МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Л.А.СТЕФУРАК

монотонно возрастающая функция

Функция $y = f(x)$, заданная на некотором промежутке $[a;\ b]$,

называется ***монотонно возрастающей*** (***монотонно убывающей***)

на этом промежутке, если для $\forall$ пары точек промежутка x_1 и x_2,

$$x_1 < x_2$$

выполняется

$$f(x_1) \le f(x_2),$$

$$(\, f(x_1) \ge f(x_2)\,).$$

Теорема

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена и непрерывна функция $y = f(x)$

и $\exists$ ***конечная производная*** $f'(x)$ на (a, b).

Тогда, для того чтобы функция $y = f(x)$

была **монотонно возрастающей** на $[a, b]$

(**монотонно убывающей** на $[a, b]$)

необходимо и достаточно, чтобы во всех точках

интервала (a, b)

$$y'(x) > 0 \qquad \left(y'(x) < 0\right)$$

Необходимость

Пусть $f(x)$ монотонно возрастает

$\Rightarrow$ $\forall\ x$ *и* x_0 , $a < x_0 < x < b$

$$f(x_0) \le f(x)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \qquad (x > x_0)$$

при $x \to x_0$ $\quad y'(x_0) > 0$

ч.т.д.

Достаточность

Пусть $f'(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in (a, b)$.

По т. ***Лагранжа*** для $\forall \quad [x_1, x_2] \in [a, b]$

$$\left(f(x_2) - f(x_1)\right) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

т.к. $x_2 > x_1$ и $f'(c) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$

ч.т.д.

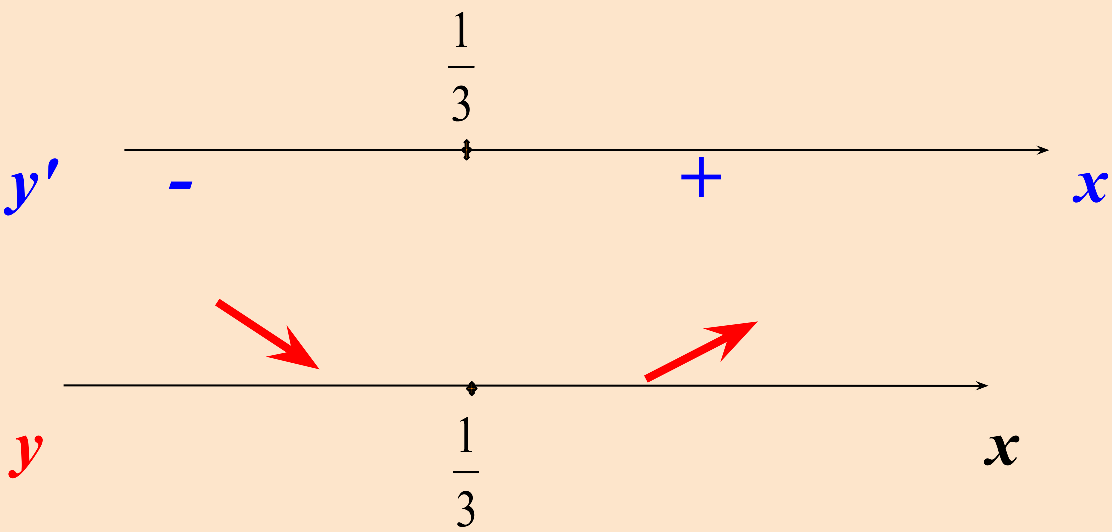
Пример.

$y = 3x^2 - 2x,$ $\qquad$ $y' = 6x - 2,$

$y' = 0$ при $x = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

$y' < 0$ при $x \in (-\infty, \frac{1}{3}),$ $\qquad$ $y' > 0$ при $x \in (\frac{1}{3}, \infty)$

$y = f(x)$ убывает при $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ и возрастает при $x \in (\frac{1}{3}, -\infty)$.



экстремум функции

Функция $y = f(x)$, заданная на некотором промежутке (a, b),

имеет ***локальный максимум*** (***локальный минимум***)

в точке $x_0 \in (a, b)$,

если $\exists$ такая окрестность $\left(x_0 - \delta; x_o + \delta\right)$ точки x_0 , что

для $\forall$ x из этой окрестности (кроме точки x_0) справедливо

равенство:

$$f(x) < f(x_0)$$

$$\left(f(x) > f(x_o)\right)$$

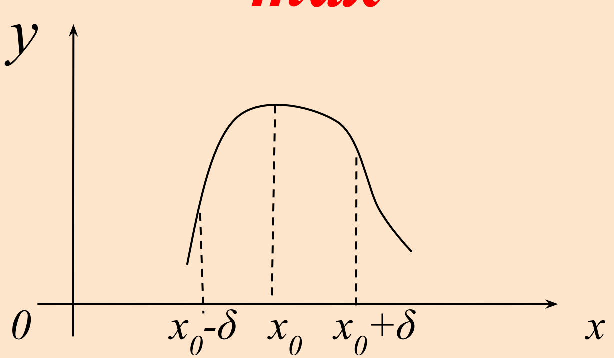
Значение $f(x_o)$ в этом случае называют значением

локального максимума (**локального минимума**)

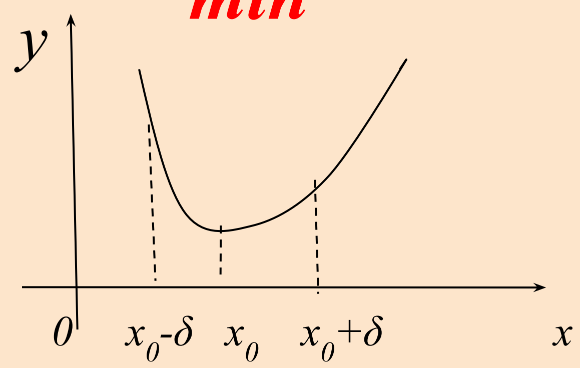
функции.

