
- 12. Созвездие





# Высказывания и высказывательные формы

**Высказыванием** в математике называют предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

*Например, предложения 1, 2, 4, 5 и 6 приведенные выше, есть высказывания, причем предложения 1, 4, 5 и 6 – истинные, 2 – ложное.*

Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., Z. Если высказывание A *истинно*, то записывают: A – «и», если же высказывание A – *ложно*, то пишут: A – «л».

«**Истина**» и «**ложь**» называются значениями истинности высказывания. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно, быть одновременно тем и другим оно не может.







- Предложение  $x+5=8$  не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать: истинно оно или ложно. Однако при подстановке конкретных значений переменной  $x$  оно обращается в высказывание: истинное или ложное. *Например, если  $x=2$ , то  $2+5=8$  – ложное высказывание, а при  $x=3$  оно обращается в истинное высказывание  $3+5=8$ .* Предложение  $x+5=8$  называется **высказывательной формой**. Оно порождает множество высказываний одной и той же формы.
- По числу переменных, входящих в высказывательную форму, различают одноместные, двухместные и т.д. высказывательные формы и обозначают:  $A(x)$ ,  $A(x,y)$  и т.д. *Например,  $x+5=8$  – одноместная высказывательная форма, а предложение «Прямая  $x$  параллельна прямой  $y$ » – двухместная.*





# Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание высказываний и высказывательных форм

## 1. Отрицание.

Эта логическая операция соответствует в обыденной жизни частице «не».

- **Отрицанием** высказывания  $x$  называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание  $x$  ложно, и ложным, если высказывание  $x$  истинно.
- Отрицание высказывания  $x$  обозначается  $\bar{x}$  и читается «не  $x$ ». Логические значения высказывания можно описать с помощью таблицы, которая называется *таблицей истинности*:

$x$	$\bar{x}$
1	0
0	1







# Дизъюнкция (логическое сложение).

- Дизъюнкцией двух высказываний  $x$ ,  $y$  называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний  $x$  или  $y$  истинно и ложным, если они оба ложны.
- Дизъюнкция высказываний  $x$ ,  $y$  обозначается  $x \vee y$  и читается « $x$  или  $y$ ». Логические значения дизъюнкции описываются таблицей истинности:

$x$	$y$	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*Пример.*

$x$  – « $5 > 3$ »,  $y$  – « $2 > 4$ ». Тогда  $x \vee y$  – « $5 > 3$ »  
« $2 > 4$ » истинно, так как истинно  
высказывание  $x$ .





# Конъюнкция

- Конъюнкцией двух высказываний  $x$ ,  $y$  называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания  $x$ ,  $y$  истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

- Конъюнкция высказываний  $x$ ,  $y$  обозначается  $x \wedge y$  и читается « $x$  и  $y$ ». Высказывания  $x$ ,  $y$  называются членами конъюнкции. Логические значения конъюнкции

описываются следующей таблицей истинности:

$x$	$y$	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

*Пример*  
 $x$  – «6 делится на 2»,  $y$  – «6 делится на 3». Тогда  $x \wedge y$  – «6 делится на 2»  $\wedge$  «6 делится на 3» истинно.





# Способы математического доказательства

**Определение: Математическое доказательство** — рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утверждения (теоремы), цепочка логических умозаключений, показывающая, что при условии истинности некоторого набора аксиом и правил вывода утверждение верно.





# Прямое доказательство

- **Прямое** доказательство предусматривает применение только непосредственного дедуктивного вывода из считающихся верными утверждений (аксиом, ранее доказанных лемм и теорем), без использования суждений с отрицанием каких-либо утверждений.
- **Индуктивный** метод, позволяющий перейти от частных утверждений ко всеобщим, наиболее интересен в применении к бесконечным совокупностям объектов, но её формулировки и применимость существенно отличаются в зависимости от сферы применения.
- Доказательства **от противного** устроены так. Делают предположение, что верно утверждение В, противное, то есть противоположное, тому утверждению А, которое требуется доказать, и далее, опираясь на это В, приходят к противоречию; тогда заключают, что, значит, В неверно, а верно А.







