

Задачи:

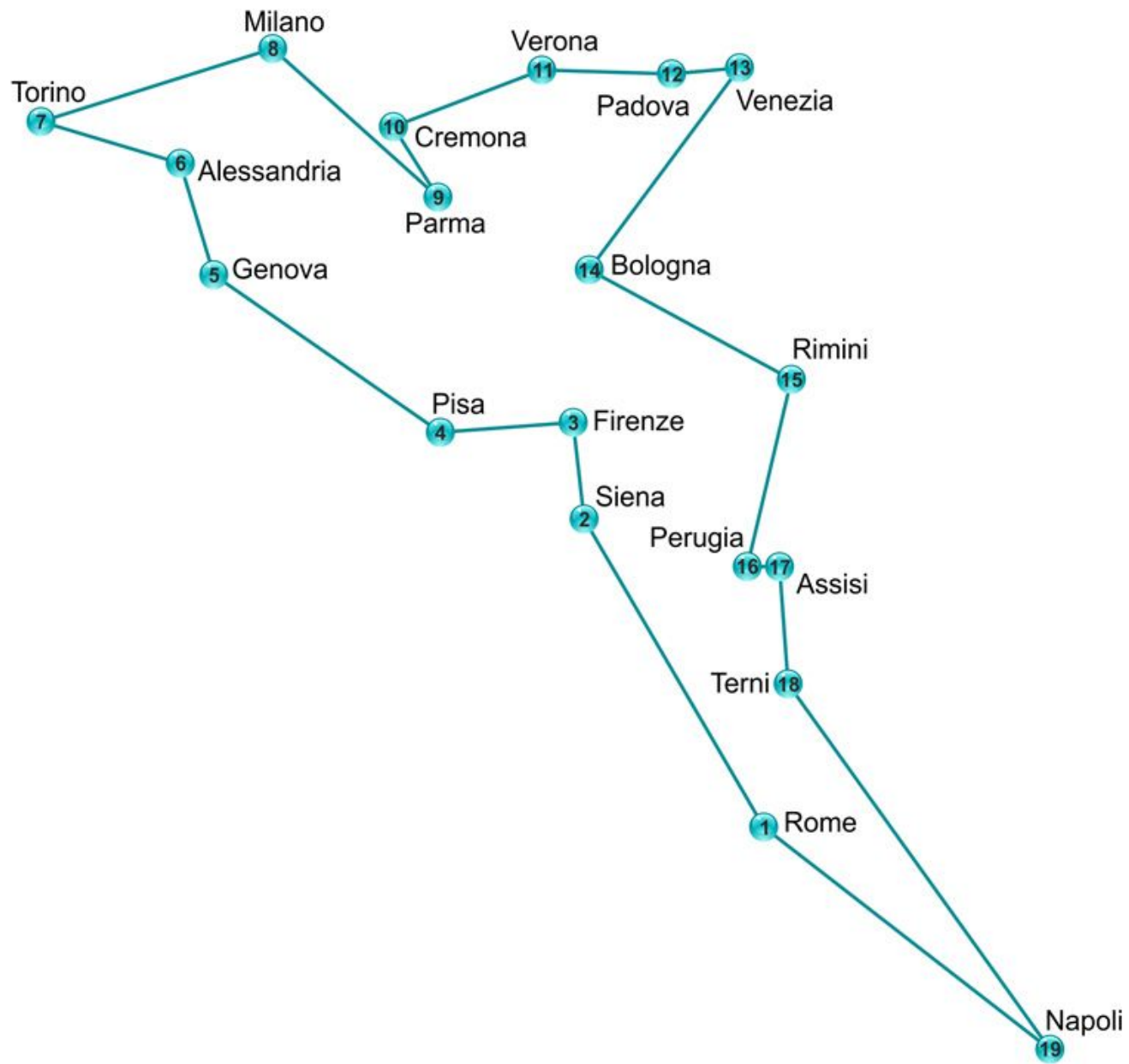
Коммивояжёра

О ранце

***Гамильтонов цикл – маршрут, включающий ровно единожды каждую вершину графа.**



ЗАЧЕМ???



