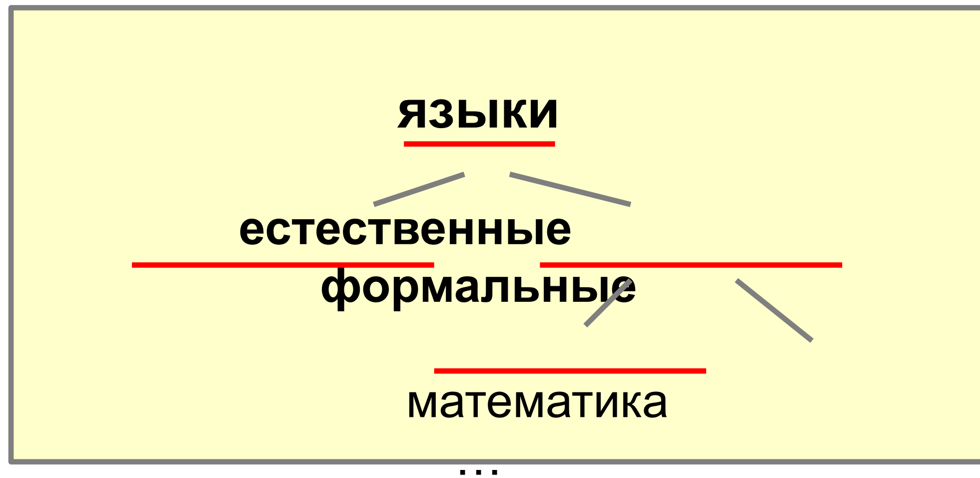
9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

9.1 Основные понятия

Математическая модель – приближенное описание какой-либо реальной системы, выраженное с помощью математического языка.

Математическое моделирование – метод исследования реальных систем с помощью построения и изучения их математических моделей.



История математического моделирования.

Математическое моделирование использовалось давно (Вавилон, Египет), но широко – со времен Галилея.

До Галилея в науке господствовал **подход Аристотеля**. Например:

В основе всего лежат 4 элемента (сущности):

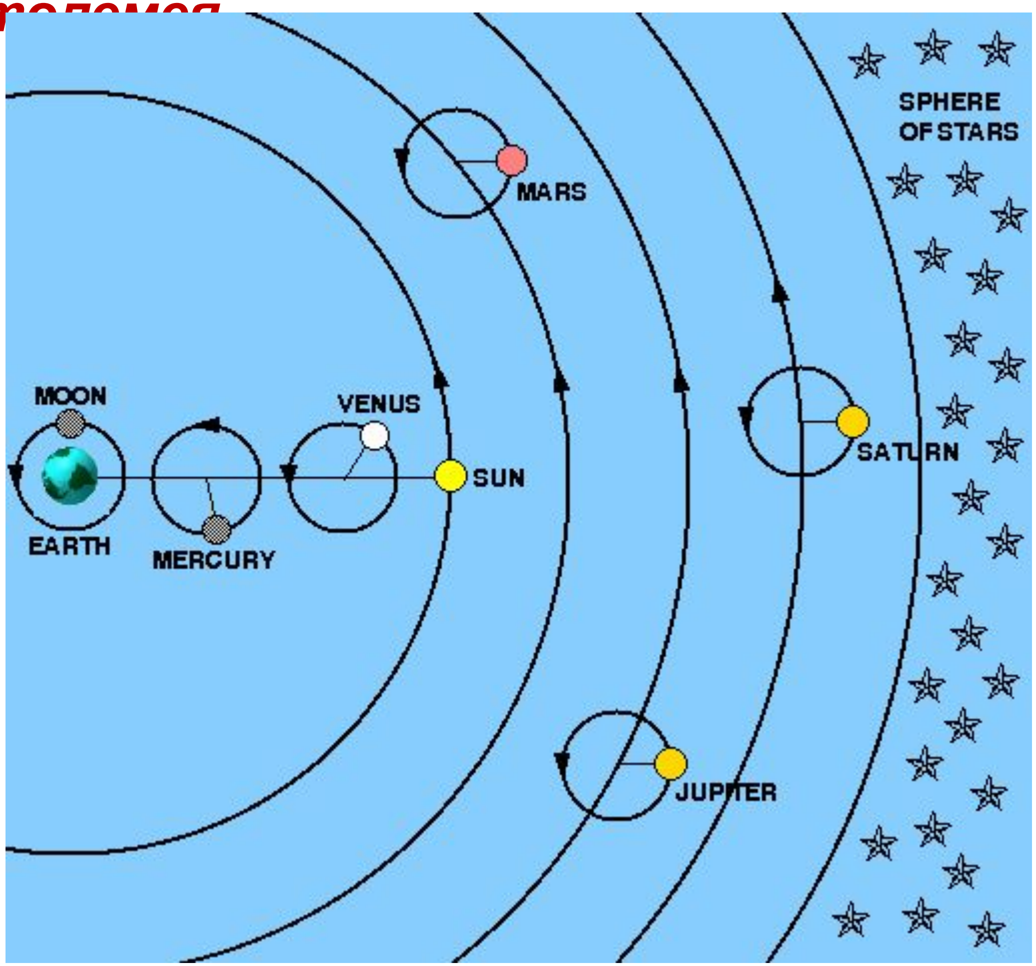
1. **Земля;**
2. **Огонь;**
3. **Воздух;**
4. **Вода.**

