ВГУЭС

Кафедра математики и моделирования

МАТЕМАТИКА

для специальности 070601.65 «Дизайн»

Преподаватель Пивоварова Ирина Викторовна

Содержание курса

1. Векторная алгебра
2. Прямая на плоскости
3. Кривые второго порядка
4. Полярная система координат
5. Прямая и плоскость в пространстве
6. Поверхности второго порядка

Тема 1.

Векторная алгебра

- *Определение.* Вектором называется направленный отрезок.

Обозначение: $\overline{a}$, $\overline{AB}$

(*A* – начало вектора, *B* – конец вектора).

- *Определение.* Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают.

Обозначение: $\overline{0}$

- *Определение.* Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной, или модулем.

Обозначение: $|\overline{a}|, \ |\overline{AB}|$

- *Определение.* Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Обозначение: $\overline{a} \parallel \overline{b}$

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ векторы сонаправлены

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ векторы противоположно направлены

- *Определение.* Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

- *Определение.* Два вектора называются равными, если они сонаправлены и имеют равные длины.

Обозначение: $\bar{a} = \bar{b}$

- *Определение.* Два вектора называются противоположными, если они противоположно направлены и имеют равные длины.

Обозначение: $\overline{a}$, $\overline{-a}$

Любой вектор в пространстве можно представить в виде

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}$$

где $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей Ox, Oy, Oz (орты осей);

a_x, a_y, a_z – координаты вектора:

$\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ или $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$

Модуль вектора вычисляется по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Если даны точки

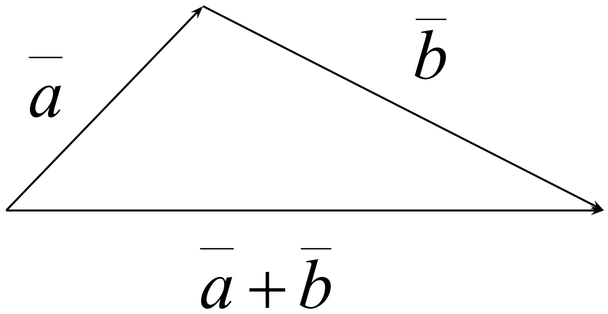
$M_1 = (x_1; y_1; z_1)$ и $M_2 = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

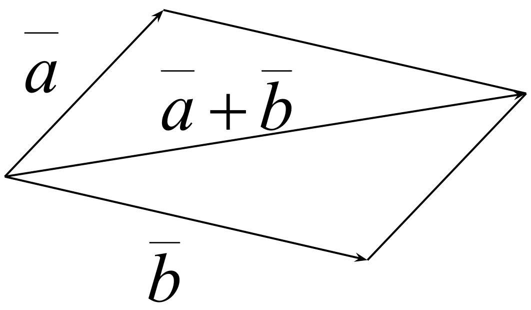
- *Определение.* Линейными операциями называют операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Сложение векторов

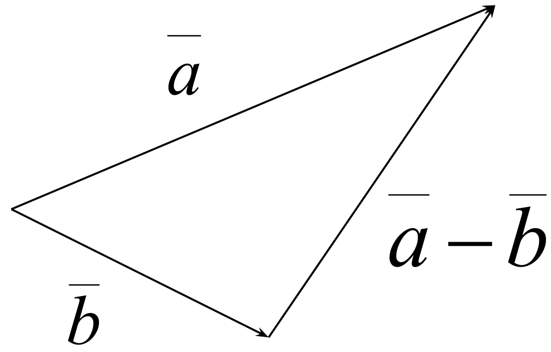
- по правилу треугольника



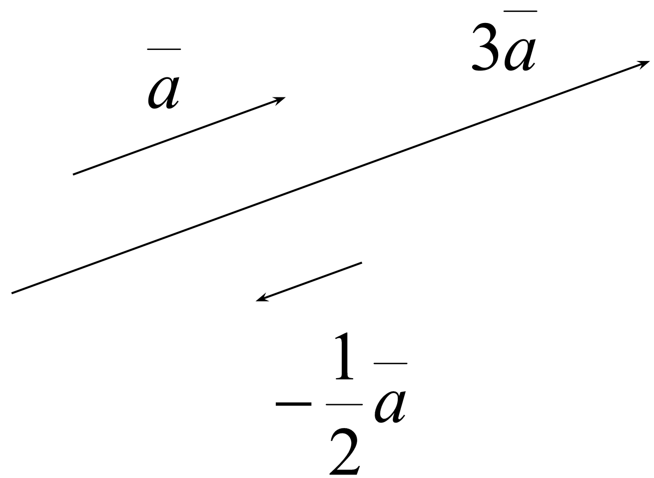
- по правилу параллелограмма



- вычитание векторов



- умножение вектора на число



Если $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

1) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$

2) $\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$

3) $k\overline{a} = (ka_x; ka_y; ka_z)$

4) $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = k\overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