Задача про рюкзак

Математическая модель

Ценность
MAX

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \rightarrow \max;$$

Объем
ваших
вещей

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq C;$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in N.$$



Жадный алгоритм

$$\frac{p_i}{w_i} = d_i \quad // \text{удельная ценность } x_i$$

План:

- 1) упорядочить предметы по d_i ;
- 2) класть в рюкзак от большего к меньшему;

Условие:

$$x_i \leq W - \sum_{g=1}^i x_g$$

$i = \overline{1, n}$ – тип i -того предмета

N – множество предметов :

$$x_i \in N$$

p_i – ценность каждого x_i

w_i – объем каждого x_i

ШАГ №1

Метод ветвей и границ

1) Имеем задачу ЛП;

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\rightarrow \max \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\leq 15 \end{aligned}$$

2) Решаем ее при помощи симплекс-метода;

$$\begin{aligned} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3.75 \\ Z = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3.75 = 18.75 \end{aligned}$$

3)! Если есть $x_i \notin Z$ то разделяем (ветвим) данную задачу 1 на две подзадачи 1(1) и 1(2):

- для 1(1): $x_{i_1} \leq [x_j] - \{x_j\}$
- для 1(2): $x_{i_2} \geq [x_j] + \{x_j\}$

$$\Rightarrow x_{i_1} \leq 3.75 \quad \Rightarrow x_{i_1} \leq 3$$

$$\Rightarrow x_{i_2} \geq 3.75 \quad \Rightarrow x_{i_1} \geq 4$$

ШАГ №2

Метод ветвей и границ

1) Имеем новую ЗЛП **1(1)**:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 15$$

$$x_3 \leq 3$$

1) Имеем новую ЗЛП **1(2)**:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 15$$

$$x_3 \geq 4$$

2) Решаем каждую из них при помощи
симплекс-метода

3) В результате имеем:

1(1):

$$x_2 = 0.6, x_3 = 3, x_1 = 0$$

$$Z = 17.4$$

$$! x_2 \notin Z$$

3) В результате имеем:

уравнение

1(2)

не имеет решений

исп. ВЕТВЛЕНИЕ для x_2
(повтор ШАГ №2)

**Повторять ШАГ №2 до получения
целочисленной функции для**

$$\forall x_i \in Z$$

Для данного примера:

$$Z_{\max} = 14$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

$$\forall Z_g, g = \overline{1, k}$$

$$Z = \max Z_g$$

Ответ - для $\max(Z_g)$

Задача коммивояжера Математическая модель

Длина
MIN

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ij} \rightarrow \min$$

Для
каждого
рядка и
столбца
'X' ОДИН

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, (\forall i \in \{1, 2 \dots n\})$$
$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, (\forall j \in \{1, 2 \dots n\})$$

u_i
порядковый
номер
города

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1, j = \overline{2, n+1}, i = \overline{1, n}, i \neq j,$$
$$x_{ij} \in \{1, 0\},$$



Метод ветвей и границ*

- Имеем целочисленную ЗЛП, заданную матрицей расстояний:

0	5	3	1	2
5	0	1	3	6
3	1	0	4	2
1	3	4	0	7
2	6	2	7	0

1) Найти $d_i = \min d_{ij}$

– Вычесть $d'_{ij} = d_{ij} - d_i$

2) В редуцированной матрице:

Найти $d_j = \min d'_{ij}$

– Вычесть $d''_{ij} = d'_{ij} - d_j$

3) Получим полностью редуцированную матрицу

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} d_{ij} \rightarrow \min$$

ij	1	2	3	4	5	
1		5	3	1	2	1
2	5		1	3	6	1
3	3	1		4	2	1
4	1	3	4		7	1
5	2	6	2	7		2

ij	1	2	3	4	5
1		4	2	0	1
2	4		0	2	5
3	2	0		3	1
4	0	2	3		6
5	0	4	0	5	

Метод ветвей и границ*

Полная редуцированная матрица:

