

Математика в Древней Греции

Копылова Ольга
6 класс



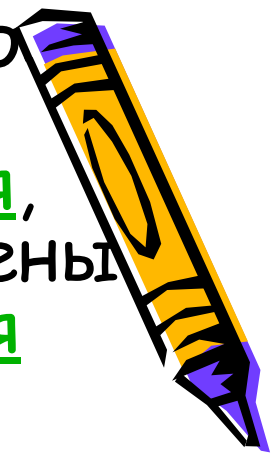
- Понятие древнегреческая математика охватывает достижения грекоязычных математиков, живших в период между VI веком до н. э. и V веком н. э.



- *Математика родилась в Греции. Это, конечно, преувеличение, но не слишком большое. В странах-современниках Эллады математика использовалась либо для обыденных нужд (подсчёты, измерения), либо, наоборот, для магических ритуалов, имевших целью выяснить волю богов (астрология, нумерология и т. п.). Греки подошли к делу с другой стороны: они выдвинули тезис «Числа правят миром». Или, как сформулировали эту же мысль два тысячелетия спустя: «Природа разговаривает с нами на языке математики».*



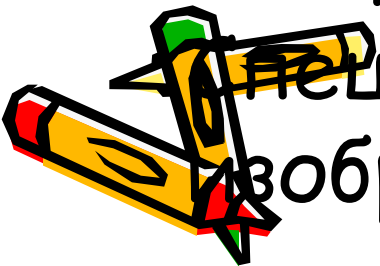
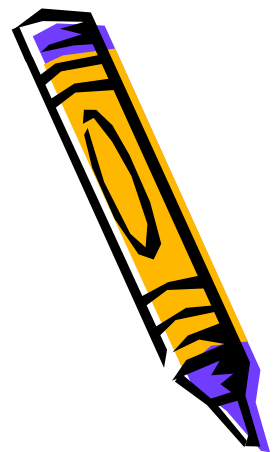
- Греки проверили справедливость этого тезиса в тех областях, где сумели: астрономия, оптика, музыка, геометрия, позже — механика. Всюду были отмечены впечатляющие успехи: математическая модель обладала неоспоримой предсказательной силой. Одновременно греки создали методологию математики и завершили превращение её из свода полуэмвристических алгоритмов в целостную систему знаний. Основой этой системы впервые стал дедуктивный метод, польза от которого — не только в установлении истинности утверждений, но также и в выявлении неочевидных связей между понятиями, научными фактами и областями математики.



- Вплоть до VI века до н. э. греческая математика ничем выдающимся не прославилась. Были, как обычно, освоены счёт и измерение. Греческая нумерация (запись чисел), как позже римская, была аддитивной, то есть числовые значения цифр складывались. Первый её вариант (аттическая, или геродианова) содержали буквенные значки для 1, 5, 10, 50, 100 и 1000. Соответственно была устроена и счётная доска (абак) с камешками. Кстати, термин калькуляция (вычисление) происходит от *calculus* — камешек. Особый первый камешек обозначал нуль



- Позднее вместо аттической нумерации была принята алфавитная — первые 9 букв греческого алфавита обозначали цифры от 1 до 9, следующие 9 букв — десятки, остальные — сотни. Чтобы не спутать числа и буквы, над числами рисовали чёрточку. Числа, большие 1000, записывали позиционно, помечая дополнительные разряды специальным штрихом (внизу слева). Специальные пометки позволяли изображать и числа, большие 10000.

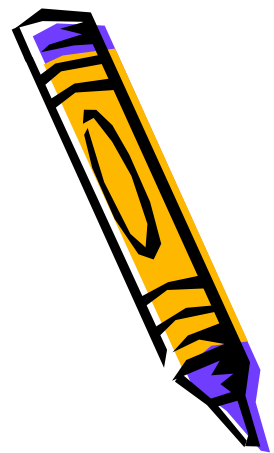


- В VI веке до н. э. «греческое чудо» начинается: появляются сразу две научные школы — ионийцы (Фалес Милетский, Анаксимен, Анаксимандр) и пифагорейцы. О достижениях ранних греческих математиков мы знаем в основном по комментариям позднейших авторов, преимущественно Евклида, Платона и Аристотеля.



• Фалес, богатый купец, во время торговых поездок, видимо, хорошо изучил вавилонскую математику и астрономию. Ионийцы дали первые доказательства геометрических теорем.

• Однако главная роль в деле создания античной математики принадлежит пифагорейцам.