Extremum* - *max, min* – *крайние значения.

max



min



Необходимое условие экстремума функции

По т. **Ферма**, если функция $y=f(x)$ **непрерывна** на (a, b) и достигает **наибольшего** значения $f(x_0)$, $x_0 \in (a, b)$ и $\exists$ ***конечная*** производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Необходимым условием существования экстремума функции в точках, где **существует конечная производная** является **обращение в ноль производной.**

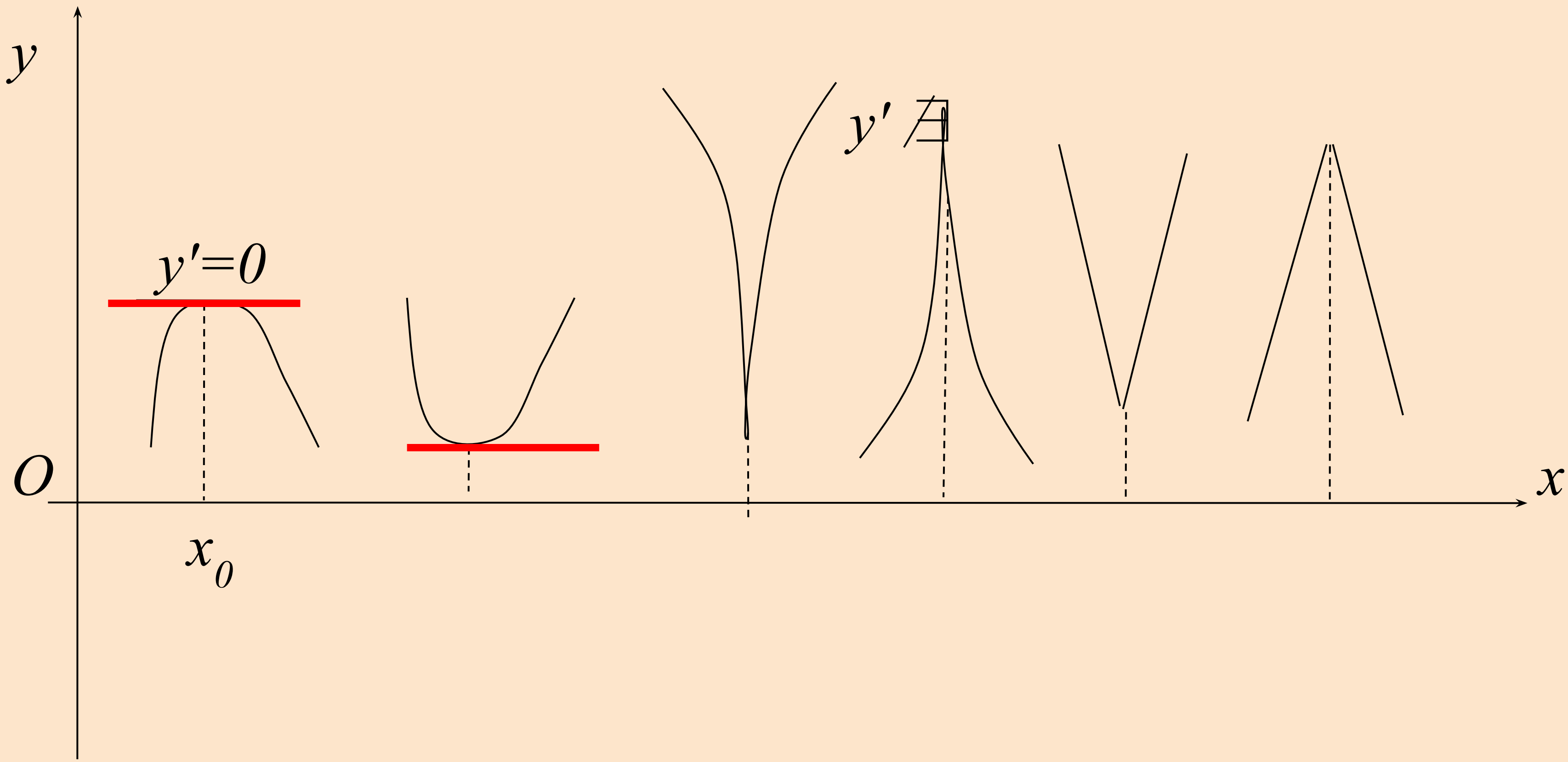
Стационарные точки

Точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых **производная равна нулю**, называются **стационарными**.

$$f'(x_0) = 0$$

Точки, подозрительные на экстремум

Точками, **подозрительными на экстремум** называются точки **из области определения функции**,
в которых производная **равна нулю** (стационарные точки) или **не существует**.



Теорема (*Достаточное условие экстремума функции*)

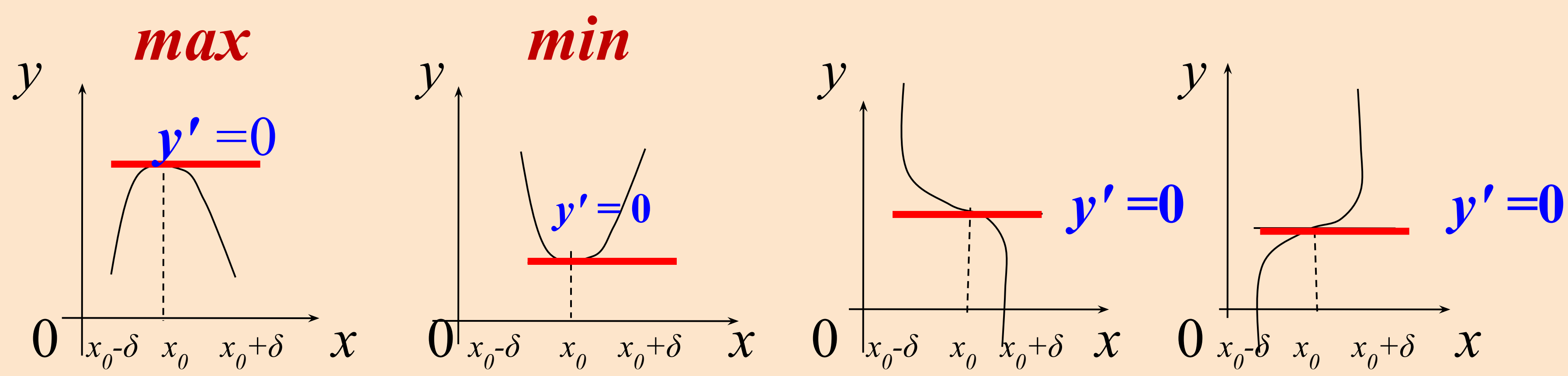
Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и $\exists$ ***конечная*** производная $f'(x)$ на (a, b), которая в точке $x_0 \in (a, b)$

$$f'(x_0) = 0.$$

Тогда , если $f'(x)$ при **переходе через точку** x_0 ***меняет знак***

с $+$ на $-$, то в точке x_0 ***max***

с $-$ на $+$, то в точке x_0 ***min***



Пример.

Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции

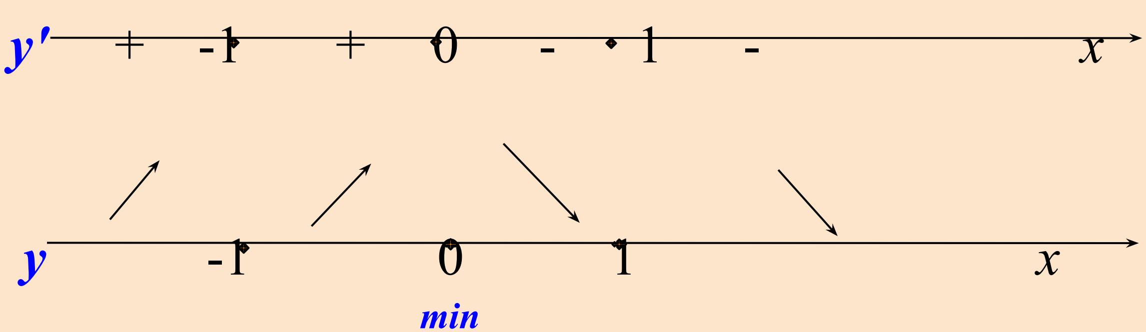
$$y = \sqrt[3]{1-x^2} \cdot$$

1. $x \in [-\infty, \infty]$;

2. $y' = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}$;

3. Находим точки подозрительные на экстремум:

$y' = 0$ при $x_1 = 0$, y' $\exists$ $x_2 = 1$, $x_3 = -1$,- функция определена и непрерывна.



$y_{min}(0) = -1$,

- промежутки монотонности.

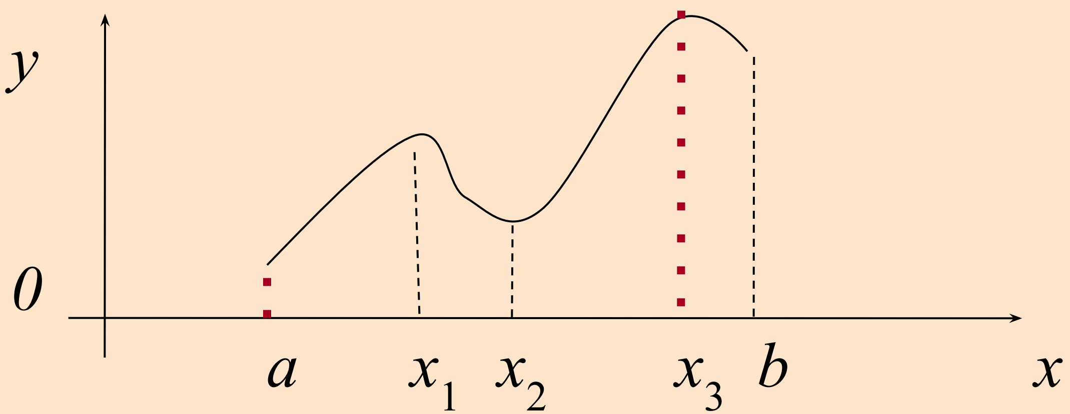
Правило отыскания наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$.

Пусть функция $y = f(x)$ ***определена и непрерывна*** на $[a, b]$

1. Найти точки подозрительные на экстремум и выбираем те, которые принадлежат отрезку $[a, b]$.

2. Вычисляем значения функции во всех этих точках,
а также $f(a)$ и $f(b)$.

3. Наибольшее из этих чисел и будет **наибольшим** значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, наименьшее из этих чисел будет **наименьшим** значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.



Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$y = x^4 - 2x^2 + 5$
на отрезке [-3, 2].

1. Находим точки подозрительные на экстремум:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1),$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

2. $f(0) = 5$; $f(1) = 4$; $f(-1) = 4$;
$f(2) = 2^4 - 2^2 + 5 = 13$; $f(-3) = (-3)^4 - (-3)^2 + 5 = 77$.

3. Наибольшее $y|_{x=-3} = 77$;

наименьшее $y|_{x=-1} = y|_{x=1} = 4$.

Выпуклость и вогнутость кривой

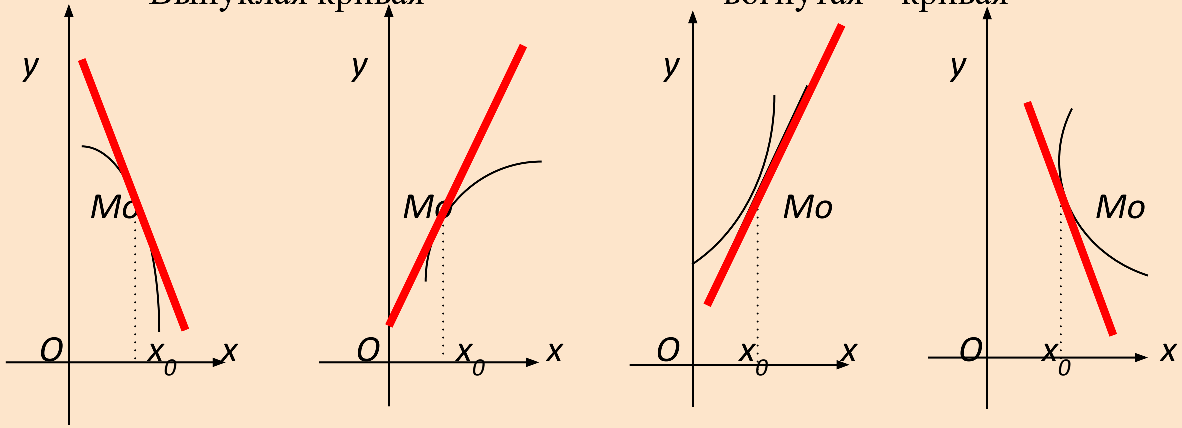
Кривая $y = f(x)$ в точке $M_o(x_o, f(x_o))$

называется выпуклой (***вогнутой***), если в некоторой окрестности

этой точки она лежит ниже (***выше***) касательной, проведенной к

кривой в этой точке.

