

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

## ЗНАЧИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

После определения оценок коэффициентов регрессии необходимо проверить гипотезу о значимости коэффициентов  $b_j$ . Лучше всего это сделать в виде *нуль-гипотезы*, т.е. гипотезы о равенстве  $b_j = 0$ .

Если она подтвердится, то коэффициент  $b_j$  следует признать статистически незначимым и отбросить из искомой модели; если гипотеза не подтвердится, то соответствующий коэффициент  $b_j$  следует признать значимым и включить в модель.

## ЗНАЧИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

Проверка гипотезы проводится с помощью  $t$  - критерия Стьюдента, который при проверке нуль-гипотезы формируется в виде

$$t = \frac{|b_i|}{\sqrt{S_{b_i}^2}} = \frac{|b_i|}{\sqrt{S_y^2}} \cdot \sqrt{N}$$

где  $S_{b_i}^2$  – дисперсия ошибки определения коэффициента  $b_i$ .

При полном и дробном факторном планировании для всех  $i$

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{N}$$

доверительные интервалы  $\Delta b_i = \pm t S_{b_i}$

Некоторые значения  $t$ -критерия представлены в табл.

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

f	Доверительная вероятность						
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,156	1,476	1,943	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,134	1,440	1,895	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,119	1,415	1,860	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,108	1,397	1,833	2,306	2,896	3,355	4,781

Если величина коэффициента регрессии превышает  $\Delta b_j$ , найденное для  $q$  % -го уровня значимости и числа степеней свободы,  $f = N(k-1)$ , где  $N$  – число серий параллельных опытов,  $k$  – число параллельных опытов, нуль-гипотеза отвергается, коэффициент считается значимым и его следует включить в искомую модель

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Статистическая незначимость коэффициента  $b_i$  может быть обусловлена следующими причинами:

- уровень базового режима близок к точке частного экстремума по переменной  $X_i$  или по произведению переменных;
- шаг варьирования  $\Delta x_i$  выбран малым;
- данная переменная (или произведение переменных) не имеет функциональной связи с выходным параметром  $y$ ;
- велика ошибка эксперимента вследствие наличия неуправляемых и неконтролируемых переменных.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Поскольку ортогональное планирование позволяет определять доверительные границы для каждого из коэффициентов регрессии в отдельности, то если какой-либо из коэффициентов окажется незначимым, он может быть отброшен без пересчета всех остальных. После этого математическая модель объекта составляется в виде уравнения связи выходного параметра  $y$  и переменных  $X_i$ , включающего только значимые коэффициенты.

# ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ

Первый вопрос, который нас интересует после вычисления коэффициентов регрессии, – это проверка ее пригодности или проверка адекватности модели.

Для этого определяют дисперсию адекватности (остаточную дисперсию)

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{f} \sum_i \Delta y_i^2$$

где  $f$  – число степеней свободы (разность между числом опытов и числом коэффициентов (констант), которые уже вычислены по результатам этих опытов независимо друг от друга)

$$f = N - (k + 1),$$

где  $N$  – число опытов;

$k$  – число коэффициентов регрессии  $b_j$ .

## ПРОВЕРКА АДЕКВАТНОСТИ

Так для ПФЭ  $2^3$   $f = 8 - (3 + 1) = 4$ ;

для ПФЭ  $2^2$   $f = 4 - (2 + 1) = 1$ .

Вычислим разность  $\Delta y_i^2 = (y_i^{\text{экс}} - y_i^{\text{расч}})^2$

После этого для проверки адекватности используем критерий Фишера:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S^2} \geq F_{табл}$$

Для определения  $F_{табл}$  необходимо знать число степеней свободы для дисперсий воспроизводимости и адекватности. В табл. представлены некоторые значения критерия Фишера с доверительным уровнем вероятности 95 %.



# ФИШЕРОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН ДЛЯ $P = 0,95$

Число степеней свободы дисперсии воспроизводимости	Число степеней свободы дисперсии адекватности									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9
2	18,51	19,00	19,16	19,75	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,44	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98

# ФИШЕРОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если расчетное значение критерия Фишера не превышает табличного, то с соответствующей доверительной вероятностью модель можно считать адекватной.

