

Математические софизмы



Работу выполнил:
ученик 10 МБ класса МОУ «Лицей
№2»
Овсянников Илья
Научный руководитель:
Кузьменкова Наталья Яковлевна

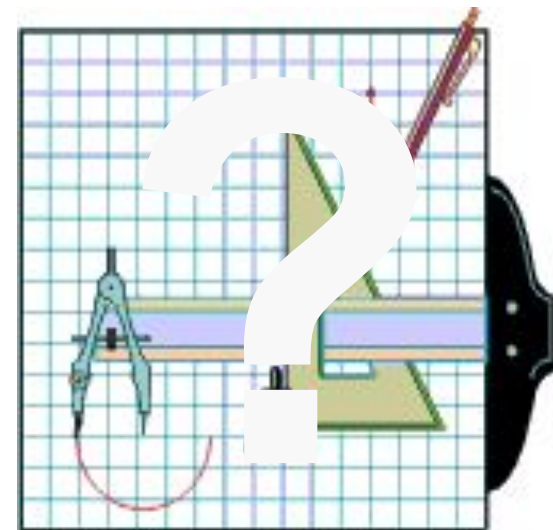
Что такое софизм?

Правильно понятая ошибка – это путь к
открытию

И. П. Павлов

Софизм (от греч. *sophisma* – уловка, выдумка, головоломка), формально кажущееся правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на преднамеренно неправильном подборе исходных положений.

Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Особенно часто в математических софизмах выполняются «запрещённые» действия или не учитываются условия применимости теорем, формул и правил. Иногда рассуждения ведутся с использованием ошибочного чертежа или опираются на приводящие к ошибочным заключениям «очевидности». Встречаются софизмы, содержащие и другие ошибки.



История софизмов

В истории развития математики софизмы играли существенную роль. Они способствовали повышению строгости математических рассуждений и содействовали более глубокому уяснению понятий и методов математики. Роль софизмов в развитии математики сходна с той ролью, какую играют непреднамеренные ошибки в математических исследованиях, допускаемые даже выдающимися математиками. Именно уяснение ошибок в математических рассуждениях часто содействовало развитию математики.

Пожалуй, особенно поучительна в этом отношении история аксиомы Евклида о параллельных прямых. Сформулировать эту аксиому можно так: через данную точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной (что одну прямую, параллельную данной, можно провести – это доказывается). Это утверждение на протяжении более чем двух тысяч лет пытались доказать, вывести из остальных аксиом геометрии, но все попытки не увенчались успехом. Полученные «доказательства» оказались ошибочными. И всё же, несмотря на ошибочность этих «доказательств», они принесли большую пользу развитию геометрии. Можно сказать, что они подготовили одно из величайших достижений в области геометрии и всей математики – создание неевклидовой геометрии. Честь разработки новой геометрии принадлежит нашему великому соотечественнику Н.И. Лобачевскому и венгерскому математику Яношу Бойяи. Н.И. Лобачевский и сам сначала пытался доказать аксиому параллельных, но скоро понял, что этого сделать нельзя. И путь, идя которым Лобачевский убедился в этом, привёл его к созданию новой геометрии. Этот замечательный вклад в математику был одним из тех, которые прославили русскую науку.



Евклид



Евклид

Н.И. Лобачевский

Чем полезны софизмы и что они дают?

Разбор софизмов прежде всего развивает логическое мышление, то есть прививает навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку – это значит осознать её, а осознание ошибки предупреждает от повторения её в других математических рассуждениях. Что особенно важно, разбор софизмов помогает сознательному усвоению изучаемого материала, развивает наблюдательность, вдумчивость и критическое отношение к тому, что изучается. Математические софизмы приучают внимательно и настороженно продвигаться вперёд, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записей и чертежей, за допустимостью обобщений. Всё это нужно и важно.