Аристотель

Их свойства присущи всем вещам. Под действием притяжения (любовь) и отталкивания (ненависть) сущности могут комбинироваться. Такими комбинациями объясняются все явления в мире.

(ср. с китайским Янь-Инь)

Геоцентрическая модель мира Птолемея



Клавдий Птолемей
(Астроном, географ, геометр)

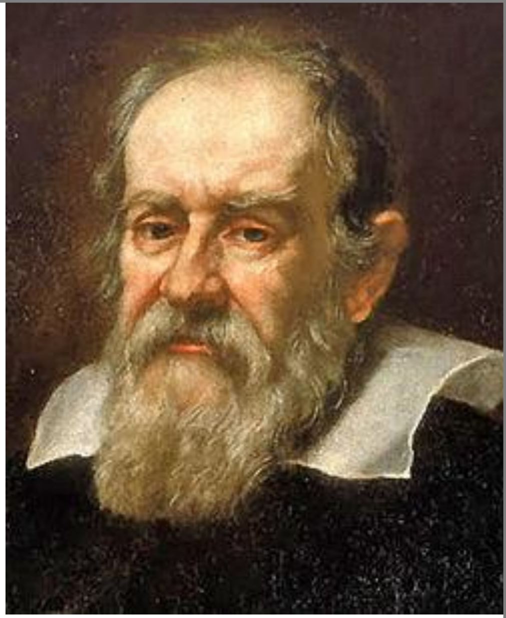
Первая научная картина мироздания. Для хорошего согласования с экспериментом модель Птолемея была сильно усложнена – 77 кругов, эпициклы, деференты, …
Господствовала в науке около 1.5 тыс. лет – до Коперника, который взялся ее упростить.

Начиная с XVII в. математическое моделирование занимает главенствующее положение в науке. Основоположники – **Рене Декарт** и **Галилео Галилей.**

Галилео Галилей.
При сотворении мира Бог вложил в него строгую математическую необходимость. Поэтому математическое знание не только истинно, но и священно.

Методология Галилея.
Камень падает вниз. Почему? – есть множество гипотез.
Но не следует путаться в этих объяснениях, а проводить, где это возможно, количественные описания.

Физические знания следует отделять от причинности!