Выпуклая кривая вогнутая кривая



Теорема. ***Условие выпуклости и вогнутости кривой***

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена и непрерывна функция

$\boldsymbol{y = f(x)}$ и $\exists$ ***конечная производная*** $\boldsymbol{f''(x)}$ на $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Тогда, для того чтобы функция $y = f(x)$ была

выпуклой

(***вогнутой***)

на $[a, b]$ **необходимо** и **достаточно**, чтобы во всех $\boldsymbol{x} \in (a, b)$

$$\boldsymbol{f''(x) < 0}$$

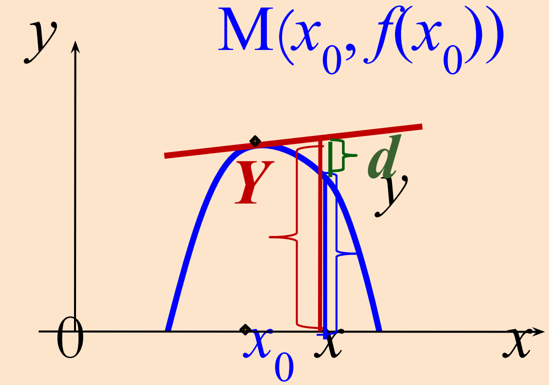
$$\boldsymbol{(f''(x) > 0)}\,.$$

Доказательство: Пусть $x = x_0 \in (a, b)$,

касательная к кривой $\mathbf{y = f(x)}$ в точке $M(x_0, f(x_0))$:

$$\boldsymbol{Y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0)}$$

Формула Тейлора для $y = f(x)$ при $n = 1$:



$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

тогда

$$\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{Y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 - (f(x_0 + f'(x)(x - x_0))$$

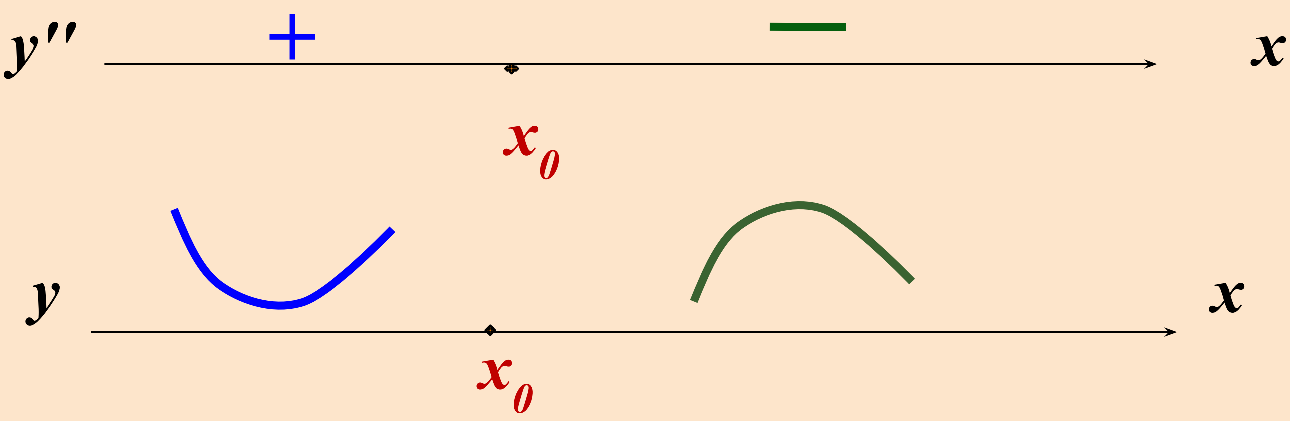
$$\mathbf{d} = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \text{ где } x_0 < c < x \Rightarrow$$

а) если $\mathbf{d} < 0$, **(**кривая лежит **под касательной, она *выпуклая*)**, то $f''(c) < 0$;

б) если $f''(c) < 0$, то $\mathbf{d} < 0$, **(**кривая лежит **под касательной, она *выпуклая*)**.

Правило «дождя»

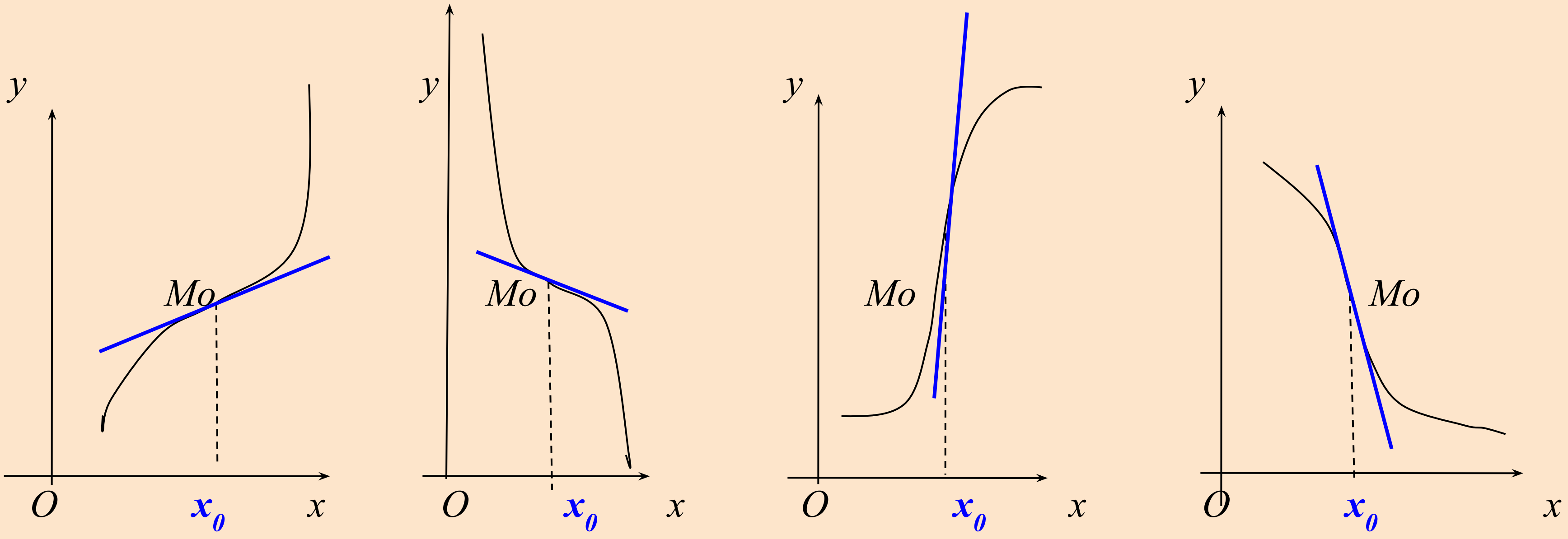
Интервалы, в которых дуги кривой $y = f(x)$ выпуклы, определяются из неравенства $y''(x) < 0$, а интервалы, в которых дуги кривой $y = f(x)$ вогнуты - из неравенства $y''(x) > 0$.



