Вопросы ГАК

Дисциплина: математический анализ
Направление: 010100 – Математика
Специализация: 010106 –
дифференциальные уравнения

2012-2013 учебный год
(МО -08)

1. Определение предела функции одной переменной в
точке. Арифметические свойства предела

- $y = f(x) \qquad x_0$

Определение по Гейне

(на языке последовательностей)

$$\{x_n\} \to x_0 \qquad \{f(x_n)\} \to b$$

Определение по Коши

(на языке «$\varepsilon - \delta$»)

$$\varepsilon > 0 \qquad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \qquad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - b| < \varepsilon$$

Арифметические свойства предела

2. Теорема об эквивалентности двух определений предела функции

Теорема. Из определения предела функции в точке по Гейне следует определение предела функции в точке по Коши. И наоборот.

Доказательство. От противного.

$$\varepsilon > 0 \qquad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \qquad |x - x_0| < \delta \qquad |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

$$|x - x_0| < \delta \quad \to \quad \{x_n\} \to x_0$$

$$\{f(x_n)\} \to b$$

Получили противоречие.

3. Критерий Коши существования предела функции

- **Критерий Коши.**

$$\varepsilon > 0 \qquad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \qquad |x' - x_0| < \delta \qquad |x'' - x_0| < \delta$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Доказательство.

<u>необходимость</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

$$|f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x')|$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

4. Определение непрерывности функции одной переменной в точке. Арифметические действия над непрерывными функциями

- $y = f(x)$ x_0

Определение по Гейне

(на языке последовательностей)

$$\{x_n\} \to x_0 \quad \{f(x_n)\} \to f(x_0)$$

Определение по Коши

(на языке «$\varepsilon - \delta$»)

$\varepsilon > 0 \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Арифметические действия над непрерывными функциями

5. Теорема об обращении в нуль непрерывной функции на отрезке (формулировка). Теорема о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке

Теорема. $f(x)$ $[a;b]$

$$f(a) < 0 \qquad f(b) > 0 \qquad c \in [a;b]$$

$$f(c) = 0$$

Теорема. $f(x)$ $[a;b]$

$$f(a) = \alpha \qquad f(b) = \beta \qquad \gamma \in [\alpha;\beta]$$

$$f(c) = \gamma$$

6. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции одной переменной

Теорема. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x} \Delta y = 0$$

7. Теорема Ферма и теорема Ролля о дифференцируемой функции на отрезке (формулировка и геометрический смысл)

Теорема Ферма. $f(x)$

$$x = x_0 \text{ – точка экстремума}$$

$$f'(x_0) = 0$$

Теорема Ролля. $f(x) \quad [a; b]$

$$f(a) = f(b) \qquad \xi \in (a; b)$$

$$f'(\xi) = 0$$

8. Определённый интеграл и его свойства

- $$y = f(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Свойства.

Аддитивность

Линейность

Монотонность

9. Теорема об интегрируемости непрерывной функции

Теорема. Непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. $y = f(x)$

$$m_i = inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$M_i = sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad \overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$\left|\underline{S} - \overline{S}\right| < \varepsilon$$

10. Критерий Коши сходимости числового ряда

Теорема $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$\varepsilon > 0 \qquad \exists N: n > N \qquad p \in N$$

$$\left|\sum_{i=n+1}^{i=n+p} a_i\right| < \varepsilon$$

Доказательство.

<u>Необходимость</u>

$$\left|\sum_{i=n+1}^{i=n+p} a_i\right| = \left|S_{n+p} - S_n\right|$$

$$\left|S_{n+p} - S\right| < \varepsilon \qquad\qquad \left|S_n - S\right| < \varepsilon$$

11. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда

Теорема

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно $[a; b]$

$S(x)$ непрерывна на $[a; b]$

Доказательство.

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

$$|S(x_0) - S_n(x_0)| < \varepsilon$$

$$|S - S(x_0)| =$$
$$= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)|$$

12. Формула Грина

Теорема. $P(x,y)$ $Q(x,y)$ P'_y Q'_x D L

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Доказательство.

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} = \int_L P(x,y)dx$$

13. Теорема о среднем

Теорема. $f(x)$ $[a;b]$ $\xi \in (a;b)$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство.

$$m \le f(x) \le M$$

14. Формула Тейлора

- $y = f(x) \qquad x_0$

$$f(x_0) + \frac{f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + 0\big((x - x_0)^n\big)$$

Линейное приближение

$$f(x) \cong f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$$

Квадратичное приближение

$$f(x) \cong= f(x_0) + f(x_0)(x - x_0) + \frac{f(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

n - е приближение

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

14. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема. $f(x)$ $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство.

$$\int f(x)dx \qquad \int_a^x f(t)dt$$

$$F(x) + C \qquad \Phi(x)$$

Задачи ГАК

Дисциплина: математический анализ
Направление: 010100 – Математика
Специализация: 010106 –
дифференциальные уравнения

2012-2013 учебный год
(МО -08)

Задача 1.

Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Ответ. 1.

Задача 2.

- Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x + y = 0,\ y = 2x - x^2$.

Ответ. 4,5.

Задача 3.

- Найти длину дуги кривой $y = x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 4$.

Ответ. $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$.

Задача 4.

- **Исследовать на сходимость числовой ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

Ответ. **Ряд расходится.**

Задача 5.

- Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{3^n}$$

и исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

Ответ. $(-3; 3)$.

Задача 6.

- Вычислить объём шара радиуса *R*.

Ответ. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Задача 7.

- С помощью формулы Тейлора приближённо вычислить $\sqrt[3]{1,02}$ с точностью до 10^{-3}.

Ответ. 1,06.