Наконец, разбор софизмов увлекателен. Чем труднее софизм, тем



Виды математических софизмов
(для подробного просмотра нажмите на выбранную строку)

- **Алгебраические софизмы**
- **Геометрические софизмы**

Алгебраические софизмы

Вот некоторые результаты решения софизмов:

(для подробного просмотра нажмите на выбранную строку)

Пример 1. $1 \text{ р.} = 10\,000 \text{ к.}$

Пример 2. $5 = 6$

Пример 3. $4 = 8$

Пример 4. $2 \cdot 2 = 5$

Пример 5. $5 = 1$

Пример 6. $4 = 5$

Пример 7. Любое число равно его половине

Пример 8. Расстояние от Земли до Солнца равно толщине волоска

Пример 9. Любое число $= 0$

Пример 10. Из двух неравных чисел первое всегда больше второго



Пример 1.

$$1 \text{ р.} = 10\,000 \text{ к.}$$

Возьмём верное равенство:

$$1 \text{ р.} = 100 \text{ к.}$$

Возведём его по частям в квадрат.

$$\text{Мы получим: } 1 \text{ р.} = 10\,000 \text{ к.}$$

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Возведение в квадрат величин не имеет смысла. В квадрат возводятся только числа.

Пример 2.

$$5 = 6$$

Попытаемся доказать, что $5 = 6$. С этой целью возьмём числовое тождество:

$$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54.$$

Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки.

Получим:

$$5(7 + 2 - 9) = 6(7 + 2 - 9).$$

Разделим обе части этого равенства на общий множитель (заключённый в скобки).

Получаем $5 = 6$.

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Общий множитель $(7 + 2 - 9)$ равен 0, а делить на 0 нельзя.

Пример 3.

$$4 = 8$$

Возьмём систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2 = -\frac{y}{2}. \end{cases}$$

Решим её способом подстановки.

Получим:

$$x = \frac{4 - y}{2} ;$$

$$4 - y + y = 8, \text{ т.е. } 4 = 8.$$

Вопрос:

В чём здесь дело?

Ответ (нажмите «Enter»):

Уравнения данной системы несовместны.

Пример 4.

$$2 \cdot 2 = 5$$

Имеем числовое равенство (верное): $4 : 4 = 5 : 5$.

Вынесем за скобки в каждой части его общий множитель.

Получим: $4 (1 : 1) = 5 (1 : 1)$.

Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.

Вопрос:

Где здесь ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества $4 : 4 = 5 : 5$.

Пример 5.

$$5 = 1$$

Из чисел **5** и **1** по отдельности вычтем одно и то же число **3**.

Получим числа **2** и **-2**.

При возведении в квадрат этих чисел получаются равные числа **4** и **4**. Значит, должны быть равны и исходные числа **5** и **1**.

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Из равенства квадратов двух чисел не следует, что сами эти числа равны.

Пример 6.

$$4 = 5$$

Имеем числовое равенство (верное):

$$16 - 36 = 25 - 45; \quad 16 - 36 + 20,25 = 25 - 45 + 20,25;$$

$$(4 - 4,5)^2 = (5 - 4,5)^2; \quad 4 - 4,5 = 5 - 4,5;$$

$$4 = 5.$$

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

~~$$(4 - 4,5)^2 = (5 - 4,5)^2 \leftrightarrow |4 - 4,5| = |5 - 4,5|.$$~~

Пример 7.

Любое число равно его половине

Возьмём два равных числа a и b , $a = b$. Обе части этого равенства умножим на a и затем вычтем из произведений по b^2 . Получим:

$$a^2 - b^2 = ab - b^2, \text{ или } (a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Отсюда $a + b = b$, или $a + a = a$, так как $b = a$.

Значит, $2a = a$, $a = \frac{a}{2}$.

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Нельзя делить на $(a - b)$, так как $(a - b) = 0$.

Пример 8.

Расстояние от Земли до Солнца равно толщине волоска

Пусть a (м) – расстояние от Земли до Солнца, а b (м) – толщина волоска. Среднее арифметическое их обозначим через v . Имеем:

$a + b = 2v$, $a = 2v - b$, $a - 2v = -b$. Перемножив по частям два последних равенства, получаем:

$a^2 - 2av = b^2 - 2bv$. Прибавим к каждой части v^2 . Получим:

$a^2 - 2av + v^2 = b^2 - 2bv + v^2$, или $(a - v)^2 = (b - v)^2$, т.е.

