



ITMO UNIVERSITY

Saint Petersburg, Russia

# Математические преобразования в МР- томографии

# План лекции

- Двумерное преобразование Фурье
  - Преобразование Фурье
  - Теорема о свертке
  - Фильтрация изображений
- Преобразование Радона
  - Преобразование Радона
  - Теорема о центральном слое
  - Filtered back projection

# Одномерное преобразование Фурье

Прямое преобразование сигнал во времени в спектр по частоте

$$F(\omega) = FT\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt$$

Обратное преобразование переводит спектр в сигнал по времени

$$f(t) = FT^{-1}\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i2\pi\omega t} d\omega$$

# Двумерное преобразование Фурье

Аналогично одномерному случаю – прямое преобразование

$$F(u, v) = FT\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xu+uy)} dx dy$$

И обратное преобразование

$$f(x, y) = FT\{F(u, v)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{i2\pi(xu+uy)} dx dy$$

# Двумерное дискретное преобразование Фурье

Для дискретного набора данных – прямое преобразование

$$F(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(m, n) e^{-i2\pi(mu+nv)}$$

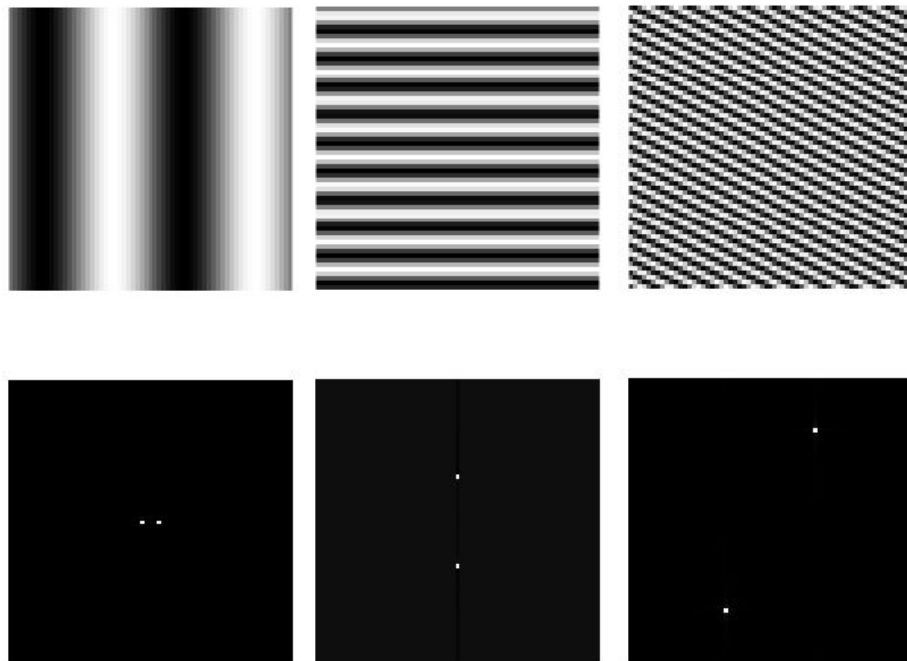
И обратное преобразование

$$f(m, n) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{i2\pi(mu+nv)}$$

# Двумерное преобразование Фурье

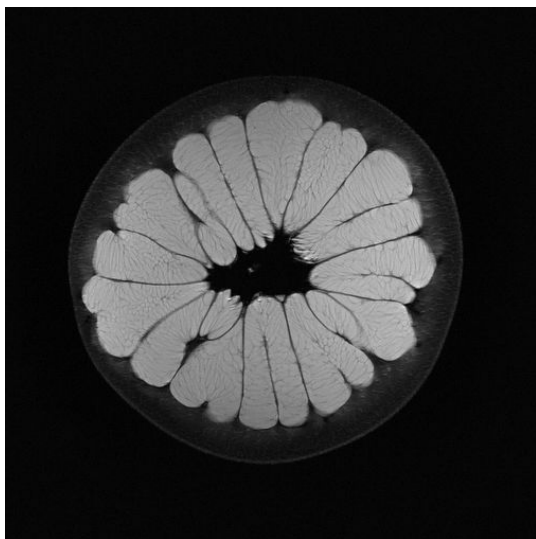
Как и в случае одномерного преобразования Фурье, двумерное преобразование является сменой базиса разложения функций

Для одномерного преобразования – одномерные гармоники, для двумерного - двумерные