Свойства линейных операций:

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$

2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$

3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}\,;\ \overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$

4) $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})=\beta(\alpha\overline{a})$

5) $(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$

6) $\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$

7) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}\,;\ (-1)\cdot\overline{a}=-\overline{a}$

Скалярное произведение векторов

- *Определение.* Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos \varphi$$

Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$

2) $\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b})$

3) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$

4) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$, или $\bar{b} = \bar{0}$, или $\bar{a} \perp \bar{b}$

5) $\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$

Ключевые понятия

Вектор, модуль вектора, коллинеарные векторы, компланарные векторы, координаты вектора, скалярное произведение векторов.

Вопросы для самопроверки

по теме «Векторная алгебра»

- Дайте определения вектора, нулевого вектора, длины вектора, коллинеарных векторов, компланарных векторов, равных векторов, противоположных векторов, скалярного произведения векторов.
- Как определяются сумма векторов, разность векторов, произведение вектора на число?
- Как выражается скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов?
- Сформулируйте условия коллинеарности и перпендикулярности векторов.

Тема 2.

Прямая на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$\bar{n} = (A; B)$ – вектор, перпендикулярный прямой (нормальный вектор прямой),

$M_0(x_0; y_0)$ – заданная точка на прямой.

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0$$

$\overline{n} = (A; B)$ – вектор, перпендикулярный прямой (нормальный вектор прямой).

Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору (каноническое уравнение прямой):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$\bar{s} = (m; n)$ – вектор, параллельный прямой (направляющий вектор прямой),

$M_0(x_0; y_0)$ – заданная точка на прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ – заданные точки на прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой (α – угол между прямой и осью Ох),

$M_0(x_0; y_0)$ – заданная точка на прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b$$

$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой (α – угол между прямой и осью Ох),

b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Оу.

Угол между двумя прямыми:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

k_1 , k_2 – угловые коэффициенты прямых.

- Условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2$$

- Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ключевые понятия

Прямая, параллельные прямые, перпендикулярные прямые, нормальный вектор прямой, направляющий вектор прямой, угловой коэффициент прямой.

Вопросы для самопроверки

по теме «Прямая на плоскости»

- Различные виды уравнений прямой на плоскости.
- Какой вектор называется нормальным, направляющим вектором прямой?
- Как определяется угловой коэффициент прямой?
- В каком случае $k = 0$? k не существует?
- Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Тема 3.

Кривые второго порядка

Окружность

- *Определение.* Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

R – радиус окружности,

$C(x_0; y_0)$ – центр окружности.