точка перегиба

Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ **называется точкой перегиба**, если кривая **переходит** в точке M_0 с **одной стороны касательной на другую**, т. е. если в некоторой окрестности точки x_0 все точки кривой с абсциссами $x < x_0$ лежат по одну сторону от касательной, а все точки с абсциссами $x > x_0$ - по другую , т.е. при переходе через точку x_0 кривая меняет направление выпуклости.

Точки перегиба



Необходимое условие точки перегиба

Необходимым условием существования ***точки перегиба*** функции в точках, где существует ***конечная*** производная $y''(x)$ является обращение в ноль второй производной:

$$y''(x) = 0$$

Теорема. *Достаточное условие точки перегиба*

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и

$\exists$ ***конечная*** производная $f''(x)$ на (a, b), которая в точке $x_0 \in (a, b)$

$$f''(x_0) = 0,$$

тогда , если $f''(x)$ при **переходе через точку** x_0 ***меняет знак,***

то точка x_0 будет ***точкой перегиба*** функции $f(x)$.

- Чтобы найти точки перегиба кривой $\boldsymbol{y = f(x)}$, нужно найти все точки кривой, в которых

$$y''(x) = \mathbf{0}, \quad y''(x) = \infty$$

или не существует, а ***функция определена***,

т. е. “подозрительные” на перегиб

Если при переходе через точку

“подозрительную” на перегиб

вторая производная меняет знак,

то эта точка будет точкой ***перегиба*** функции $\boldsymbol{f(x)}$.

Пример. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y=\sqrt[3]{1-x^2}$

1. $x \in [-\infty, \infty];$

2. $$y' = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}};$$

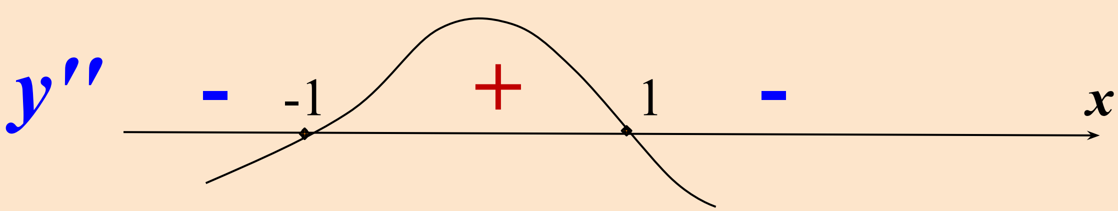
3. $$y'' = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2} + x\cdot\dfrac{2\cdot 2x}{3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)}}}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^4}},$$

$$y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{3(1-x^2)+4x^2}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^5}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^5\left(x+1\right)^5}}$$

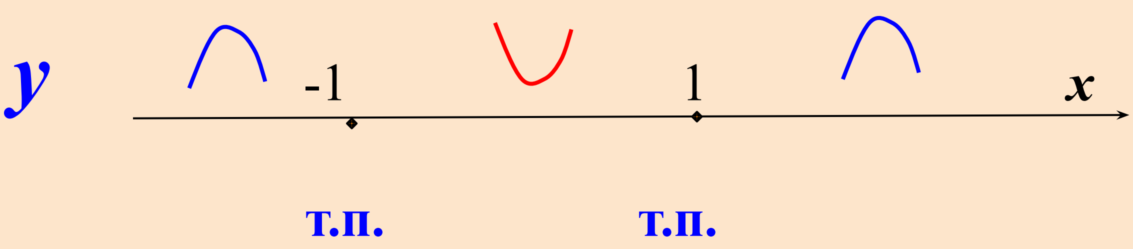
4. Находим точки подозрительные на перегиб:

$y'' \neq 0$,

$y'' \nexists$ $x_2=1$, $x_3=-1$, функция определена и непрерывна в этих точках.



$y_{т.п.}(\pm 1) = 0$,



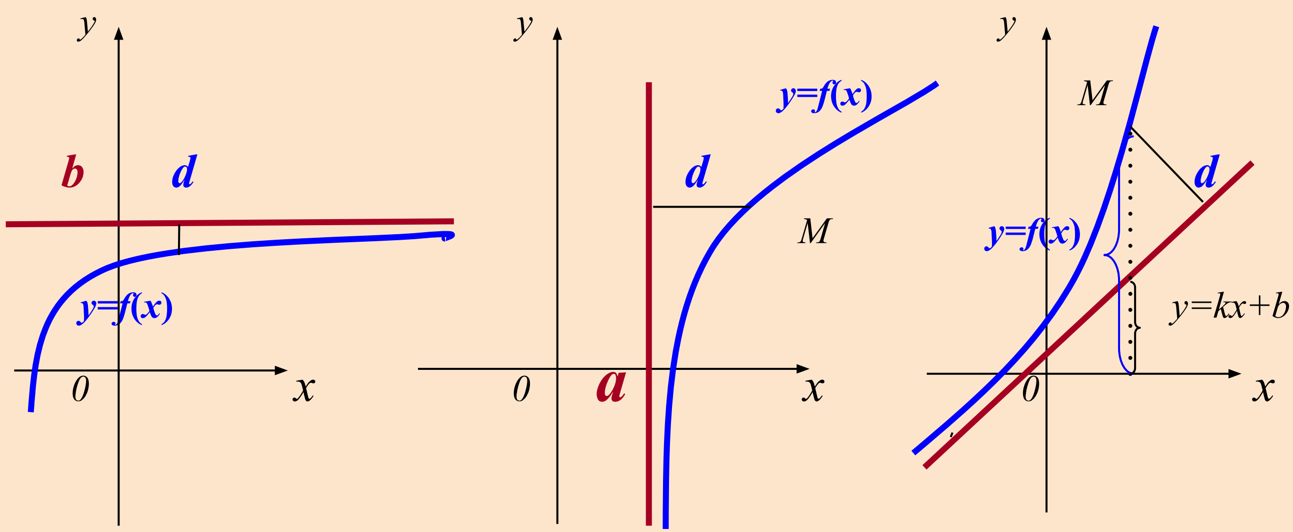
- промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба

асимптоты

Прямая линия называется асимптотой для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль какой-нибудь части кривой в бесконечность.