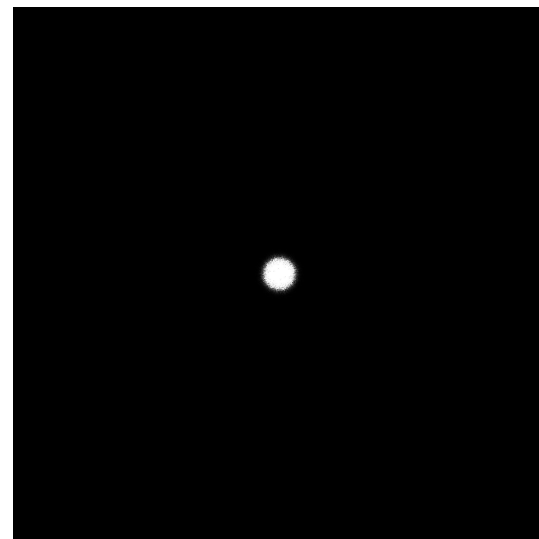
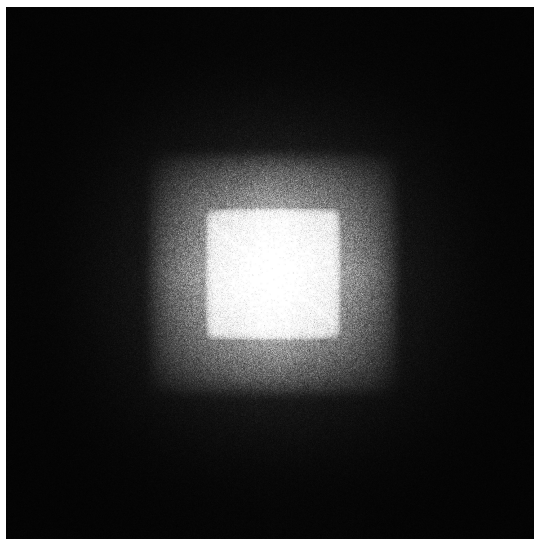


# Изображение и его пространственный спектр

Изображение

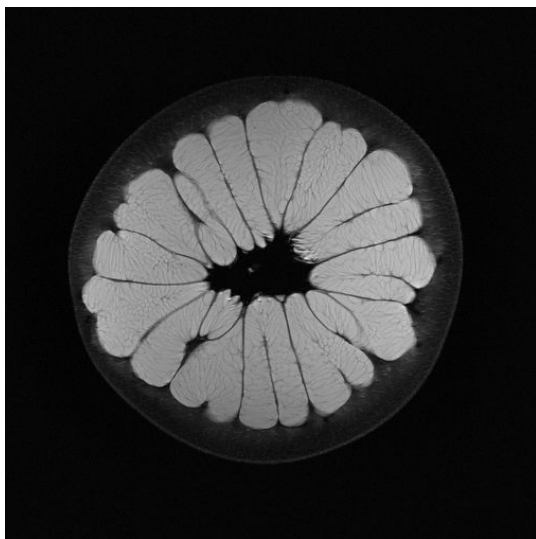


Спектр

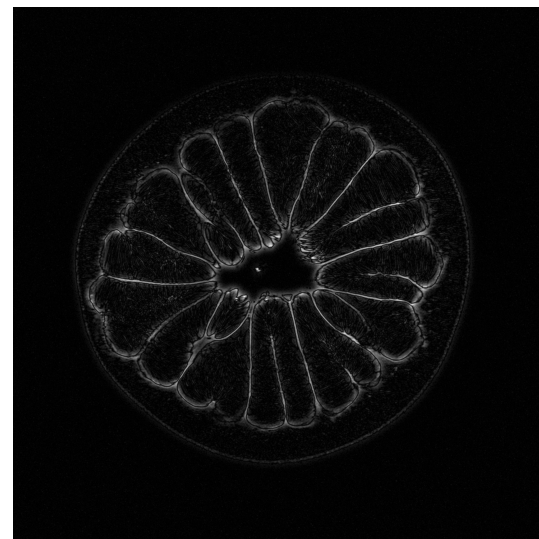
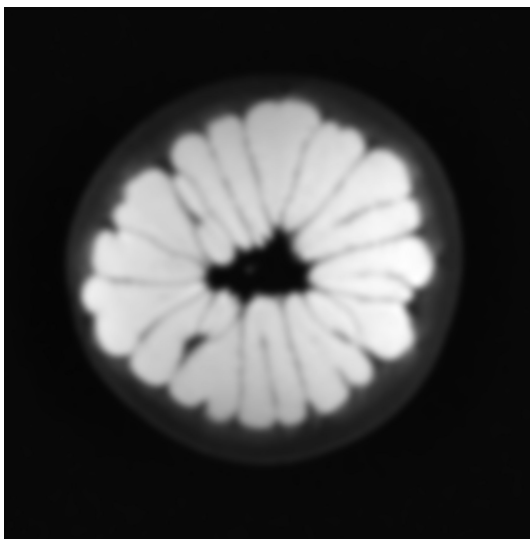