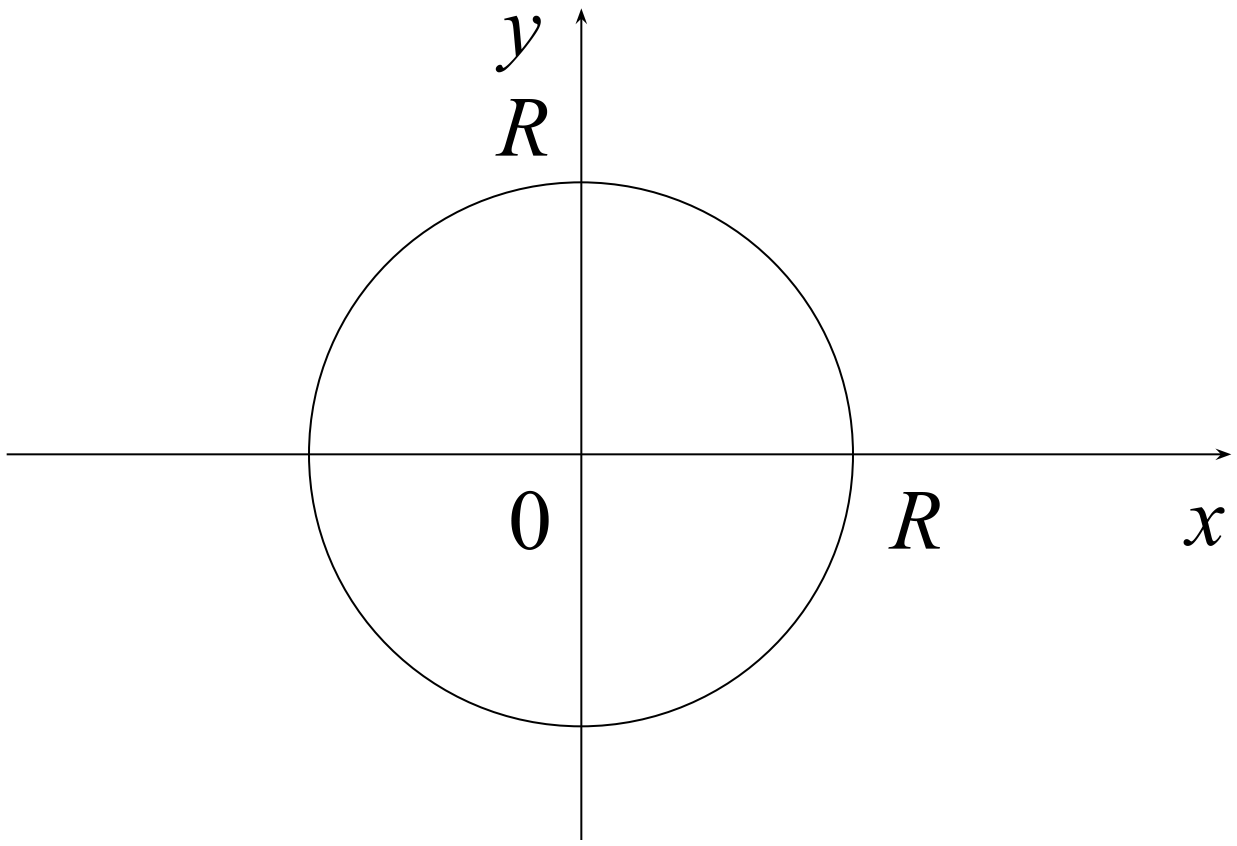
В частности, если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

R – радиус окружности,

$C(0;0)$ – центр окружности.

График окружности $x^2 + y^2 = R^2$



Эллипс

- *Определение.* Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:

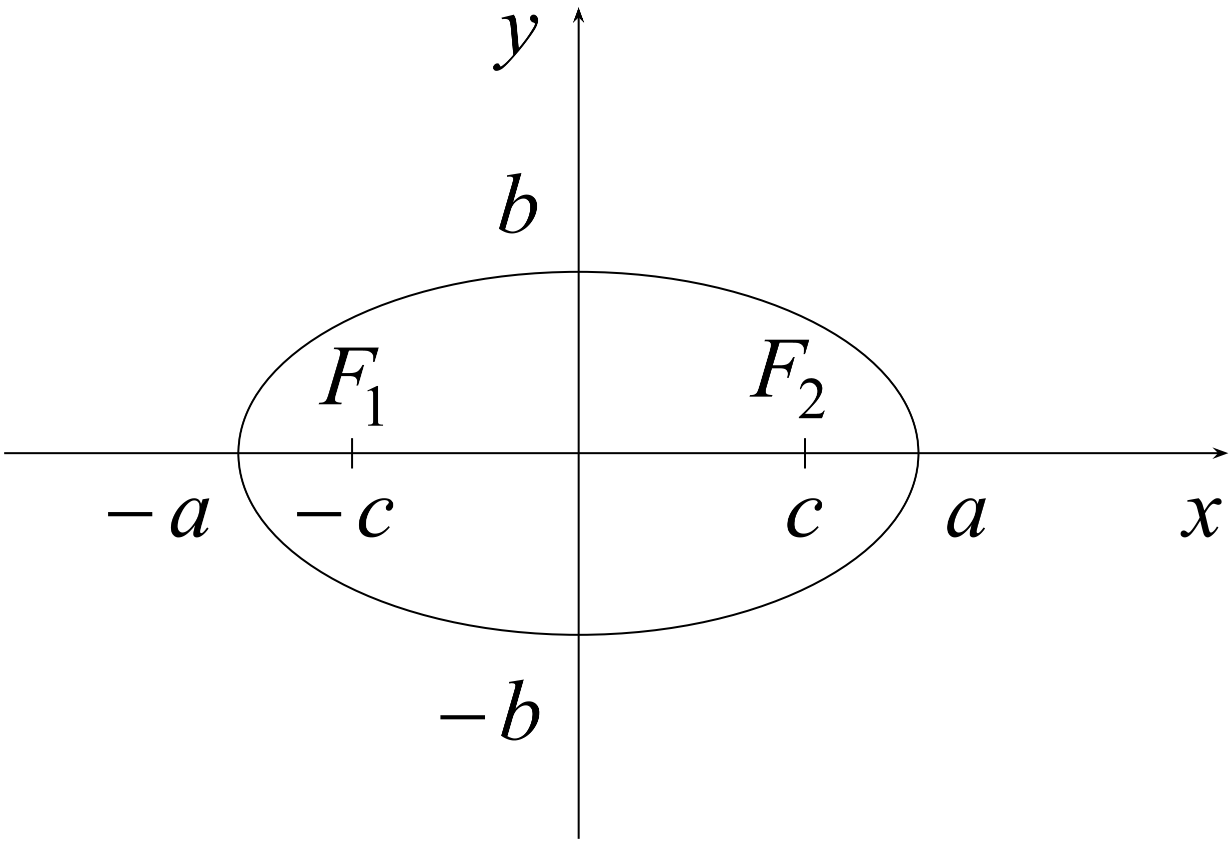
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a , b – большая и малая полуоси эллипса,