$(a - v) = (b - v)$, и, значит, $a = b$.

Вопрос:

Где здесь ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Ошибка как в примере №6.

Пример 9.
Любое число = 0

Каково бы ни было число a , верны равенства:

$(+a)^2 = a^2$ и $(-a)^2 = a^2$. Следовательно, $(+a)^2 = (-a)^2$, а значит, $+a = -a$, или $2a = 0$, и поэтому $a = 0$.

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Ошибка как в примере №6.

Пример 10.

Из двух неравных чисел первое всегда больше второго

Пусть a и b – произвольные числа и $a \neq b$. Имеем:

$$(a - b)^2 > 0, \text{ т.е. } a^2 - 2ab - b^2 > 0, \text{ или } a^2 + b^2 > 2ab.$$

К обеим частям этого неравенства прибавим $-2b^2$. Получим:

$$a^2 - b^2 > 2ab - 2b^2, \text{ или } (a + b)(a - b) > 2b(a - b).$$

После деления обеих частей на $(a - b)$ имеем:

$$a + b > 2b, \text{ откуда следует, что } a > b.$$

Вопрос:

Где допущена ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

При делении обеих частей неравенства $(a + b)(a - b) > 2b(a - b)$ на $(a - b)$ знак неравенства может измениться на противоположный (если $a - b < 0$).

Геометрические софизмы

Вот некоторые примеры геометрических софизмов:

(для подробного просмотра нажмите на выбранную строку)

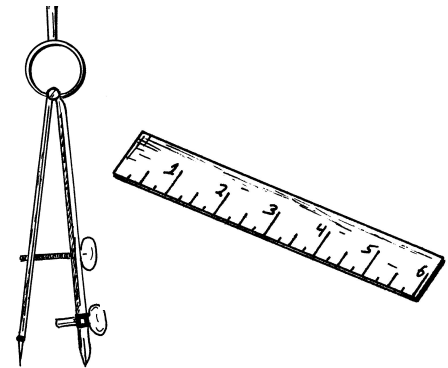
Пример 1. Загадочное исчезновение.

Пример 2. Земля и апельсин

Пример 3. Искусная починка

Пример 4. Два перпендикуляра

Пример 5. «Новое доказательство» теоремы Пифагора



Пример 1.

Загадочное исчезновение

У нас есть произвольный прямоугольник, на котором начерчено 13 одинаковых линий на равном расстоянии друг от друга, так, как показано на рисунке 1.



Рис. 1

Теперь «разрежем» прямоугольник прямой **MN**, проходящей через верхний конец первой и нижний конец последней линии. Сдвигаем обе половины вдоль по этой линии и замечаем, что линий вместо 13 стало 12. Одна линия исчезла бесследно.

Вопрос:

Куда исчезла 13-я линия?

Ответ (нажмите «Enter»):

13-я линия удлинила каждую из оставшихся на $1/12$ своей длины .

Пример 2.

Земля и апельсин

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1 м. Тогда обручи отстанут от поверхности тел и образуют некоторый зазор

Вопрос:

Где зазор будет больше: у апельсина или у Земли?

Ответ (нажмите «Enter»):

Пусть длина окружности земного шара = C , а апельсина c метрам. Тогда радиус Земли $R = C/2\pi$ и радиус апельсина $r = c/2\pi$. После прибавки к радиусам 1 метра окружность обруча у Земли будет $C + 1$, а у апельсина $c + 1$. Радиусы их соответственно будут: $(C + 1)/2\pi$ и $(c + 1)/2\pi$. Если из новых радиусов вычтем прежние, то получим в обоих случаях одно и то же.

$$(C + 1)/2\pi - C/2\pi = 1/2\pi \quad - \quad \text{для Земли,}$$

$$(c + 1)/2\pi - c/2\pi = 1/2\pi \quad - \quad \text{для апельсина}$$

Итак, у Земли и у апельсина получается один и тот же зазор в $1/2\pi$ метра (примерно 16 см).