# Изображение и его пространственный спектр

Изображение



LP





# Дискретная двумерная свертка

Для двух дискретных функций свертка определяется, как

$$f(m, n) * h(m, n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(m - k, n - l)h(k, l)$$

Пределы суммирования могут варьироваться в зависимости от областей определения функций

Свертка функции представляет собой точки оригинальной функции, взвешенные ядром свертки  $h$

# Связь свертки и преобразования Фурье

Теорема о свертке

$$FT\{f(m, n) * h(m, n)\} = FT\{f(m, n)\} \cdot FT\{h(m, n)\}$$

$$FT\{f(m, n) * h(m, n)\} = \sum_{m,n} \sum_{k,l} f(m-k, n-l)h(k, l)e^{-i2\pi(mu+nv)} =$$

$$= \sum_{m,n} \sum_{k,l} f(m-k, n-l)h(k, l)e^{-i2\pi((m-k)u+(n-l)v)}e^{-i2\pi(ku+lv)} =$$

$$= \sum_{m',n'} \sum_{k,l} f(m', n')e^{-i2\pi(m'u+n'v)}h(k, l)e^{-i2\pi(ku+lv)}$$

# Свертка, как фильтр

Так как результатом свертки является модификация каждого значения функции  $f$ , то операцию свертки можно использовать для создания фильтров

Например, для размытия изображения, повышения резкости, поиска краёв изображения и других.

# Ядро усреднения

Рассмотрим действие ядра

$$h = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Из определения свертки – сопоставит значению функции значение, усредненное с 8 соседними

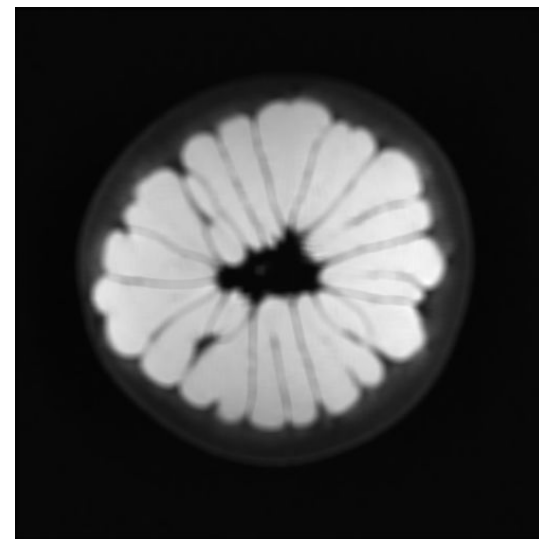
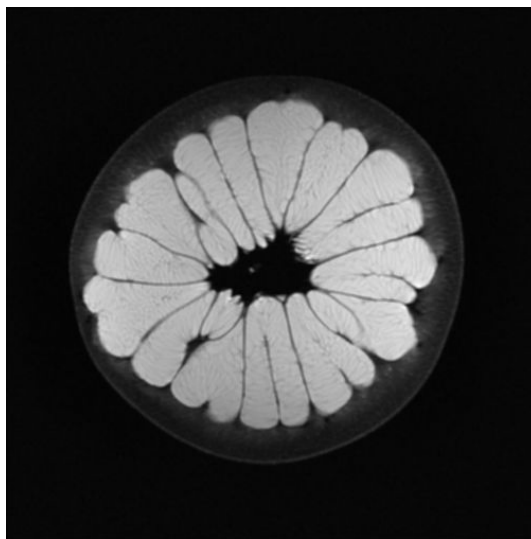
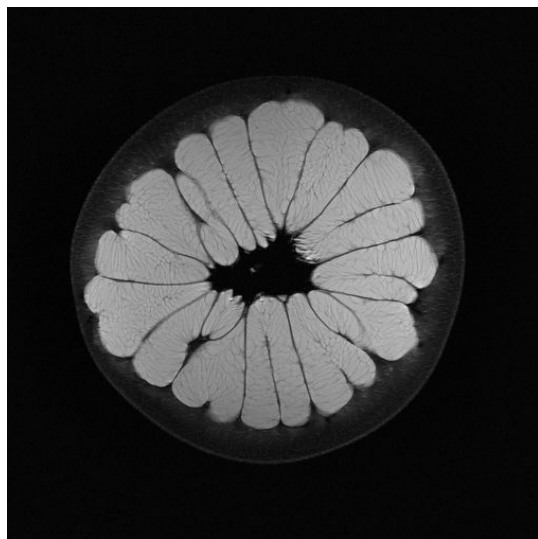
В общем случае