c – половина расстояния между

фокусами, $c^2=a^2-b^2$

График эллипса



Гипербола

- *Определение.* Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

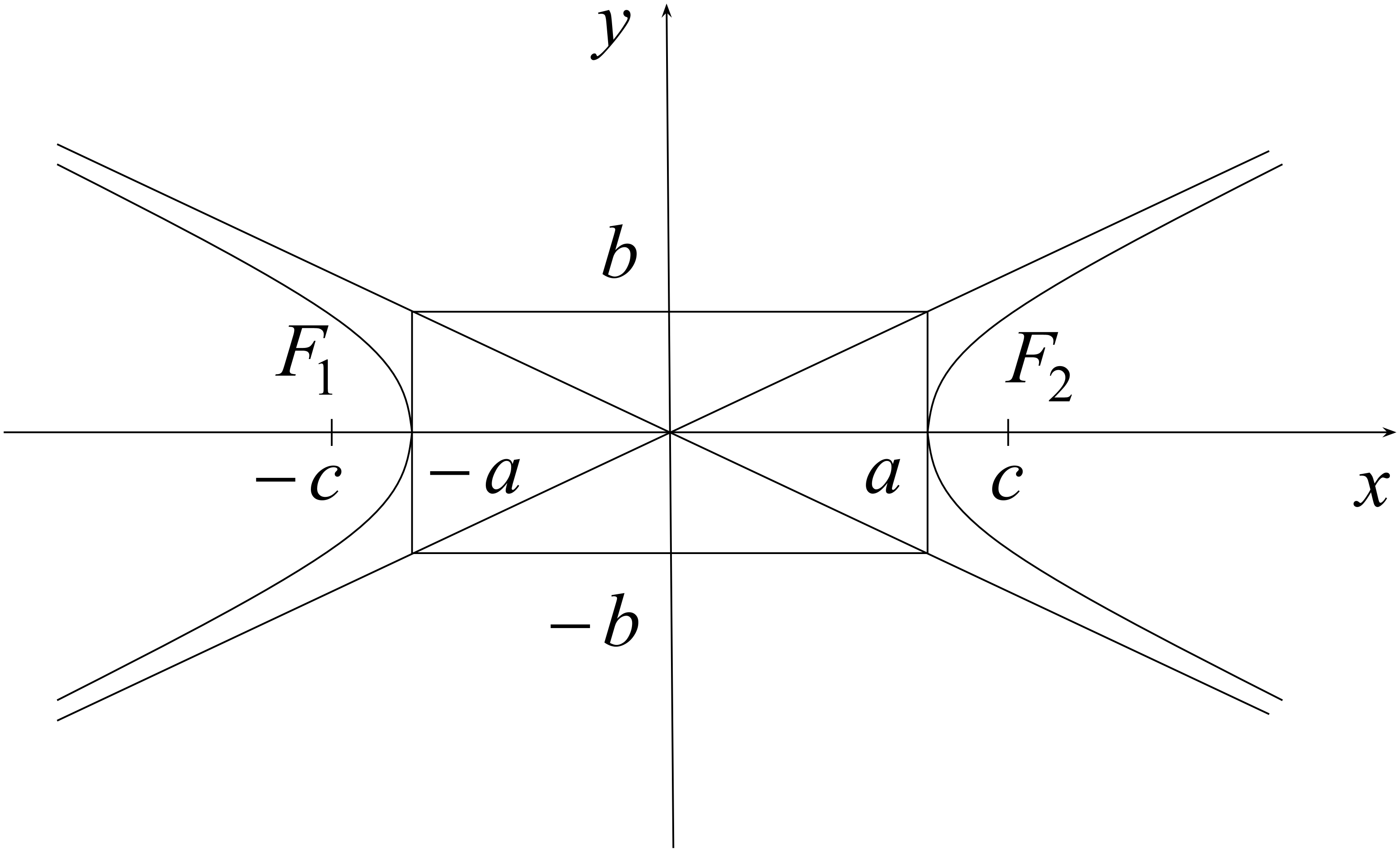
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