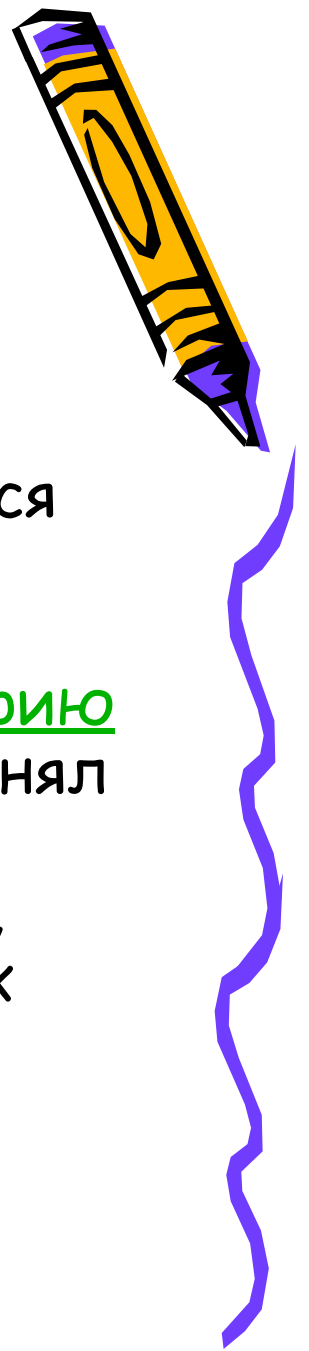


Пифагорейская школа



- Пифагор, основатель школы, как и Фалес, много путешествовал и тоже учился у египетских и вавилонских мудрецов. Вернувшись около 530 г. до н. э. в Великую Грецию (район южной Италии), он в городе Кротон основал нечто вроде тайного духовного ордена. Именно он выдвинул тезис «Числа правят миром», и с исключительной энергией занимался его обоснованием. В начале V в. до н. э., после неудачного политического выступления, пифагорейцы были изгнаны из Южной Италии, и союз прекратил свое существование, однако популярность учения от века к веку только возросла. Пифагорейские школы появились в Афинах, на островах и в греческих колониях, а их математические знания, строго оберегаемые от посторонних,



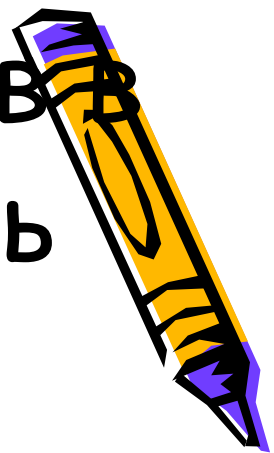


Рафаэль Санти. Пифагор (деталь Афинской школы)

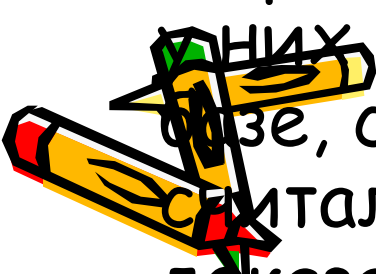
- Многие достижения, приписываемые Пифагору, вероятно, на самом деле являются заслугой его учеников. Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, арифметикой (теорией чисел), создали теорию музыки. Пифагор первый из европейцев понял значение аксиоматического метода, чётко выделяя базовые предположения (аксиомы, постулаты) и дедуктивно выводимые из них теоремы.



- Геометрия пифагорейцев в основном ограничивалась планиметрией (судя по дошедшим до нас позднейшим трудам, очень полно изложенной) и завершалась доказательством «теоремы Пифагора». Хотя изучались правильные



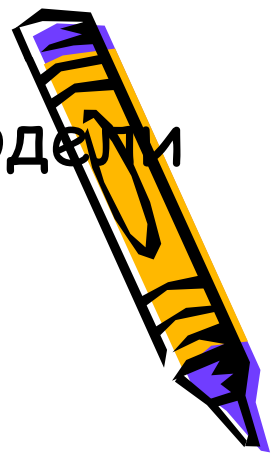
- Была построена математическая теория музыки. Зависимость музыкальной гармонии от отношений целых чисел (длины струн) была сильным аргументом пифагорейцев в пользу исконной математической гармонии мира, спустя 2000 лет воспетой Кеплером. Они были уверены, что «элементы чисел являются элементами всех вещей... и что весь мир в целом является гармонией и числом» [1]. В основе всех законов природы, полагали пифагорейцы, лежит арифметика, и с её помощью можно проникнуть во все тайны мира. В отличие от геометрии, арифметика в этих строилась не на аксиоматической основе, свойства натуральных чисел считались самоочевидными, однако доказательства теорем и здесь проводили



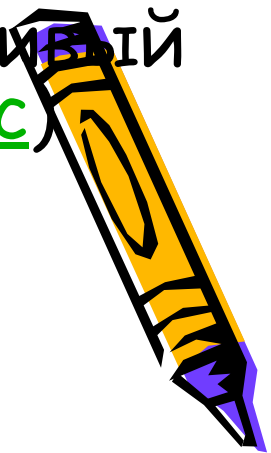
- Пифагорейцы немало продвинулись в теории делимости, но чрезмерно увлеклись играми с «треугольными», «квадратными», «совершенными» и т. п. числами, которым, судя по всему, придавали мистическое значение. Видимо, правила построения «пифагоровых троек» были открыты уже тогда; исчерпывающие формулы для них приводятся у Диофанта. Теория наибольших общих делителей и наименьших общих кратных тоже, видимо, пифагорейского происхождения. Вероятно, они же построили общую теорию дробей (понимаемых как отношения (пропорции), так как единица считалась неделимой), научились выполнять с дробями сравнение (приведением к общему знаменателю) и все 4 арифметические операции.