<i>ij</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>1</i>		4	2	0	0
<i>2</i>	4		0	2	4
<i>3</i>	2	0		3	0
<i>4</i>	0	2	3		5
<i>5</i>	0	4	0	5	

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

$$H^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 = 7$$

H^0 – нижняя граница начальной матрицы

ШАГ

Метод ветвей и границ*

№1

ij	1	2	3	4	5
1		4	2	0	0
2	4		0	2	4
3	2	0		3	0
4	0	2	3		5
5	0	4	0	5	



ij	1	2	3	4	5
1		4	2		
2	4			2	4
3	2			3	
4		2	3		5
5		4		5	

Начальная матрица

Замена нулевых эл-тов на ∞

ij	1	2	3	4	5	
1		4	2			0
2	4			2	4	2
3	2			3		0
4		2	3		5	2
5		4		5		0
	0	2	0	2	0	0

1) Поиск ребра
приведения

$$d_{ij} = \max(d_i + d_j)$$

$$d_{ij} = 2$$

Для ребра (1,4)

Элемент (1,4)
заменяем на ∞

ШАГ

Метод ветвей и границ*

№1

2) Делим полученное множество решений на два подмножества (1,4) и (1*,4*):

(1*,4*)

ij	1	2	3	4	5	
1		4	2			0
2	4			2	4	0
3	2			3		0
4		2	3		5	0
5		4		5		0
	0	0	0	2	0	2

$$H^* = H^0 + \sum d_i + \sum d_j = 2 + 7 = 9$$

$$H^n = H^{n-1} + \sum d_i + \sum d_j \leq H^*$$

(1,4)

ij	1	2	3	5	
2	4			4	0
3	2				0
4		2	3	5	2
5		4			0
	0	0	0	0	2

! Вычеркиваем столбец и рядок, на пересечении которых стоял (1,4)

! Элемент (4,1) заменяем на ∞

$$H^1 = H^0 + \sum d_i + \sum d_j = 2 + 7 = 9 \leq 9$$

Метод ветвей и границ*

№2

<i>ij</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>5</i>	
<i>3</i>	2		0	0
<i>4</i>		0	3	0
<i>5</i>	0	4		0
	0	0	0	0



№3

<i>i j</i>	<i>1</i>	<i>5</i>	d_i
<i>3</i>	2	0	0
<i>5</i>	0		0
d_j	0	0	0

ОТВЕТ: (1,4),(4,2),(2,3),(3,5),(5,1)

Жадный алгоритм

<i>i j</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
------------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>1</i>		5	3	1	2
----------	--	---	---	---	---

<i>2</i>	5		1	3	6
----------	---	--	---	---	---

<i>3</i>	3	1		4	2
----------	---	---	--	---	---

<i>4</i>	1	3	4		7
----------	---	---	---	--	---

<i>5</i>	2	6	2	7	
----------	---	---	---	---	--

<i>i j</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
------------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>1</i>		5	3	1	2
----------	--	---	---	---	---

<i>4</i>	1	3	4		7
----------	---	---	---	--	---

<i>2</i>	5		1	3	6
----------	---	--	---	---	---

<i>3</i>	3	1		4	2
----------	---	---	--	---	---

<i>5</i>	2	6	2	7	
----------	---	---	---	---	--

(1,4)

(4,2)

(2,3)

(3,5)

(5,1)

ЗАДАЧА

О ранце

$$28x_1 + 20x_2 + 13x_3 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 14$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 25$$

Коммивояжера

<i>ij</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>1</i>		90	80	40	100
<i>2</i>	60		40	50	70
<i>3</i>	50	30		60	20
<i>4</i>	10	70	20		50
<i>5</i>	20	40	50	20	

*Автор:
студент группы
ИК-61
Корзун Илья
Михайлович*