a , b – действительная и мнимая полуоси гиперболы,

c – половина расстояния между фокусами, $c^2=a^2+b^2$

$y=\pm\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы.

График гиперболы

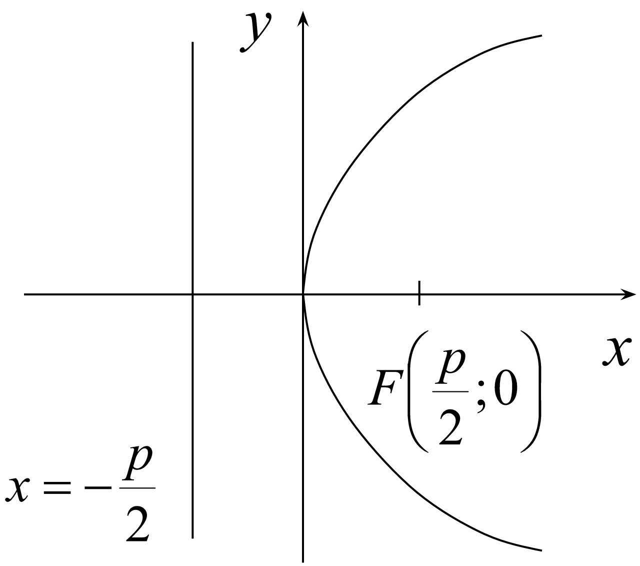


Парабола

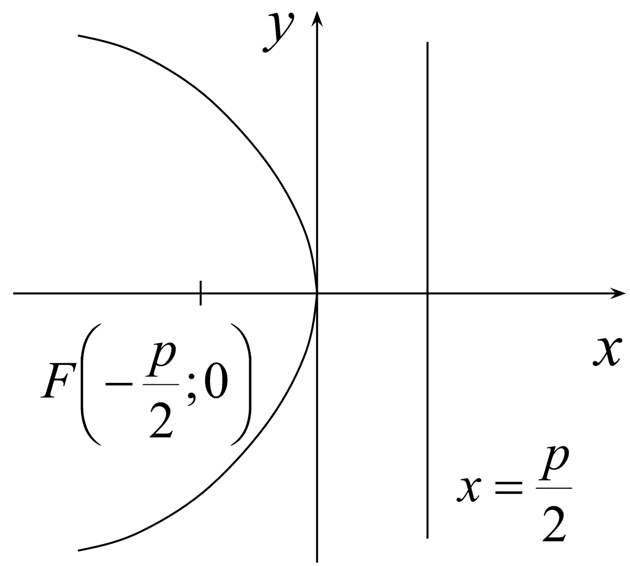
- *Определение.* Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы (соответствие вида и графика):
p – параметр параболы, ($p > 0$).