Различают асимптоты:

горизонтальные, **вертикальные** и **наклонные**



$y = b$ $x = a$ $y = kx+b$

Горизонтальная асимптота

Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ только в том случае, когда существует конечный предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ и этот предел равен b, т. е. если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

вертикальная асимптота

- Кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$,

если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$

- Для определения вертикальных асимптот нужно отыскать точки ***разрыва II - го рода*** функции, а также ***границы*** области определения функции $y = f(x)$.

- **Замечание**. Если $x \in R$, то вертикальных асимптот нет.

наклонная асимптота

- Для определения наклонной асимптоты $y = kx + b$ кривой

  $y = f(x)$ нужно найти числа k и b по формулам:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

- (следует отдельно рассмотреть случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$).

- Если хотя бы один из пределов равен ∞ или ***не существует***, то

  наклонной асимптоты кривая ***не имеет***.

План полного исследования функции:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция чётной или нечётной, т. е. симметричен ли её график относительно оси ординат или начала координат. Найти точки пересечения с осями координат.
3. Найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции.
4. Найти y' . Найти интервалы монотонности, т. е. интервалы возрастания и убывания функции, точки экстремума.
5. Найти y'' . Найти интервалы выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
6. Построить график функции, используя все собранные данные.

Пример 1.

Требуется исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

методами

дифференциального исчисления и построить ее график .

1) область определения функции **X = (- ∞, -1) ∪ (-1, + ∞)**.

2) $\boldsymbol{f(-x) \neq f(x)}$ и $\boldsymbol{f(-x) \neq -f(x)}$, функция не является ни четной, ни нечетной;

3. функция терпит разрыв II - го рода при x = -1, т.к. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left(\frac{(-1-0)^3}{2(-1-0+1)^2} = \frac{-1}{2(-0)^2} = \frac{-1}{+0} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \left(\frac{(-1+0)^3}{2(-1+0+1)^2} = \frac{-1}{2(+0)^2} = \frac{-1}{+0} \right) = -\infty$$

***x* = -1** *вертикальная асимптота*

$$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Наклонную асимптоту ищем в виде $\boldsymbol{y = kx + b}$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot 2(x+1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x \cdot \left(x^2 + 2x + 1\right)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{-2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = -1$$

Наклонная асимптота: $\boldsymbol{y = 0{,}5x - 1}$.

$$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

4. Найдем интервалы монотонности

и точки экстремума функции.

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 \cdot (x+3)}{(x+1)^3}$$

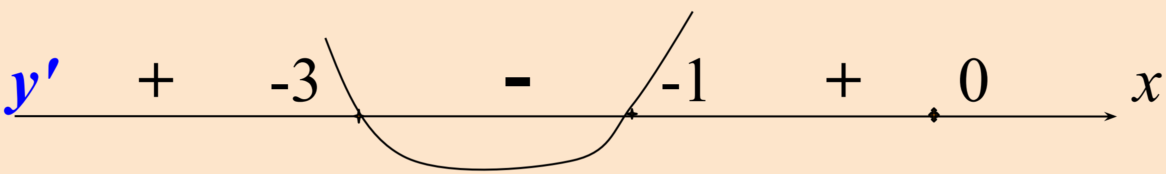
Найдем точки подозрительные на экстремум:

$y'(x) = 0$, $x^2 \cdot (x+3) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$;

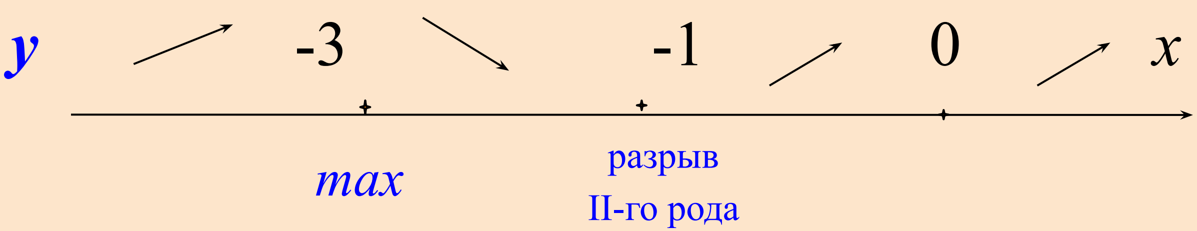
$y'(x)$ **не существует**, когда $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow$ $x_3 = -1$.

Точка $x = -1$ не может быть точкой экстремума,

(точка разрыва II-го рода)



$$y_{max} = f(-3) = \frac{-27}{8}$$



5. Найдём интервалы выпуклости (вогнутости)

графика функции и точки перегиба:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}\right)' =$$

$$= \frac{3x}{(x+1)^4}$$

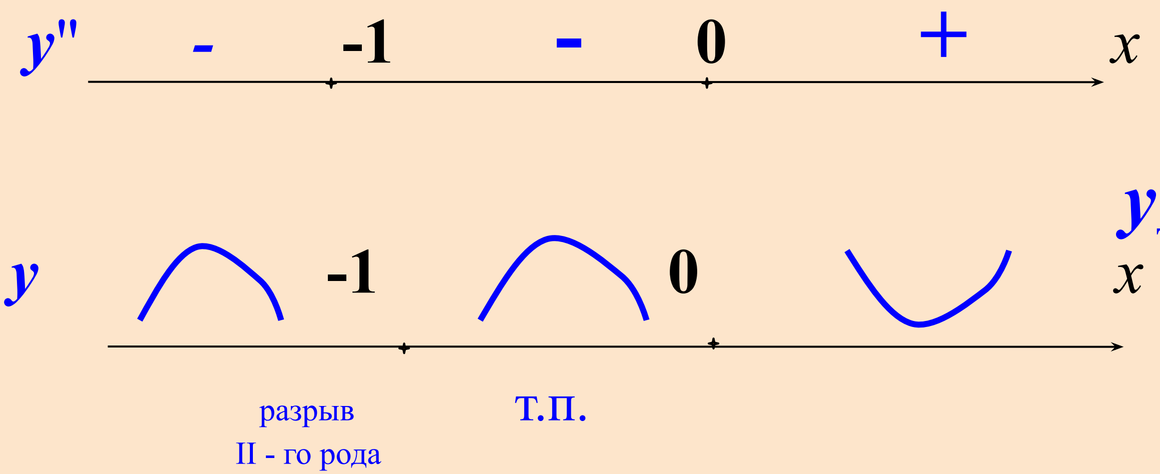
$$y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