$$h = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

# Ядро размытия

Примеры действия ядра

3x3



# Ядро усреднения по Гауссу

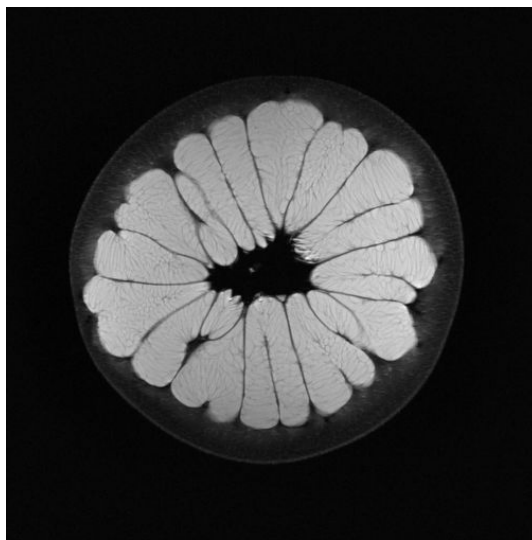
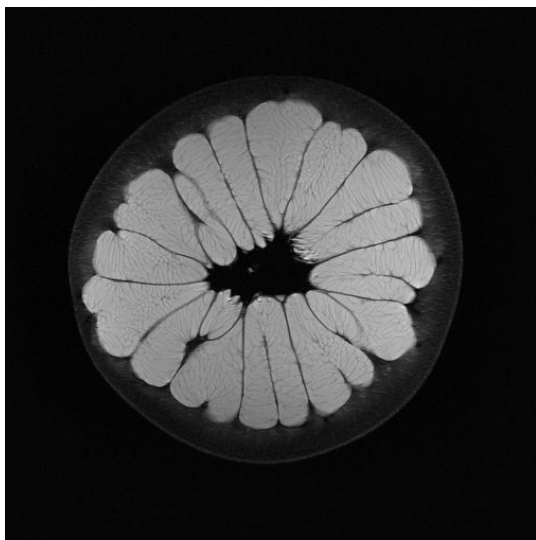
Рассмотрим действие ядра

$$h = \begin{bmatrix} 0.0133 & 0.0838 & 0.0133 \\ 0.0838 & 0.6193 & 0.0838 \\ 0.0133 & 0.0838 & 0.0133 \end{bmatrix} = e^{-\frac{m^2+n^2}{2\sigma}}$$

При выборе большого  $\sigma$  – фильтр размытия (усреднения)

При малом  $\sigma$  – не влияет на изображение

# Усреднение по Гауссу



# Градиент (производная первого порядка)

Ядро Превицта (в зависимости от направления взятия производной)

$$h = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ядро Собеля

$$h = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

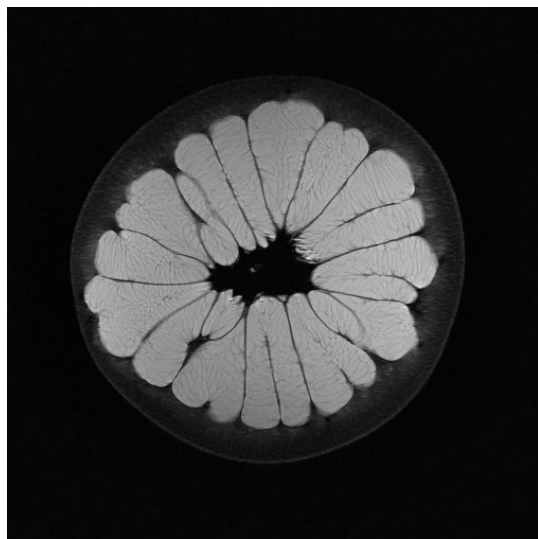
$$h = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