$$y^2 = 2px$$



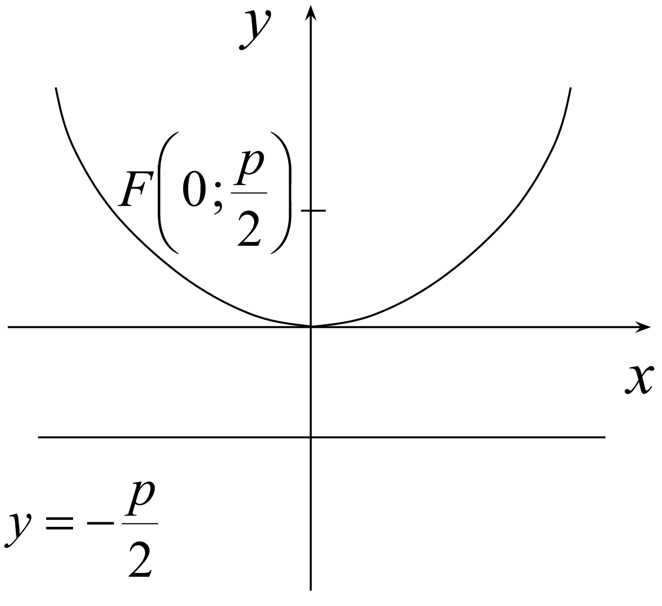
$$y^2 = -2px$$



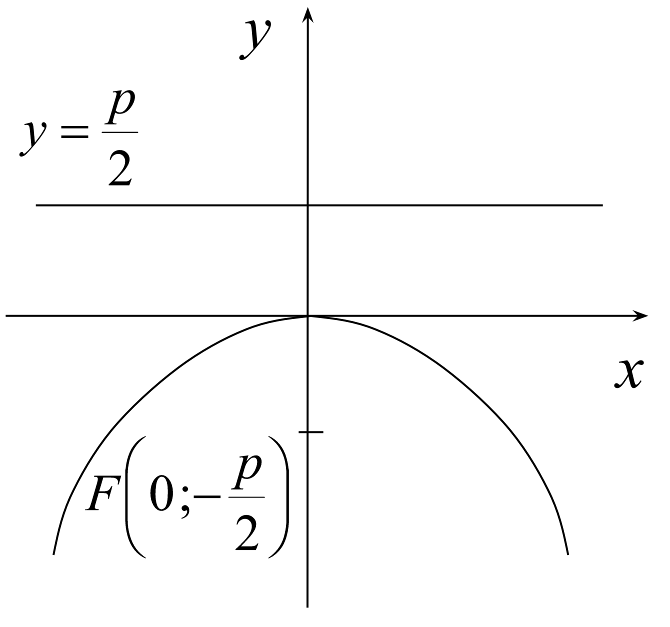
Каноническое уравнение параболы (соответствие вида и графика):

p – параметр параболы, ($p > 0$).

$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$



Ключевые понятия

Окружность, эллипс, гипербола, парабола, фокусы, директриса, центр линии, вершины кривых, большая и малая полуоси, действительная и мнимая полуоси.

Вопросы для самопроверки

по теме «Кривые второго порядка»

- Определения окружности, эллипса, гиперболы, параболы.
- Где располагаются фокусы эллипса, гиперболы, параболы?
- Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы.
- Графики окружности, эллипса, гиперболы, параболы.
- Асимптоты гиперболы.

Тема 4.

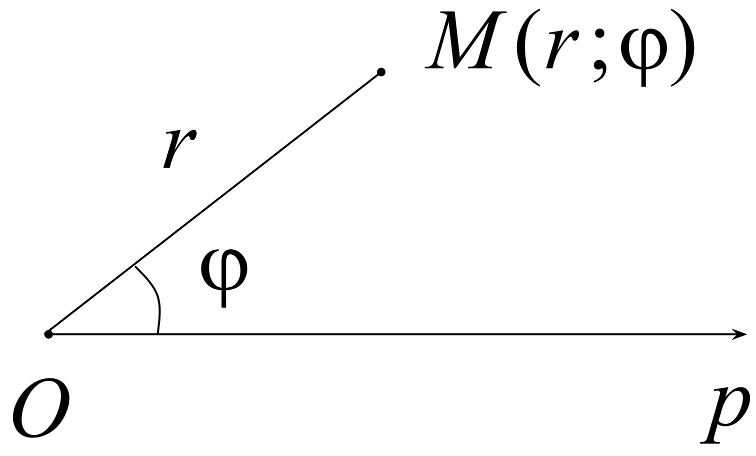
Полярная система координат

O – полюс, Op – полярная ось,

r – полярный радиус точки M,

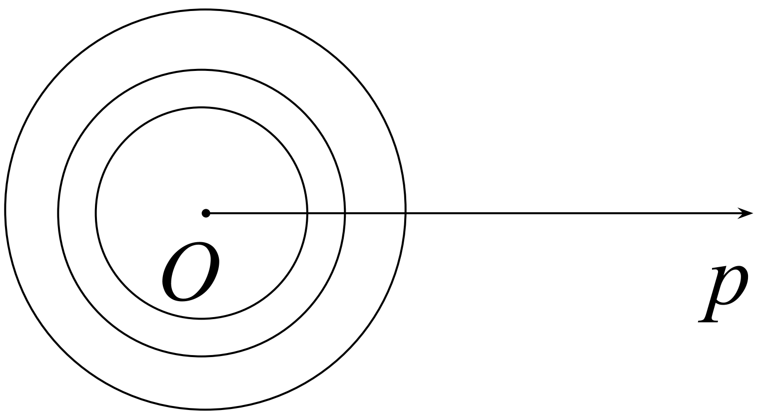
φ – полярный угол точки M,

r , φ – полярные координаты точки M.