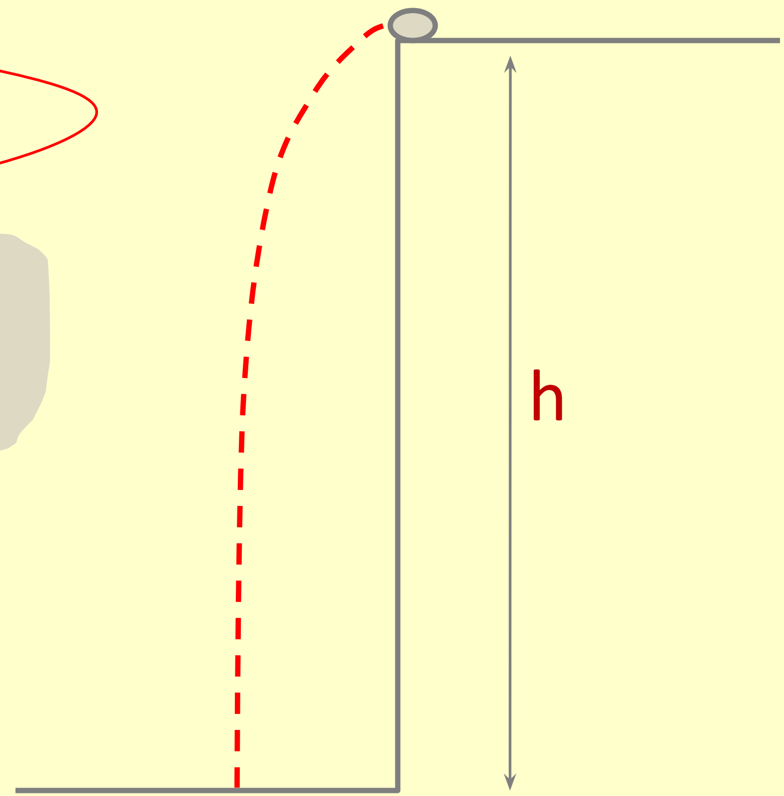
Дата рождения:
15 февраля 1564
Место рождения:
Пиза, Герцогство Флоренция
Дата смерти:
8 января 1642 (77 лет)
Научная сфера:
философ, физик, астроном, математик

Опыты Галилея

Начало математической модели

$$t \sim \sqrt{h}$$

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2$$



$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Простые формулы содержат много информации, но не объясняют причинной связи, не объясняют природы тяготения. <u>Но именно формальное описание явлений оказалось самым плодотворным в науке.</u>

Галилей → **Ньютон**

Исаак

1, 2, 3 законы Ньютона,
закон всемирного тяготения,
дифференциальное и интегральное исчисление, …

<u>Далее:</u>

- электромагнитная теория Максвелла;
- теория относительности Энштейна;
- квантовая теория

$$F = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

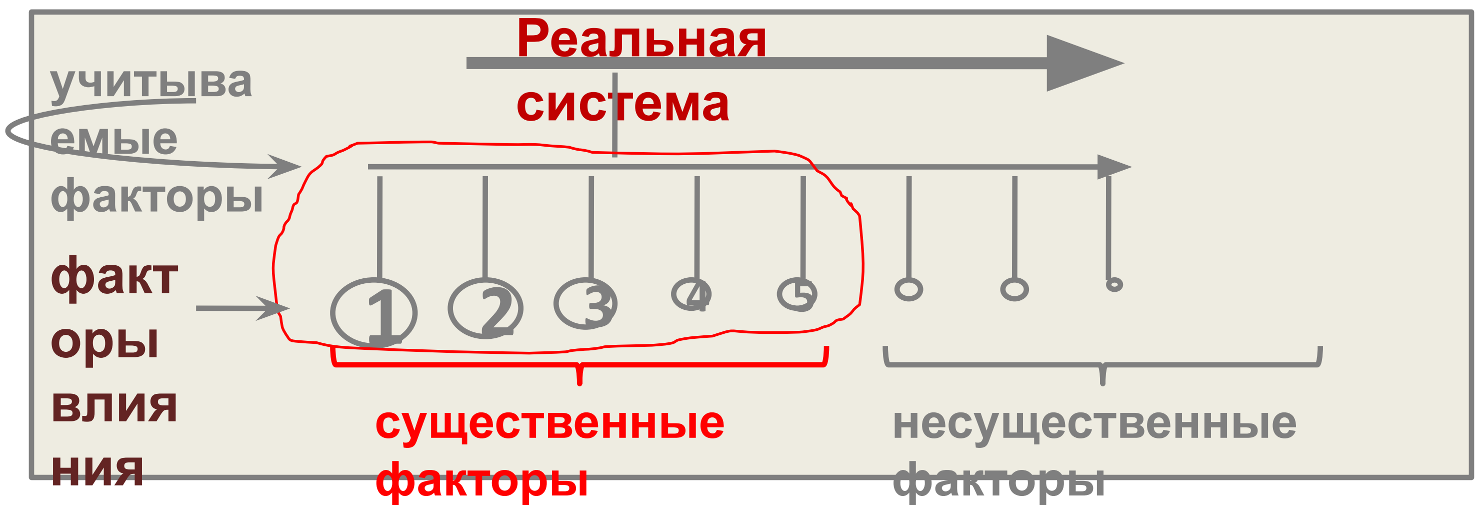
Математическая модель. Описывает явление, но не объясняет его.