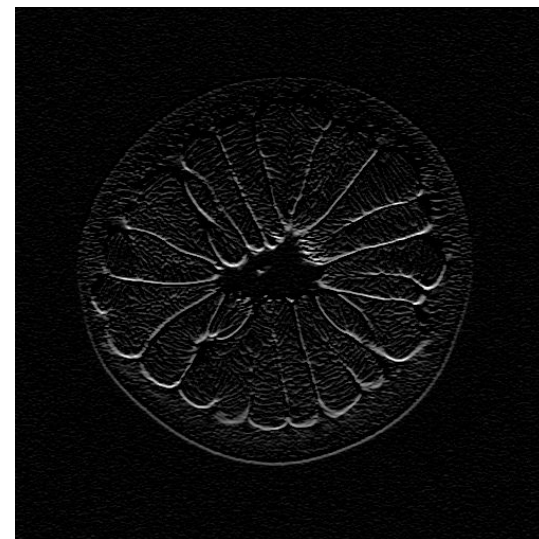
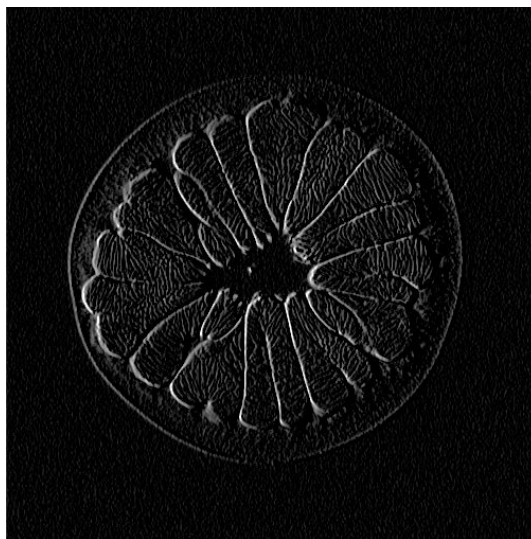


# Ядро Превитта

Примеры действия ядра

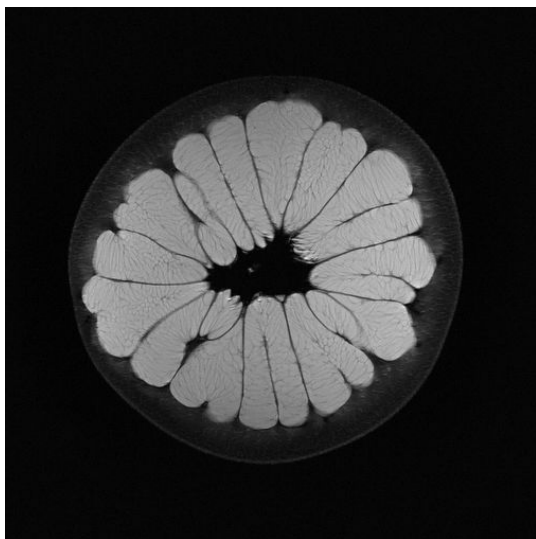


$dx$

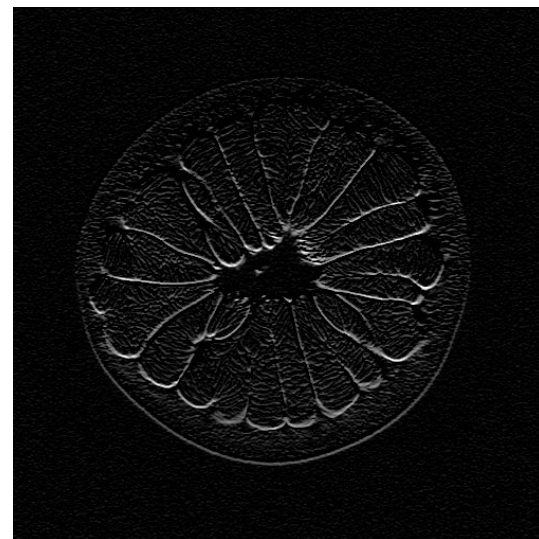
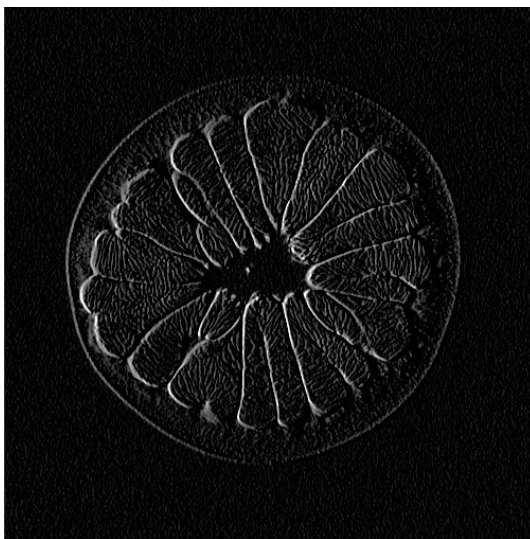