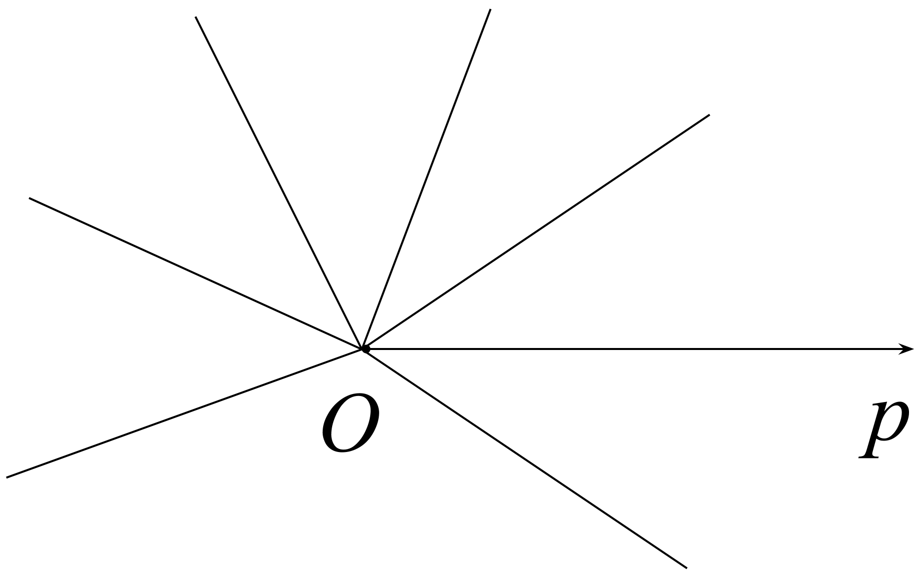
Координатные линии:

$r = const$ – концентрические окружности с центром в полюсе



Координатные линии:

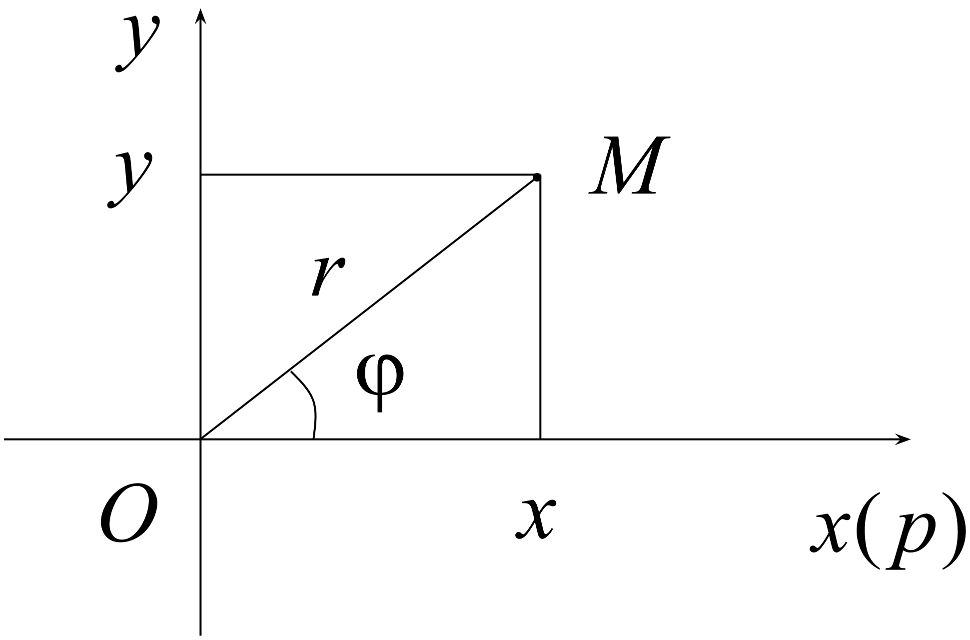
$\varphi = const$ – лучи, выходящие из полюса



Связь между полярными и декартовыми прямоугольными координатами точки

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$



Ключевые понятия

Полюс, полярная ось, полярные координаты точки, полярный радиус, полярный угол, координатные линии

Вопросы для самопроверки

по теме «Полярная система координат»

- Как определяются полярные координаты точки?
- Что такое полярный радиус, полярный угол точки?
- Какие линии определяют уравнения $r = const$, $\phi = const$?
- Какие координаты имеет полюс?
- Как связаны декартовы прямоугольные и полярные координаты точки?

Тема 5.