9.2 Построение математических моделей

1 этап. Начинается с детального анализа исследуемого явления или объекта.

По результатам предварительных оценок, экспериментов, интуитивных предположений все факторы, влияющие на реальную систему, делятся на две группы:

- **существенные**;
- **несущественные**.

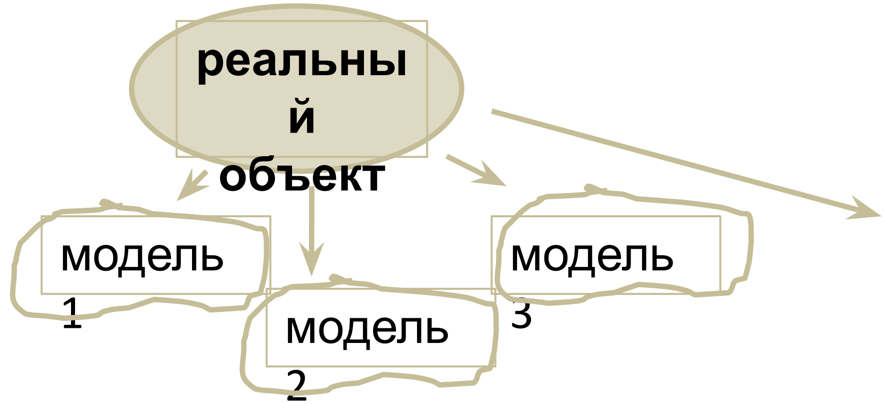


Несущественными факторами пренебрегаем. Одновременно формулируются допущения, которые определяют границы применимости модели.

2 этап. Математическая модель записывается в математических терминах (на математическом языке). Обычно это алгебраические, дифференциальные или интегральные уравнения.

Сколько можно построить математических моделей

?



Много. Например, различной степени сложности.

Проблема выбора модели:

Должна быть **достаточно полной**, чтобы точнее описывать реальную систему.

?

Должна быть **достаточно простой**, чтобы ее можно было решить с помощью имеющихся средств.

Слишком простые и слишком сложные модели на практике бесполезны!

модели Птолемея-

9.3 Этапы математического моделирования

Тестирование программы.
Устраняются логические ошибки и ошибки численного метода. Для этого проводится расчет некоторых вариантов задачи, для которых имеются известные аналитические решения или надежные экспериментальные данные.

Например, $\frac{d}{dx} y = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$ - аналитического решения нет

Тестовые варианты:

а) $a = 0, b \neq 0 \qquad \frac{d}{dx} y = b \cdot y^2$

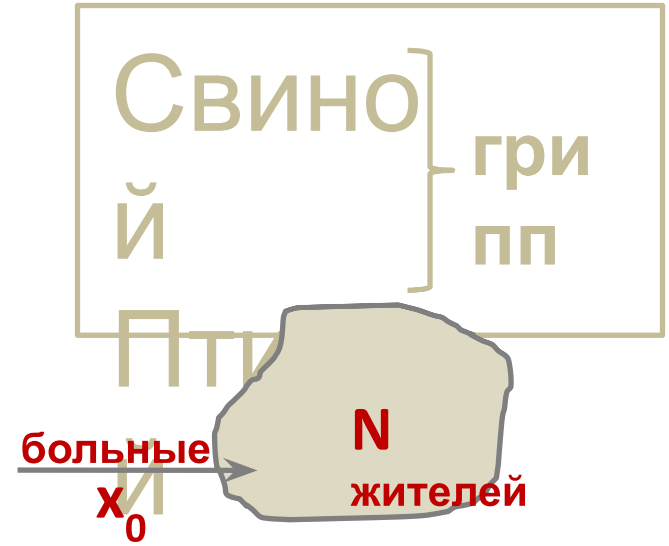
б) $a \neq 0, b = 0 \qquad \frac{d}{dx} y = a \cdot x^2$