# Ядро Собеля

Примеры действия ядра



$dx$



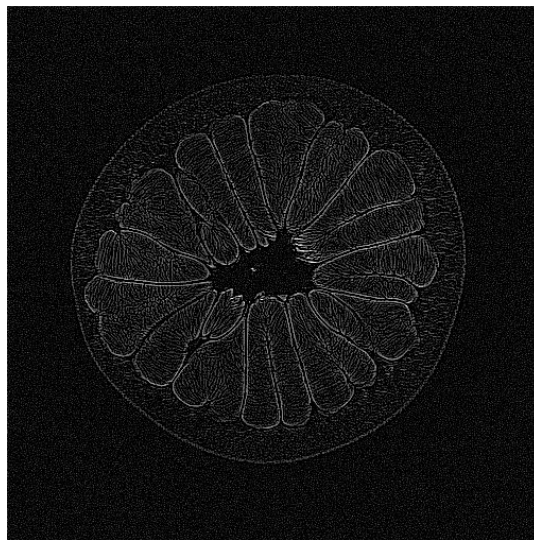
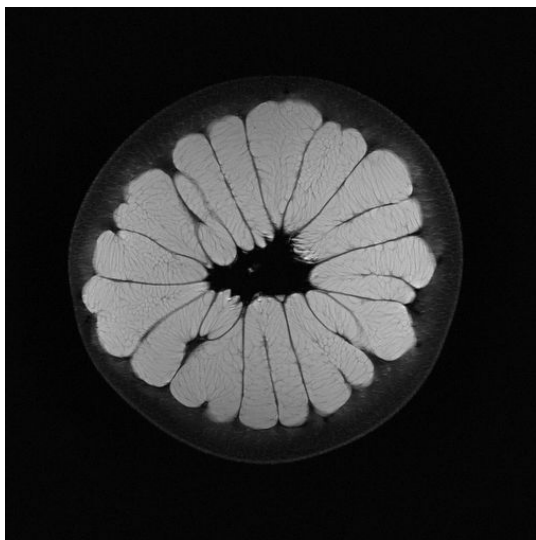
# Лапласиан