Прямая и плоскость

в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$\overline{n} = (A; B; C)$ – вектор, перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости),

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – заданная точка на плоскости.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$\overline{n} = (A; B; C)$ – вектор, перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости).

- Условие параллельности двух плоскостей:

$$\overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

- Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$\overline{n_1} \perp \overline{n_2}, \text{ то есть } \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$$

$$\text{или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору (каноническое уравнение прямой):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\bar{s} = (m; n; p)$ – вектор, параллельный прямой (направляющий вектор прямой),

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – заданная точка на прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – заданные точки на прямой.

- Условие параллельности двух прямых:

$$\overline{s_1} \parallel \overline{s_2} \text{ или } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

- Условие перпендикулярности двух прямых:

$$\overline{s_1} \perp \overline{s_2} \text{, то есть } \overline{s_1} \cdot \overline{s_2} = 0$$

$$\text{или } m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

- Условие параллельности прямой и плоскости:

$$\overline{n} \perp \overline{s}\text{, то есть } \overline{n} \cdot \overline{s} = 0$$

$$\text{или } Am + Bn + Cp = 0$$

- Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\overline{n} \parallel \overline{s} \text{ или } \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ключевые понятия

Прямая, плоскость, параллельные прямые и плоскости, перпендикулярные прямые и плоскости, нормальный вектор плоскости, направляющий вектор прямой.

Вопросы для самопроверки

по теме «Прямая и плоскость в пространстве»

- Различные виды уравнений прямой и плоскости в пространстве.
- Какой вектор называется нормальным вектором плоскости, направляющим вектором прямой?
- Как определяется расстояние от точки до плоскости?
- Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости.

Тема 6.

Поверхности второго порядка

Цилиндрические поверхности

Определение. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой. Линия L при этом называется направляющей цилиндрической поверхности, а каждая из прямых, составляющих поверхность и параллельных прямой, - ее образующей.

Если направляющая цилиндрической поверхности лежит в одной из координатных плоскостей, а образующие параллельны координатной оси, перпендикулярной этой плоскости, то уравнение такой поверхности совпадает с уравнением направляющей L, то есть содержит только две переменных.

Уравнение эллиптического цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Направляющая этой поверхности – эллипс, лежащий в плоскости Oxy, а образующие параллельны оси Oz .

Уравнение гиперболического цилиндра:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Его направляющая – гипербола, лежащая в плоскости Oyz, образующие параллельны оси Ox.

Уравнение параболического цилиндра:

$$x^2 = 2pz$$

Его направляющая – парабола, лежащая в плоскости Oxz, образующие параллельны оси Oy.

Конические поверхности

Определение. Конической поверхностью называется поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и проходящих через данную точку P. Линия L при этом называется направляющей конической поверхности, точка P – ее вершиной, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность, - ее образующей.

В частности, если направляющей конической поверхности является эллипс с полуосями a и b, лежащий в плоскости $z = c$, а вершина находится в начале координат, то уравнение такой поверхности имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Эллипсоид

Определение. Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Однополостный гиперболоид

Определение. Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двуполостный гиперболоид

Определение. Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Эллиптический параболоид

Определение. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}\ , \quad pq > 0$$

Гиперболический параболоид

Определение. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}\ ,\quad pq > 0$$

Ключевые понятия

Цилиндрическая поверхность, коническая поверхность, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды.

Вопросы для самопроверки

по теме «Поверхности второго порядка»

- Определения различных поверхностей второго порядка: цилиндрической поверхности, конической поверхности, эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов.
- Различные виды уравнений поверхностей второго порядка.
- Исследование формы поверхностей по их уравнениям.

Рекомендуемая литература

1. Голодная Н.Ю., Пивоварова И.В. Аналитическая геометрия. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2008. – 36 с.
2. Дубинина Л.Я., Никулина Л.С., Пивоварова И.В. Курс лекций по высшей математике. Часть 1. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2008. – 132 с.

Использование материалов презентации

Использование данной презентации может осуществляться только при условии соблюдения требований законов РФ об авторском праве и интеллектуальной собственности, а также с учетом требований настоящего Заявления.

Презентация является собственностью авторов. Разрешается распечатывать копию любой части презентации для личного некоммерческого использования, однако не допускается распечатывать какую-либо часть презентации с любой иной целью или по каким-либо причинам вносить изменения в любую часть презентации. Использование любой части презентации в другом произведении, как в печатной, электронной, так и иной форме, а также использование любой части презентации в другой презентации посредством ссылки или иным образом допускается только после получения письменного согласия авторов.