Пример 3.

Искусная починка

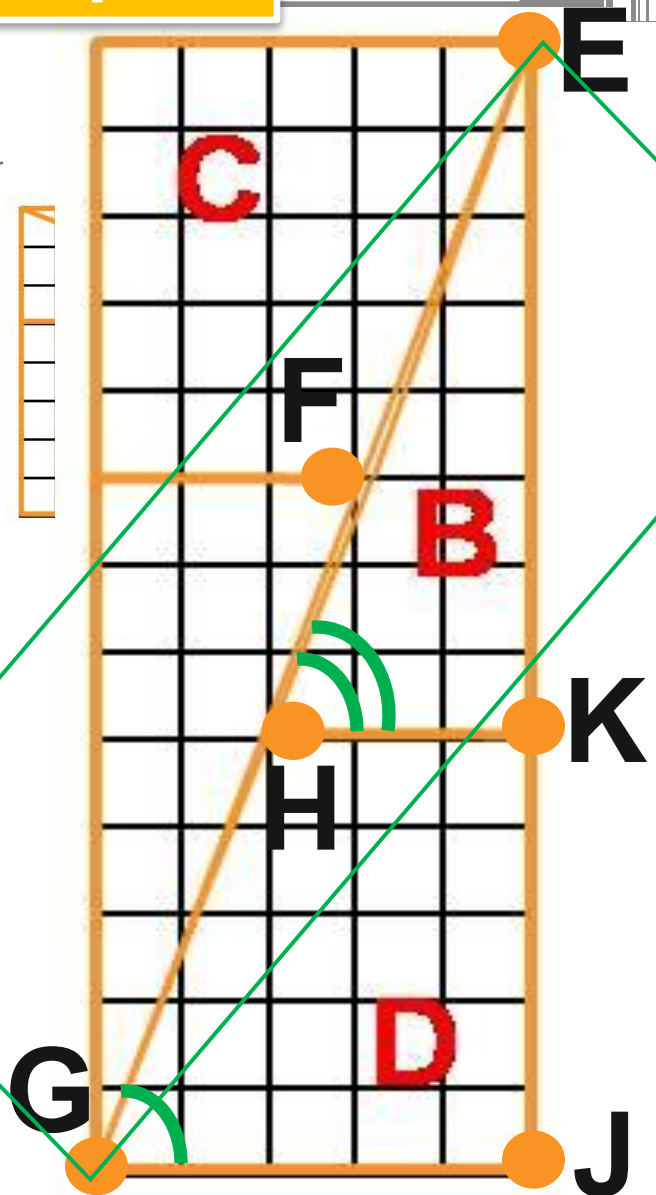
В дне деревянного судна во время плавания случилась прямоугольная пробоина в 13 см длины и 5 см ширины, т.е. площадь пробоины = 65 см^2 . Судовой плотник взял квадратную дощечку со стороной квадрата 8 см (т.е. площадь = 64 см^2), разрезал её прямыми линиями на четыре части **A**, **B**, **C**, **D** так, как показано на рисунке 2, а затем сложил их так, что получился прямоугольник, как раз соответствующий пробоине, см. рисунок 3. Этим прямоугольником он и заделал пробоину. Вышло, что плотник сумел квадрат в 64 см^2 обратить в прямоугольник с площадью 65 см^2 .

Вопрос:

Как такое могло получиться?

Ответ (нажмите «Enter»):

Легко видеть, что получившиеся при разрезании квадрата треугольники **A** и **B** равны между собой. Также равны и трапеции **C**, **D**. Меньшее основание трапеций и меньший катет треугольников равны 3 см и поэтому должны совпасть при совмещении треугольника **A** с трапецией **C** и треугольника **B** с трапецией **D**. В чём же секрет? Дело в том, что точки **G**, **H**, **E** не лежат на одной прямой, $\text{tg } \angle \text{ЕНК} = 8/3$, а $\text{tg } \angle \text{HGJ} = 5/2$. Так как $8/3 - 5/2 = 1/6 > 0$, то $\angle \text{ЕНК} > \angle \text{HGJ}$. Точно так же линия **EFG** – ломанная. Площадь полученного прямоугольника действительно равна 65 см^2 , но в нём имеется щель в виде параллелограмма, площадь которого в точности равна 1 см^2 . Наибольшая ширина щели равна $5 - 3 - (5 \cdot 3)/8 = 1/8 \text{ см}$. Таким образом плотнику всё равно придётся замазывать небольшую щель.