Сочетание двух производных второго порядка по двум координатам

Форма – из численной аппроксимации второй производной для дискретных функций

$$h = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

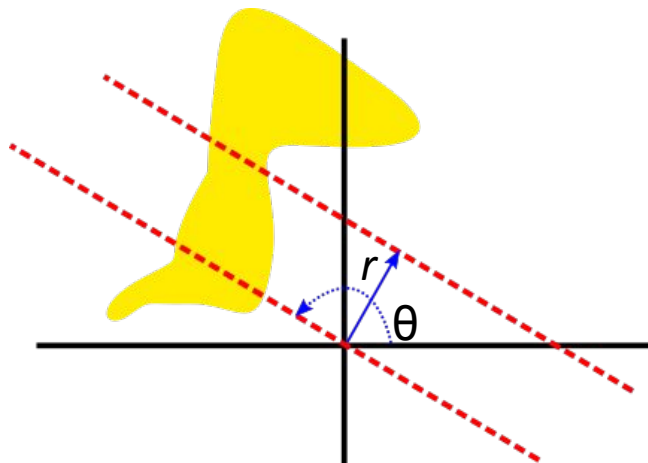
# Лапласиан



# Преобразование Радона

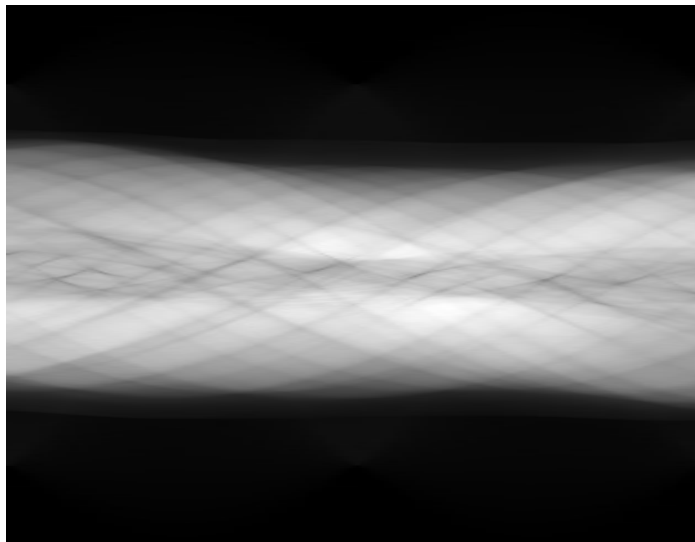
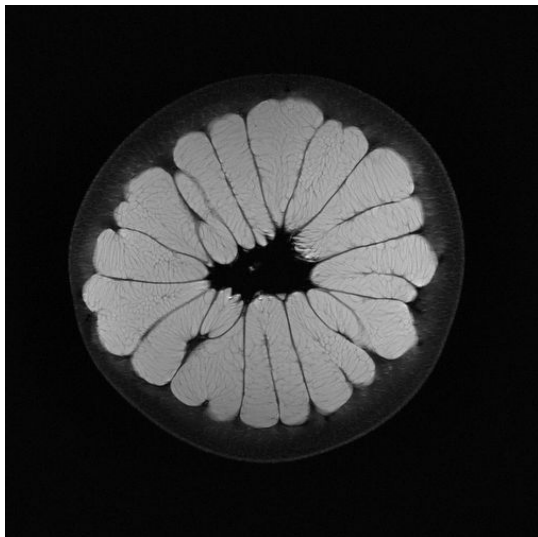
Прямое преобразование: переводит двумерную функцию в её интеграл вдоль произвольной оси

$$F(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - r) dx dy$$



# Преобразование Радона

Пример преобразования



# Обратное преобразование Радона

Обратное преобразование радона (алгоритм обратной проекции)

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} F(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

И его дискретная модель

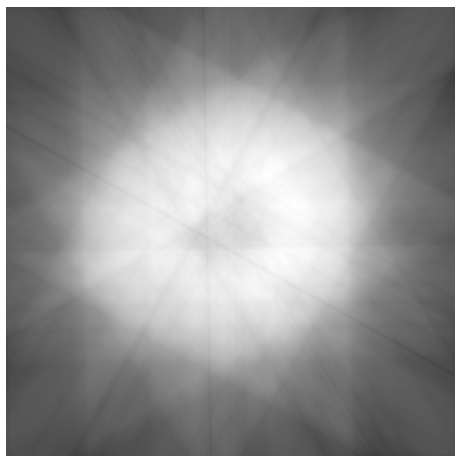
$$f(m, n) = \Delta\theta \sum_{i=0}^N F(m \cos \theta_i + y \sin \theta_i, \theta_i)$$