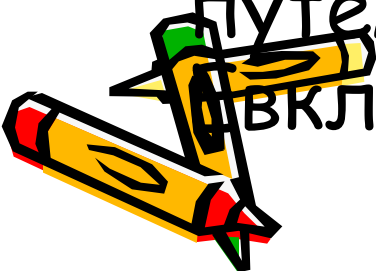
- Первой трещиной в пифагорейской модели мира стало ими же полученное доказательство иррациональности, сформулированное геометрически как несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. Невозможность выразить длину отрезка числом ставила под сомнение главный тезис пифагорейства. Даже Аристотель, не разделявший их взгляды, выражал своё изумление по поводу того, что есть вещи, которые «нельзя измерить самою малою мерою».



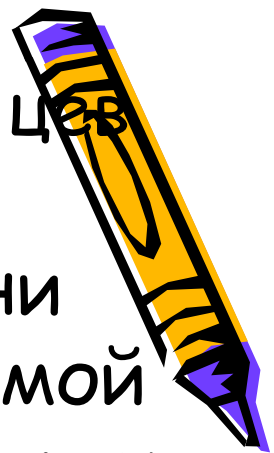
- Положение попытался спасти талантливый пифагореец Теэтет. Он (и позже Евдокс) предложили новое понимание числа, которое теперь формулировалось на геометрическом языке, и проблем соизмеримости не возникало. Однако впоследствии выяснилось, что построение числовой алгебры на основе геометрии было стратегической ошибкой пифагорейцев; например, с точки зрения геометрии выражения $x^2 + x$ и даже x^4 не имели геометрического истолкования, и поэтому не имели смысла. Позднее Декарт поступил наоборот, построив геометрию на основе алгебры, и добился громадного прогресса.



- Теэтет разработал также полную теорию делимости и классификацию иррациональностей. Можно предполагать, что деление нацело с остатком и «алгоритм Евклида» для нахождения наибольшего общего делителя тоже впервые появились у пифагорейцев, задолго до «Начал» Евклида. Непрерывные дроби как самостоятельный объект выделили только в Новое время, хотя их неполные частные естественным путём получаются в алгоритме Евклида.



- Нумерологическая мистика пифагорейцев нередко приводила к произвольным и спекулятивным выводам. Например, они были уверены в существовании невидимой Антисемли, так как без неё число небесных сфер (нижнее небо, Солнце, Луна и 6 планет) не составляет совершенного числа 10. В целом, несмотря на обилие мистики и эксцентричных предрассудков, заслуги пифагорейцев в развитии и систематизации античных математических знаний неопценимы.