Если гипотеза адекватности отвергается, то модель признается неадекватной экспериментальным данным. *Неадекватность модели не означает ее неправильности!*

Неадекватность модели может означать, что не весь перечень влияющих факторов был принят во внимание, или что необходимо перейти к более сложной форме уравнения связи, или выбрать другой шаг варьирования по одному или нескольким факторам и т. п. Однако все достижения неадекватной модели (отсев незначимых факторов, оценка дисперсии эксперимента и другие) остаются в силе

## ПРИМЕР

Рассмотрим химический процесс, в котором выход продукта реакции  $y$  (%) зависит от температуры реакционной смеси  $x_1$  (°C) и концентрации реагента  $x_2$  (%). Требуется с помощью полного факторного эксперимента найти математическое описание этого процесса в окрестности точки факторного пространства с координатами  $x_{01} = 50$  °C и  $x_{02} = 25$  %.

При проведении полного факторного эксперимента зададимся условиями, приведенными в табл.

Характеристика эксперимента	$x_1$ , °C	$x_2$ , %
Основной уровень	50	25
Интервал варьирования	5	1
Верхний уровень	55	26
Нижний уровень	45	24

## ПРИМЕР

*Решение.* Математическое описание рассматриваемого процесса будем искать в виде уравнения регрессии  $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ , где кодированные переменные связаны с температурой и концентрацией следующими соотношениями:

$$X_1 = \frac{x_1 - x_{01}}{\Delta x_1} \qquad X_2 = \frac{x_2 - x_{02}}{\Delta x_2}$$

Матрица планирования и результаты полного факторного эксперимента представлены в таблице

Номер опыта	$X_1$	$X_2$	$x_1, ^\circ\text{C}$	$x_2, \%$	$y, \%$
1	-1	-1	45	24	35,5
2	+1	-1	55	24	38,7
3	-1	+1	45	26	32,6
4	+1	+1	55	26	36,2

## ПРИМЕР

На основании результатов полного факторного эксперимента рассчитаем коэффициенты регрессии:

$$b_0 = 1/4(35,5+38,7+32,6+36,2) = 35,6,$$

$$b_1 = 1/4(-35,5+38,7-32,6+36,2) = 1,95,$$

$$b_2 = 1/4(-35,3-38,7+32,6+36,2) = -1,35.$$

Будем считать, что оценка дисперсии среднего значения равна 0,42 (предыдущий пример). Примем также, что с этой величиной связаны три степени свободы

$$f = N(k-1) = 3(2-1) = 3.$$

## ПРИМЕР

Ошибку в определении коэффициентов регрессии вычислим как

$$S_b = \sqrt{\frac{S_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{0,42}{4}} = 0,32$$

Пользуясь табл. Стьюдента, найдем, что для доверительной вероятности  $P = 0,95$  и трех степеней свободы значение критерия Стьюдента  $t = 3,18$ . Тогда  $S_b t = 0,32 \cdot 3,18 = 1,03$ .

Для оценки значимости коэффициентов регрессии рассмотрим следующие соотношения:

$$|b_0| = 35,6 > S_b t; |b_1| = 1,95 > S_b t; |b_2| = 1,35 > S_b t.$$

Видно, что все коэффициенты регрессии значимы. Следовательно, искомое уравнение имеет вид  $y = 35,6 + 1,95X_1 - 1,35X_2$ .

## ПРИМЕР

Для проверки адекватности уравнения регрессии найдем расчетные значения функции отклика:

$$y_1^{\text{расч}} = 35,6 + 1,95(-1) - 1,35(-1) = 35,0;$$

$$y_2^{\text{расч}} = 35,6 + 1,95(+1) - 1,35(-1) = 38,9,$$

$$y_3^{\text{расч}} = 35,6 + 1,95(-1) - 1,35(+1) = 32,3,$$

$$y_4^{\text{расч}} = 35,6 + 1,95(+1) - 1,35(+1) = 36,2.$$

## ПРИМЕР

Вычислим оценку дисперсии адекватности:

$$\begin{aligned} S_{ад}^2 &= \frac{1}{N - (k + 1)} \sum_{j=1}^N (y_j^{эксн} - y_j^{расч})^2 = \\ &= \frac{1}{4 - 3} [(35,5 - 35,0)^2 + (38,7 - 38,9)^2 + (32,6 - 32,3)^2 + (36,2 - 36,2)^2] = 0,38. \end{aligned}$$

С ней связано число степеней свободы  $f = N - (k + 1) = 4 - 3 = 1$ .

Расчетное значение критерия Фишера

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S^2} = \frac{0,38}{0,42} = 0,905$$

Оно не превосходит табличного значения ( $F_{таб} = 10,13$ ), следовательно, нельзя сказать, что уравнение регрессии неадекватно.



# ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Основы научных исследований. Курс лекций (для студентов инженерных специальностей) / Сост. Н. Г. Бойко, О. В. Федоров – Донецк: ДонНТУ, 2007. – 76 с.**