Найдем точки подозрительные на перегиб:

$y''(x) = 0$, $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

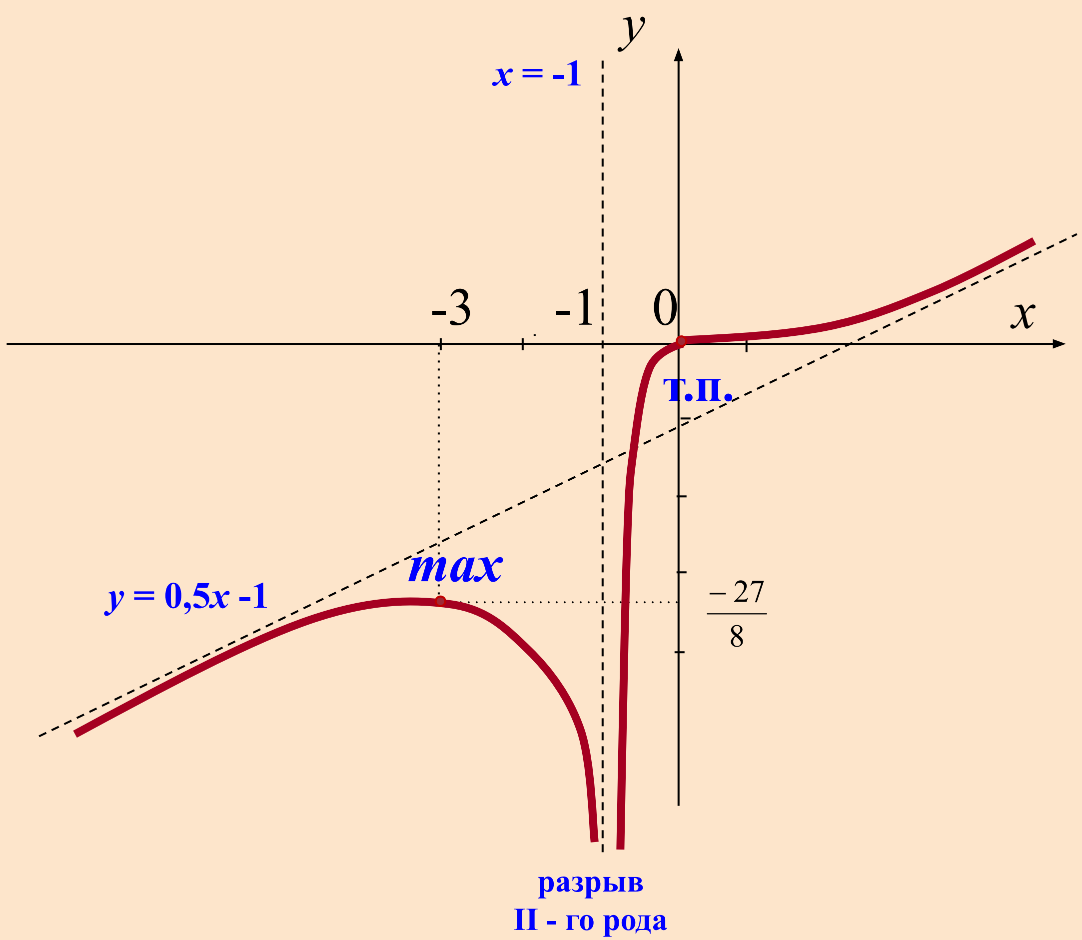
$y''(x) \nexists$, когда $x = -1$,

$x = -1$ не может быть точкой перегиба, (разрыв II - го рода)



$y_{\text{т.п.}}(0) = f(0) = 0.$

6. Строим график функции, используя все собранные данные.



Пример 2

Требуется исследовать функцию $y = x^4 - 2x^2 + 1$ методами дифференциального исчисления и построить ее график .

1. Область определения функции $X = (-\infty, +\infty)$.

2. $f(-x) = f(x)$ функция четная.

3. Асимптот нет. ($X = (-\infty, +\infty)$. $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$)

4. $y' = 4x^3 - 4x;$

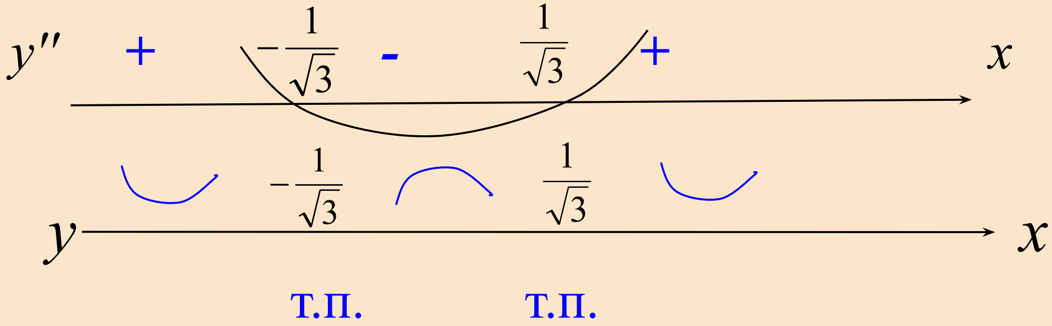
$y' = 0$ при $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$

y'	-	-1	+	0	-	1	+	x
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$	x
		min		*max*		*min*		

