



Математический анализ

МПГУ

ИФТИС

Первое занятие заочникам

11.01.2016



Теоретико-множественная математика

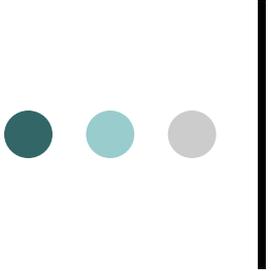
□ Математики — это некоторый род французов: если говоришь им что-нибудь, они переводят это на свой язык, и тогда это становится тотчас же чем-то совсем другим.

И. В. Гете



Теоретико-множественная математика

□ Почти каждая книжка по "современной математике" толкует о множествах и пестрит странными символами вроде O , N , I , Z , J . Такое нашествие множеств имеет свои причины. Дело в том, что теория множеств — это своего рода **математический язык**. Без него невозможно не только заниматься математикой, невозможно даже объяснить, о чем вообще идет речь. Это все равно, что изучать французскую литературу, совсем не зная французского языка. **Я. Стюарт**

- 
- ... крайне простые в своей сущности, не требующие никаких предварительных познаний, идеи и выводы великого основоположника теории множеств Георга Кантора являют собой образец подлинно математического стиля. Настоящая математика заключается не в нагромождении искусственных вычислительных приемов, а в умении получать нетривиальные результаты путем размышления при минимуме применяемого аппарата.
(книга Г. Радемахера и О. Теплица "Числа и фигуры«)



Определение 1

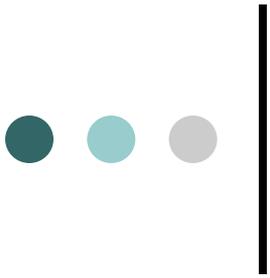
Множество – это совокупность однородных предметов любой природы

Множество книг данной библиотеки

Множество всех вершин данного треугольника

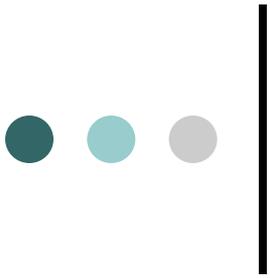
Множество всех натуральных чисел

Множество все точек данной прямой и т. д.



Понятие множества — простейшее математическое понятие.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots, Z .



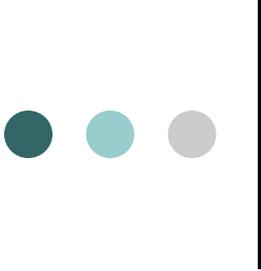
Объекты, из которых образовано множество, называются **элементами**.

Элементы множества принято обозначать строчными буквами латинского алфавита:
a, b, c... z.

Если элемент x принадлежит множеству M , то записывают **$x \in M$** , если не принадлежит – **$x \notin M$**

Основные числовые множества:

- $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbf{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;
- $\mathbf{Q}=\{x \mid x = p/q, \text{ где } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;
- $\mathbf{R}=(-\infty; +\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа). Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).



–Поскольку любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби, причем не единственным образом, все целые числа являются рациональными.

$$3 = \frac{3}{1}, \quad 3 = \frac{6}{2}, \quad 3 = \frac{-21}{-7} = \dots$$

-А, например, эти числа являются иррациональными.

$$\sqrt{2} = 1,4142136\dots \quad \lg 5 = 0.6989700\dots, \quad \pi = 3,1415926535\dots, \quad e = 2,78281828459\dots$$

Определение 2

1. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным.
1. Остальные множества называются бесконечными.





Классификация множеств по количеству элементов

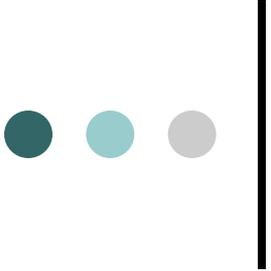
1. \emptyset – пустое множество
2. $A = \{a\}$ – одноэлементное множество
3. $B = \{a, b, c, d\}$ – конечное множество
4. $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – бесконечное множество натуральных чисел.

Определение 3

***Универсальным* множеством U**

называется множество, подмножества которого (и только они) в данный момент рассматриваются.

- При работе с числовыми множествами в качестве основного (универсального) множества будем считать множество \mathbb{R} действительных чисел.



Универсальное множество

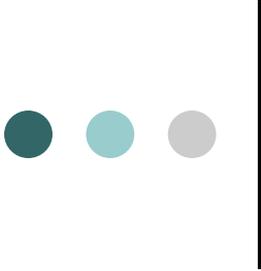
- Каждый раздел математики использует свои множества. Начиная решать какую-либо задачу, прежде всего определяют множество тех объектов, которые будут в ней рассмотрены. Например, в задачах математического анализа изучают всевозможные числа, их последовательности, функции и т.п. Множество, включающее в себя все объекты, рассматриваемые в задаче, называют универсальным множеством (для данной задачи).
- Универсальное множество является максимальным множеством в том смысле, что все объекты являются его элементами, т. е. утверждение в рамках задачи всегда истинно.



Универсальное множество U

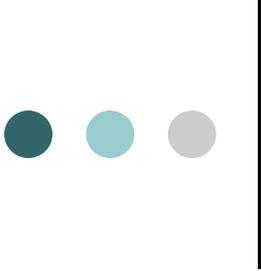
является неотъемлемой частью математики — оно ограничивает пространство наших действий.

Именно благодаря универсальному множеству раздел математики можно закончить изучать — существует установленная нами граница в виде универсального множества. Заметьте — в гуманитарных науках одну и ту же проблему могут изучать бесконечно долго, так как универсальное множество в них отсутствует.



Используются элементы математической логики,
кванторы:

- \forall — «для любого», «для каждого», «для всех»;
- \exists — «существует», «найдётся».
- $!$ — «единственный»;
- $:$ — «такой, что»;
- $|$ — «такой, что».



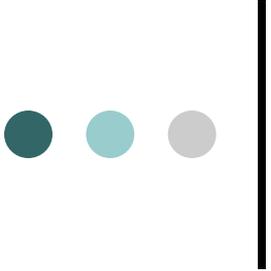
Мощность множества

Для конечного множества A через мощность $m(A)$ обозначим число элементов в множестве A . Иногда мощность обозначают как $|A|$.

Из определения следуют свойства:

$$m(A) + m(\bar{A}) = m(U)$$

$$A = B \Rightarrow m(A) = m(B)$$



Пример

- Записать множество всех натуральных делителей числа 15 и найти число его элементов - мощность.
- Решение: $A = \{1, 3, 5\}$, $m(A) = 3$.

Общий список чисел, используемых в России

Число	Название	Практическое значение
10^1	десять	Число пальцев на 2 руках
10^2	сто	Примерно половина числа всех государств на Земле
10^3	тысяча	Примерное число дней в 3 годах
10^6	миллион	В 5 раз больше числа капель в 10-литровом ведре воды
10^9	миллиард (биллион)	Примерная численность населения Индии
10^{12}	триллион	1/13 внутреннего валового продукта России в рублях за 2003 год
10^{15}	квадриллион	1/30 длины парсека в метрах
10^{18}	квинтиллион	1/18 числа зерен из легендарной награды изобретателю шахмат
10^{21}	секстиллион	1/6 массы планеты Земля в тоннах
10^{24}	септиллион	Число молекул в 37,2 л воздуха
10^{27}	октиллион	Половина массы Юпитера в килограммах
10^{30}	нониллион	1/5 числа всех микроорганизмов на планете
10^{33}	дециллион	Половина массы Солнца в граммах



До встреч со множествами!