Пример 4. Два перпендикуляра

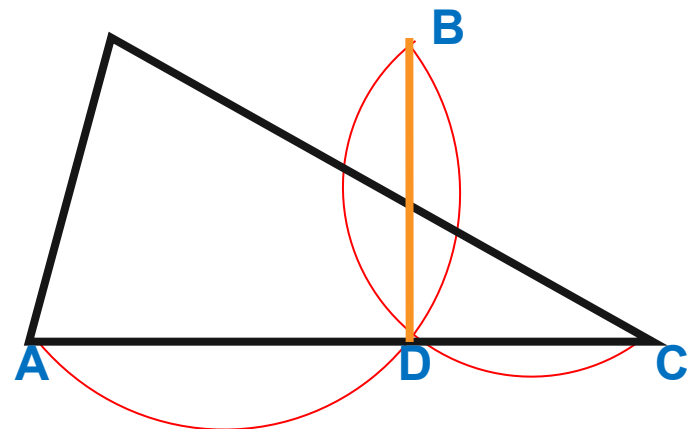
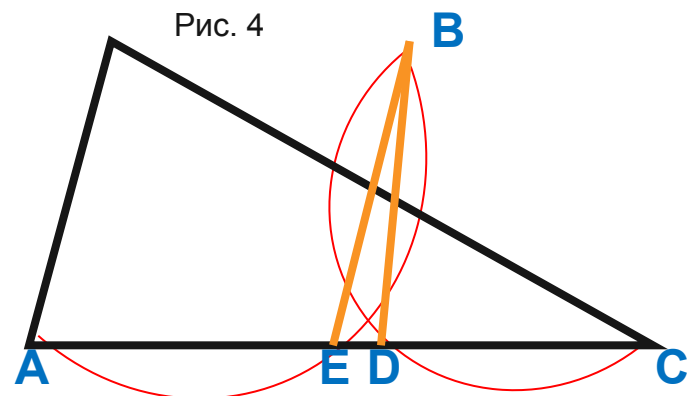
Попытаемся «доказать», что через точку, лежащую вне прямой, к этой прямой можно провести два перпендикуляра. С этой целью возьмём треугольник ABC (рисунок 4). На сторонах AB и BC этого треугольника, как на диаметрах, построим полуокружности. Пусть эти полуокружности пересекаются со стороной AC в точках E и D . Соединим точки E и D прямыми с точкой B . Угол AEB прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр; угол BDC также прямой. Следовательно, $BE \perp AC$ и $BD \perp AC$. Через точку B проходят два перпендикуляра к прямой AC .

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Рассуждения опирались на ошибочный чертёж. В действительности полуокружности пересекаются со стороной AC в одной точке, т.е. BE совпадает с BD .



Пример 5.

«Новое доказательство» теоремы Пифагора

Возьмём прямоугольный треугольник с катетами a и b , гипотенузой c и острым углом α , противолежащим катету a .

Имеем: $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, откуда $a^2 = c^2 \sin^2 \alpha$, $b^2 = c^2 \cos^2 \alpha$.

Просуммировав по частям эти равенства, получаем:

$$a^2 + b^2 = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha).$$

Но $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, и поэтому $a^2 + b^2 = c^2$.

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Ошибки здесь нет. Но формула $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ сама выводится на основании теоремы Пифагора.

1. «Аванта +. Математика». – Москва, изд. «Аванта +», 1998.
2. «БЭКМ – 2007». – Москва, 2007.
3. Игнатъев Е.И. «Математическая смекалка. Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы». – Москва, изд. «Омега», 1994.
4. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. «Математическая шкатулка». – Москва, изд. «Просвещение», 1988.