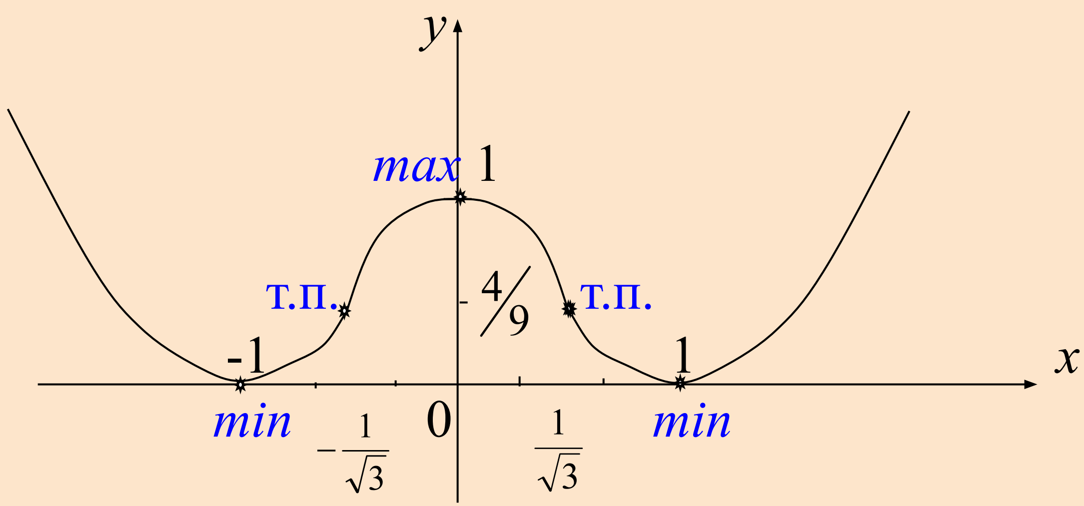
$y_{min}(\pm 1) = 0$

$y_{max}(0) = 1$

5. $y'' = 12x^2 - 4$; $\quad y'' = 0$ при $x_{4,5} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



$$y_{\text{т.п.}}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{9}$$



Пример 3

Требуется исследовать функцию $y = \dfrac{e^x}{x}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график .

1. Область определения функции X = (- ∞, **0**) и (**0**, + ∞).

2. $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ - ни четная, ни нечетная;

3. $$\lim_{x \to \pm 0} \frac{e^x}{x} = \left(= \frac{e^{\pm 0}}{\pm 0} = \frac{1}{\pm 0} \right) = \pm\infty$$ - разрыв II - го рода

$\boldsymbol{x = 0}$ - вертикальная асимптота

$$y=\frac{e^x}{x}$$

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}?\text{пр.Лопиталя}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}?\text{пр.Лопиталя}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2}=\frac{0}{\infty}=0$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=-0$$

левая наклонная асимптота $\boldsymbol{y=0}$ является горизонтальной асимптотой при $x\to-\infty$

$$y = \frac{e^x}{x}$$

4. $$y' = \frac{e^x \cdot (x-1)}{x^2}.$$

5. $y' = 0$ при $x_1 = 1$, y' не существует, когда $x = 0$ (эта точка не принадлежит области определения функции).

y'	-	0	-	1	+	x
y	↘	0	↘	1	↗	x
		разрыв II - го рода		*min*		

$$y_{min} = f(1) = e$$

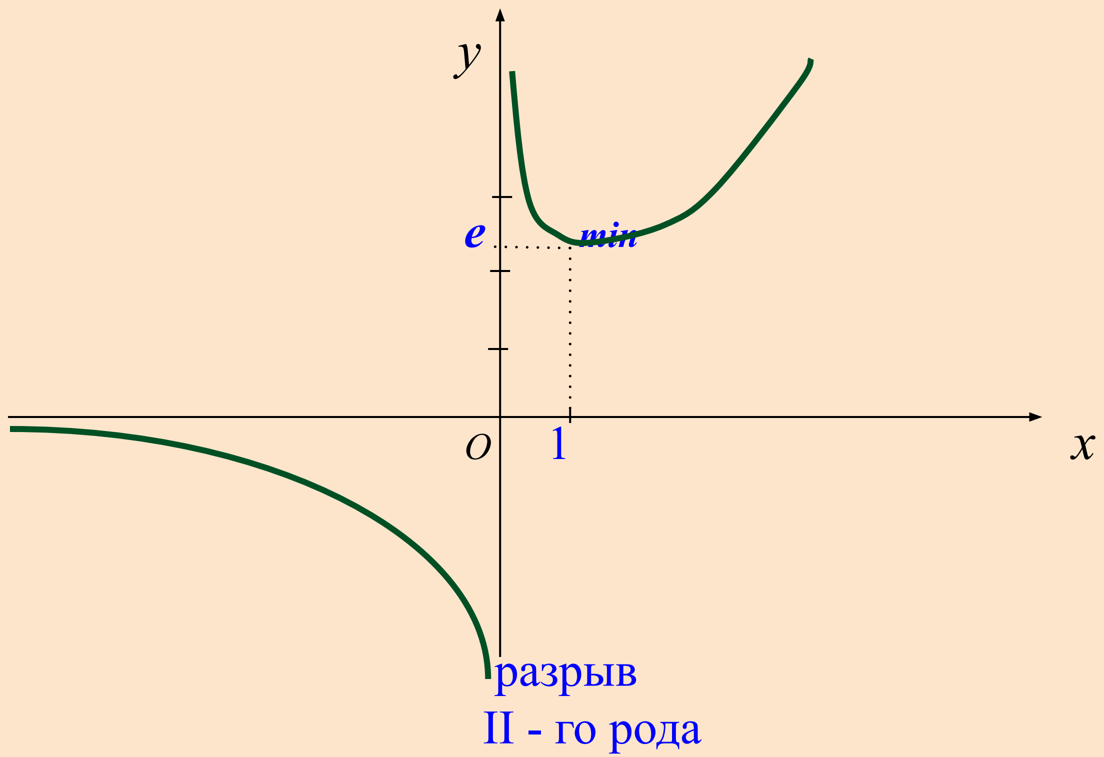
6. $$y'' = \frac{e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

7. $y'' \neq 0$ т.к. $x^2 - 2x + 2 \neq 0$,

y''	-	0	+	x
y		0		x
		разрыв II - го рода		

y'' не существует, когда $x = 0$

(эта точка не принадлежит области определения функции).


y
e
min
O
1
x
разрыв
II - го рода

Спасибо за внимание!