есть аналитические решения

Оценка адекватности. Полученные результаты обрабатываются и анализируются. После этого делаются выводы:

1. математическая модель удовлетворяет поставленным требованиям;
2. модель требует уточнений – модифицируется (как правило, усложняется) и проводится новый цикл исследования.

9.4 Задача о развитии эпидемии



Постановка задачи

В городе Б – N жителей. В некоторый момент времени t_0 автобусом (поездом, самолетом, пешком,...) прибыло x_0 больных свиным гриппом. Построить модель распространения эпидемии и провести ее исследование.

Основные допущения:

1. иммунитета к болезни нет;
2. летальных исходов нет;
3. больные равномерно распределены среди здоровых;
4. у всех болезнь протекает одинаково.

Математическая модель

Введем обозначения: **x** – количество больных, **t** – время.

Тогда количество вновь заболевших (скорость распространения эпидемии) будет $\frac{d}{dt}x$.

Рассмотрим $\frac{d}{dt}x$?

Можно утверждать, что для скорости распространения эпидемии справедливы:

1) $\frac{d}{dt}x \sim x$

2) $\frac{d}{dt}x \sim (N - x)$

количество здоровых

$$\frac{d}{dt}x = k \cdot x \cdot (N - x) \quad (1)$$

Здесь k – некоторый коэффициент (контактнос

Введем параметр $\alpha = \frac{x_0}{N}$

$x_0 = 0, \alpha = 0$ - больных нет

$x_0 = N, \alpha = 1$ - все больны

$$\frac{d}{dt}x = k \cdot x \cdot (N - x)$$
$$t = 0, x(0) = \alpha \cdot N \quad (2)$$

(задача Коши)

Безразмерные
переменные:

Задачу можно существенно упростить, если перейти к безразмерным переменным. Для этого введем некоторые характерные значения (масштабы) : t_* - для времени, x_* - для количества больных.

В нашей задаче можно выбрать $x_* = N$, $t_* = 1/kN$.

Тогда задача (2) в безразмерной форме будет

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\xi = \xi\cdot(1-\xi) \\ &\tau = 0, \xi(0) = \alpha \end{aligned}} \qquad (3)$$

Здесь единственный параметр $\boxed{0 \le \alpha \le 1}$

предельные значения

$\alpha = 0$ - в начальный момент больных нет;

$\alpha = 1$ - все уже больны.

Результаты численного моделирования

1. Тестирование

$$\frac{d}{d\tau}\xi(\tau) = \xi(\tau)\cdot(1 - \xi(\tau))$$

$$\xi(0) = \alpha$$

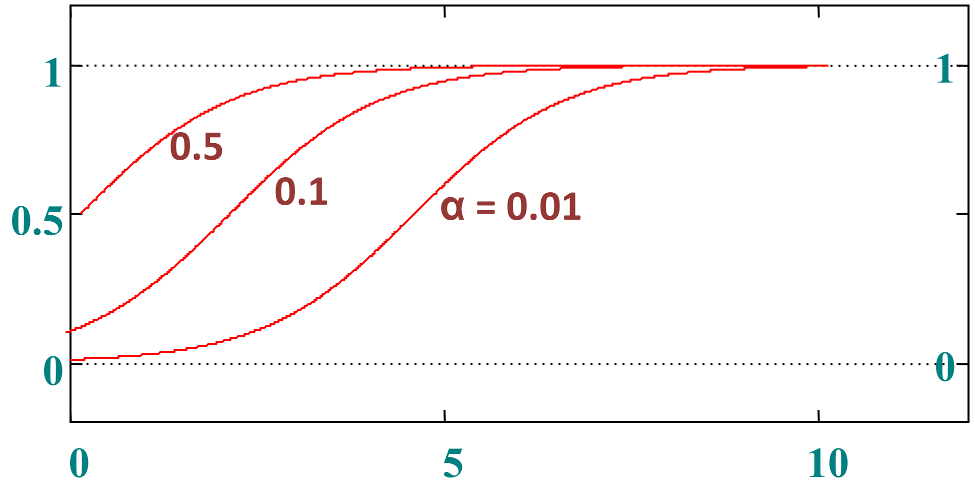
Рассмотрим два частных случая:

