

# Вопросы ГАК

Дисциплина: математический анализ

Направление: 010100 – Математика

Специализация: 010106 –

дифференциальные уравнения

2012-2013 учебный год

(МО -08)

# 1. Определение предела функции одной переменной в точке. Арифметические свойства предела

- $y = f(x) \quad x_0$

*Определение по Гейне*

(на языке последовательностей)

$$\{x_n\} \rightarrow x_0 \quad \{f(x_n)\} \rightarrow b$$

*Определение по Коши*

(на языке « $\varepsilon - \delta$ »)

$$\varepsilon > 0 \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

*Арифметические свойства предела*

## 2. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции

**Теорема.** Из определения предела функции в точке по Гейне следует определение предела функции в точке по Коши. И наоборот.

*Доказательство.* От противного.

$$\varepsilon > 0 \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\rightarrow \{x_n\} \rightarrow x_0 \\ \{f(x_n)\} &\rightarrow b \end{aligned}$$

Получили противоречие.

### 3. Критерий Коши существования предела функции

Критерий Коши.

$$\varepsilon > 0 \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x' - x_0| < \delta \quad |x'' - x_0| < \delta$$
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

необходимость

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

$$|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')|$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

# 4. Определение непрерывности функции одной

переменной в точке. Арифметические действия

- над непрерывными функциями

$$y = f(x) \quad x_0$$

*Определение по Гейне*

(на языке последовательностей)

$$\{x_n\} \rightarrow x_0 \quad \{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$$

*Определение по Коши*

(на языке « $\varepsilon - \delta$ »)

$$\varepsilon > 0 \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

*Арифметические действия над непрерывными функциями*

## 5. Теорема об обращении в нуль непрерывной

функции на отрезке (формулировка).

Теорема о промежуточном значении  
непрерывной функции на отрезке

**Теорема.**  $f(x)$   $[a; b]$

$$f(a) < 0 \quad f(b) > 0 \quad c \in [a; b]$$

$$f(c) = 0$$

**Теорема.**  $f(x)$   $[a; b]$

$$f(a) = \alpha \quad f(b) = \beta \quad \gamma \in [\alpha; \beta]$$

$$f(c) = \gamma$$

## 6. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции одной переменной

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x} \Delta y = 0$$

## 7. Теорема Ферма и теорема Ролля о дифференцируемой функции на отрезке (формулировка и геометрический смысл)

**Теорема Ферма.**  $f(x)$

$x = x_0$  – точка экстремума

$$f'(x_0) = 0$$

**Теорема Ролля.**  $f(x)$   $[a; b]$

$$f(a) = f(b) \quad \xi \in (a; b)$$

$$f'(\xi) = 0$$



# 8. Определённый интеграл и его свойства

- $y = f(x)$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$
$$\int_a^b f(x) dx$$

## Свойства.

Аддитивность

Линейность

Монотонность

## 9. Теорема об интегрируемости непрерывной функции

**Теорема.** Непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

*Доказательство.*  $y = f(x)$

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad \bar{S} = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$|\underline{S} - \bar{S}| < \varepsilon$$

# 10. Критерий Коши сходимости числового ряда

**Теорема**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N: n > N \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{i=n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

*Доказательство.*

Необходимость

$$\left| \sum_{i=n+1}^{i=n+p} a_i \right| = |S_{n+p} - S_n|$$

$$|S_{n+p} - S| < \varepsilon$$

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

# 11. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда

## Теорема

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится равномерно  $[a; b]$

$S(x)$  непрерывна на  $[a; b]$

*Доказательство.*

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

$$|S(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$|S - S(x_0)| =$$

$$= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)|$$

## 12. Формула Грина

**Теорема.**  $P(x, y)$   $Q(x, y)$   $P'_y$   $Q'_x$   $D$   $L$

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

*Доказательство.*

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} = \int_L P(x, y) dx$$

## 13. Теорема о среднем

**Теорема.**  $f(x)$   $[a; b]$   $\xi \in (a; b)$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

*Доказательство.*

$$m \leq f(x) \leq M$$

# 14. Формула Тейлора

- $y = f(x) \quad x_0$

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

*Линейное приближение*

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

*Квадратичное приближение*

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2$$

*n - е приближение*

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

# 14. Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема.**  $f(x)$   $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Доказательство.*

$$\int f(x)dx \qquad \int_a^x f(t)dt$$
$$F(x) + C \qquad \Phi(x)$$



# Задачи ГАК

Дисциплина: математический анализ

Направление: 010100 – Математика

Специализация: 010106 –

дифференциальные уравнения

2012-2013 учебный год

(МО -08)

# Задача 1.

Вычислить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right).$$

*Ответ.* 1.

## Задача 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $x + y = 0$ ,  $y = 2x - x^2$ .

*Ответ.* 4,5.

## Задача 3.

Найти длину дуги кривой  $y = x^{3/2}$ ,  
 $0 \leq x \leq 4$ .

*Ответ.*  $\frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$ .

## Задача 4.

Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

*Ответ.* Ряд расходится.

## Задача 5.

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$$

и исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

*Ответ.*  $(-3; 3)$ .

## Задача 6.

Вычислить объём шара радиуса  $R$ .

*Ответ.*  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .

## Задача 7.

С помощью формулы Тейлора  
приблизённо вычислить  $\sqrt[3]{1,02}$  с  
точностью до  $10^{-3}$ .

*Ответ.* 1,06.