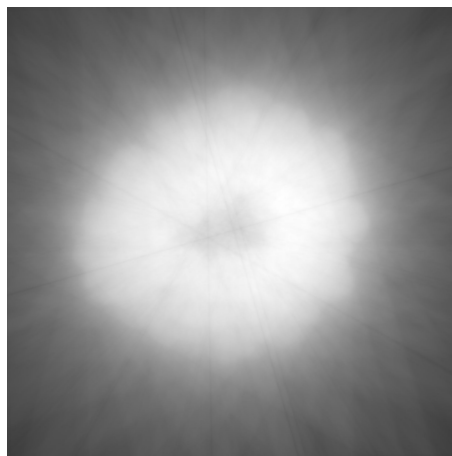
# Обратное преобразование Радона

Точность реконструкции зависит от числа проекций

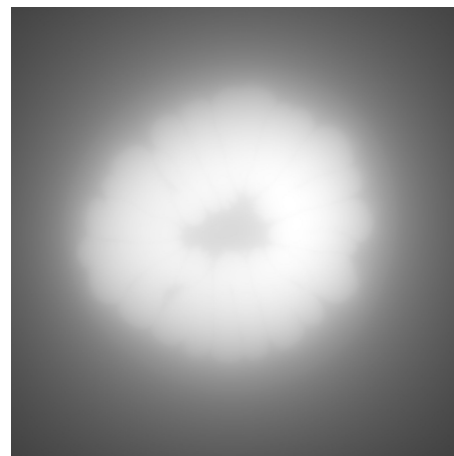
5



12



180



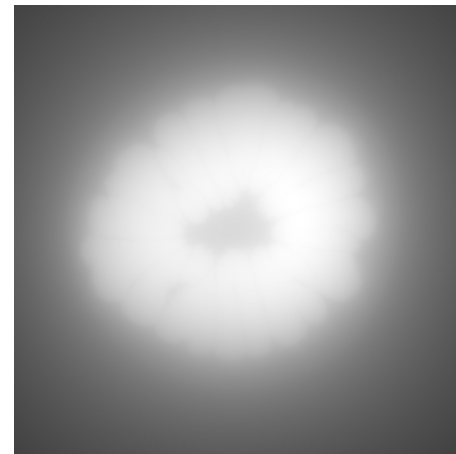


# Обратное преобразование Радона

Однако, даже при большом числе проекций реконструкция получается неточной

Для точечного источника реконструкция имеет вид  $1/r$

Для практической реконструкции используется алгоритм отфильтрованной обратной проекции, основанной на теореме центрального сечения



# Теорема о центральном сечении

Фурье-преобразование проекции функции на ось является  
Фурье-образом функции вдоль линии, проходящей через  
центр координат под углом проекции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(r, \theta) e^{-i\omega r} dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - r) dx dy \right) e^{-i\omega r} dr$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(r, \theta) e^{-i\omega r} dr = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

# Алгоритм отфильтрованной обратной проекции

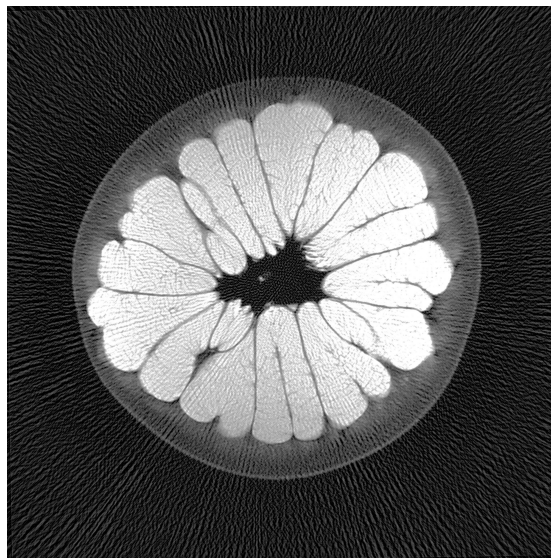
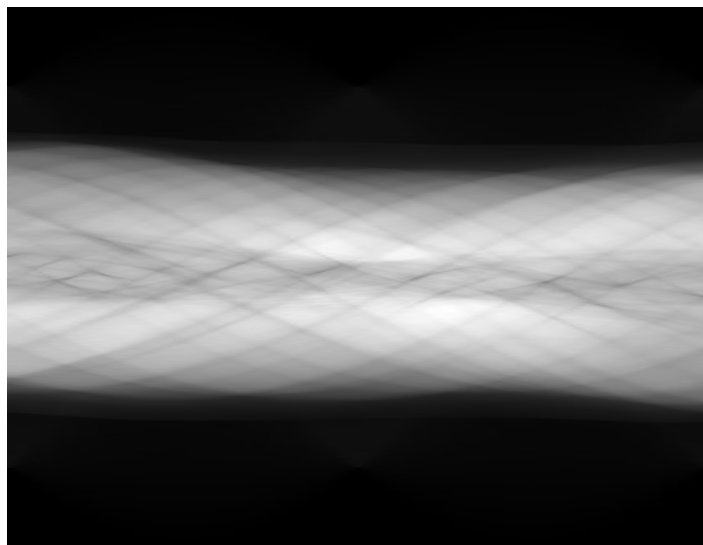
Предполагает реконструкцию исходного изображения из проекций, прошедших фильтрацию в частотном пространстве

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} F'(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$$F'(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| F(\omega, \theta) e^{-i2\pi r\omega} d\omega$$

# Алгоритм отфильтрованной обратной проекции

Пример преобразования



**Thank you for your attention!**

[www.ifmo.ru](http://www.ifmo.ru)

ITMO *re than a*  
**UNIVERSITY**