$\alpha = 0 \longrightarrow \xi \equiv 0$,

$\alpha = 1 \longrightarrow \xi \equiv 1$

MC: Demo Мат Моделирование

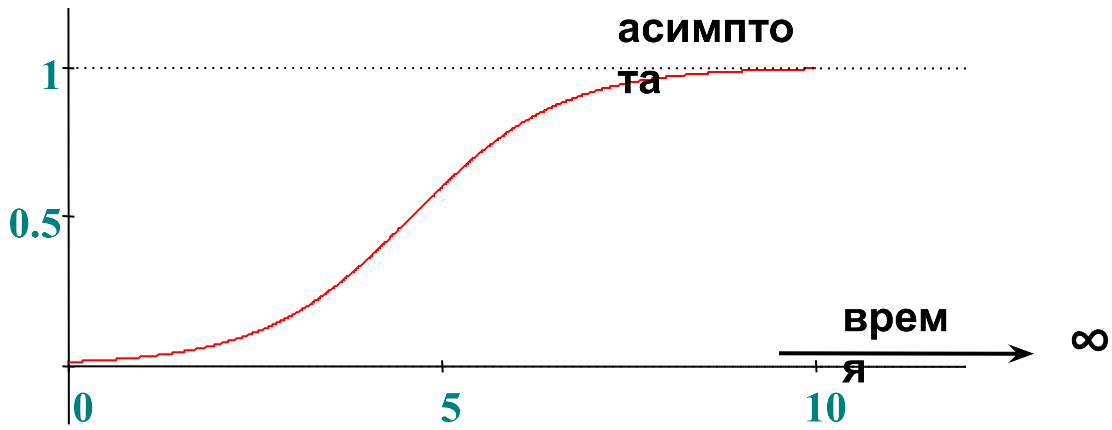
2. Влияние параметра α



MC: Demo Мат Моделирование

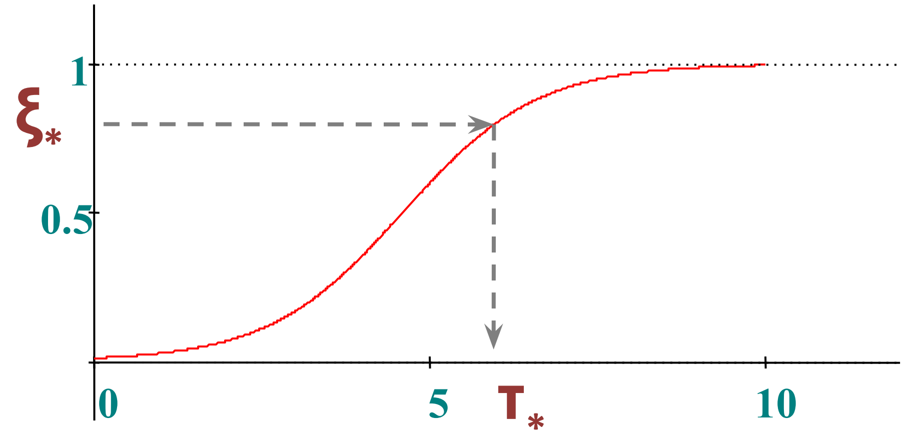
3. Спад эпидемии

Когда эпидемия идет на спад?



Теоретически (свойство модели) эпидемия затухает на бесконечности.
А как практически?
Когда можно считать, что эпидемия пошла на спад?

Вариант №1. Задаем некоторое ξ_*
и находим соответствующее T_*



Вариант №2. Находим точку перегиба T_*
и соответствующее