# Доказательство методом перебора

Требуется доказать, что среди целых неотрицательных чисел, меньших числа 420, нет других корней уравнения

$$(x+2008)(x-3)(x-216)(x-548)=0,$$

кроме чисел 3 и 216. Доказательство: последовательно перебирая числа 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, ..., 213, 214, 215, 217, 218, 219, ..., 417, 418, 419 и подставляя их в уравнение, убеждаемся, что ни одно из них не обращает в нуль левую часть. Это есть типичное доказательство **методом перебора.**





# Кванторы

- $\forall$  - квантор всеобщности
- $\exists$  - существования
- $\Rightarrow$  - следование
- $\Leftrightarrow$  - равносильность
- $\wedge$  и  $\vee$  - Конъюнкция и дизъюнкция
- $\neg$  - отрицание
- $=$  - равенство
- $\in$  и  $\notin$  - Принадлежность и непринадлежность
- $\subseteq$  и  $\supseteq$  - подмножество и надмножество
- $\{ \}$  – множество ( $\{ | \}$  - Множество элементов, удовлетворяющих условию)
- $\emptyset$  - пустое множество
- $\cup$  и  $\cap$  - объединение и пересечение







## Решение задач на распознавание объектов.

- Дайте определение квадрата через понятие прямоугольник. Пользуясь данным определением, укажите условия, при котором фигура будет являться квадратом

-Выявите логическую структуру следующих предложений

Параллельные прямые- это две прямые принадлежащие плоскости и непересекающиеся или совпадающие.



# Построение высказываний с кванторами.

- **Квáнтор** — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката и создающих высказывание. Чаще всего упоминают:
- **Квантор всеобщности** (обозначение:  $\forall$ , читается: «для любого...», «для каждого...», «для всех...» или «каждый...», «любой...», «все...»).
- **Квантор существования** (обозначение:  $\exists$ , читается: «существует...» или «найдётся...»).
- **Предика́т** (лат. *praedicatum* — заявленное, упомянутое, сказанное) — это то, что утверждается о субъекте. Субъектом высказывания называется то, о чём





# Пример

- Обозначим  $P(x)$  предикат « $x$  делится на 5». Используя *квантор всеобщности*, можно формально записать следующие высказывания (конечно, ложные):
- любое натуральное число кратно 5;
- каждое натуральное число кратно 5;
- все натуральные числа кратны 5;
- следующим образом:  $(\forall x \in \mathbb{N})P(x)$



# Пример

- Следующие (уже истинные) высказывания используют *квантор существования*:
- существуют натуральные числа, кратные 5;
- найдётся натуральное число, кратное 5;
- хотя бы одно натуральное число кратно 5.
- Их формальная запись:  $(\exists x \in \mathbb{N})P(x)$







## Задание:

Записать, используя кванторы, высказывания и определить ложно оно или истинно:

1. Существует целое четное число
2. Все целые числа четные
3. Найдется простое натуральное число
4. Любое натуральное число является простым
5. Множество всех простых чисел является подмножеством натуральных чисел.





# Решение:

## 1. Существует целое четное число

Введем предикат  $P(x)$  – « $x$  - четное», получим:

$(\exists x \in \mathbb{Z})P(x)$ . Читается «существует целое число  $x$ , которое четно». Истинно, так как среди целых чисел есть четные (2, 4, 6, ...).

## 2. Все целые числа четные

$(\forall x \in \mathbb{Z})P(x)$ . Читается «любое целое число  $x$  - четное». Ложно, так как не все целые числа четные (1, 3, 5, ...).

## 3. Найдется простое натуральное число

Введем предикат  $P(x)$  – « $x$  - простое число», получим запись  $(\exists x \in \mathbb{N})P(x)$ .

Читается «существует натуральное число  $x$ , которое делится только на себя и на единицу». Истинно, так как среди натуральных чисел найдутся простые (2, 3, 5, 7, 11, 13, ...).

## 4. Любое натуральное число является простым

$(\forall x \in \mathbb{N})P(x)$ . Читается «любое натуральное число - простое». Ложно, так как среди натуральных чисел есть такие, которые простыми не являются (4, 6, 9, ...)

## 5. Множество всех простых чисел является подмножеством натуральных чисел.

Пусть существует множество  $M$  простых чисел  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , и множество  $N$  натуральных чисел  $n_1, n_2, \dots, n_n$ . Все элементы  $M$  также принадлежат множеству  $N$ . Введем предикат  $P(x)$  – « $x$  - натуральное». Получим равносильные записи:

$(\forall m \in \mathbb{N})P(x)$  и  $M \subseteq N \Leftrightarrow N \supseteq M$ . Читается «каждое натуральное число  $m$  является натуральным. Множество  $M$  является подмножеством множества  $N$ ,





# Самостоятельно

подготовить рефераты на темы:

- «Этапы развития математики»,
- «Роль математики в интеллектуальном развитии человека»,
- «Роль математики в техническом развитии».