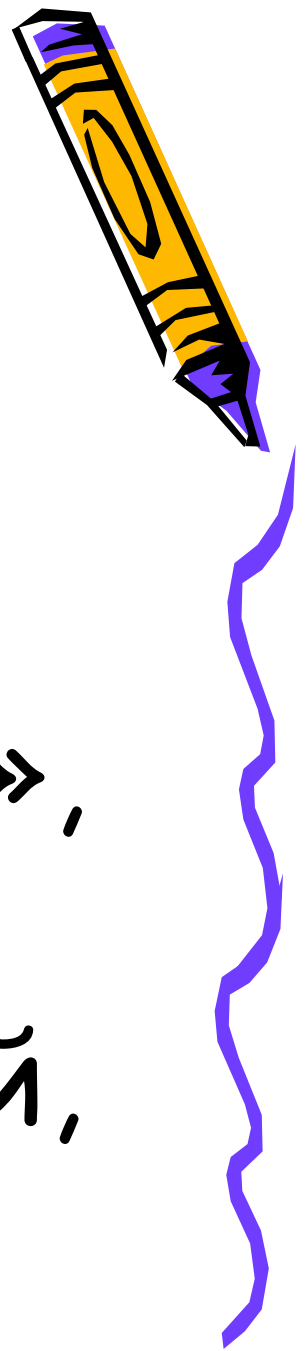
V век до н. э. — Зенон, Демокрит



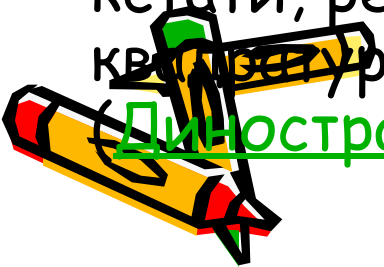
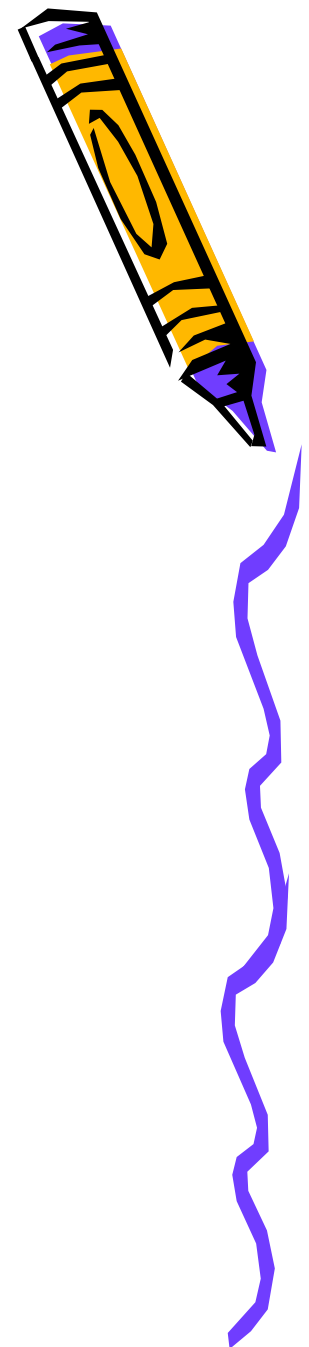
- В V веке до н. э. появились новые вызовы оптимизму пифагорейцев.
- Первый из них — три классические задачи древности: удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Греки строго придерживались требования: все геометрические построения должны выполняться с помощью циркуля и линейки, то есть с помощью совершенных линий — прямых и окружностей. Однако для перечисленных задач найти решение каноническими методами не удавалось. Алгебраически это означало, что не всякое число можно получить с помощью 4 арифметических операций и извлечения квадратного корня.



- Квадратурой круга безуспешно занимался выдающийся геометр-пифагореец, автор доевклидовых «Начал», первого свода геометрических знаний, Гиппократ Хиосский.



- Первые две задачи сводятся к кубическим уравнениям. Архимед позже дал общее решение кубических уравнений с помощью конических сечений. Однако многие комментаторы продолжали считать подобные методы неприемлемыми. Гиппий из Элиды (V век до н. э.) показал, что для трисекции угла полезна квадратриса (первая трансцендентная кривая в истории математики); она же, кстати, решает и задачу квadratury круга (Динострат, IV век до н. э.).

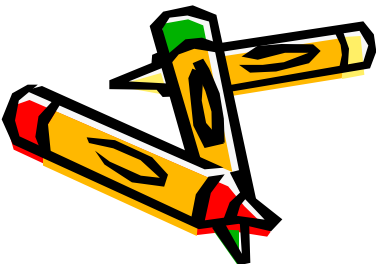


Зенон Элейский

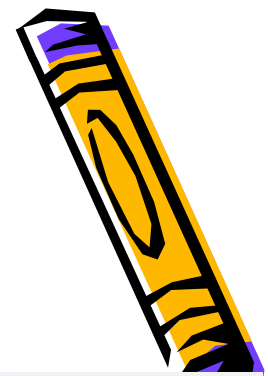
- Второй удар по пифагореизму нанёс Зенон Элейский, предложив ещё одну тему для многовековых размышлений математиков. Он высказал более 40 парадоксов (апорий), из которых наиболее знамениты четыре. Вопреки многократным попыткам их опровергнуть и даже осмеять, они, тем не менее, до сих пор служат предметом серьёзного анализа. Здесь затронуты самые деликатные вопросы оснований математики — конечность и бесконечность, непрерывность и дискретность. Математика тогда считалась средством познания реальности, и суть споров можно было выразить как неадекватность непрерывной, бесконечно делимой математической модели физически дискретной материи [3].



- В конце V века до н. э. жил ещё один выдающийся мыслитель — Демокрит. Он знаменит не только созданием концепции атомов. Архимед писал, что Демокрит нашёл объём пирамиды и конуса, но доказательств своих формул не дал. Вероятно, Архимед имел в виду доказательство методом исчерпывания, которого тогда ещё не существовало



] IV век до н. э. — Платон, Евдокс



- Уже к началу IV века до н. э. греческая математика далеко опередила всех своих учителей, и её бурное развитие продолжалось. В 389 году до н. э. Платон основывает в Афинах свою школу — знаменитую Академию. Математиков, присоединившихся к Академии, можно разделить на две группы: на тех, кто получил своё математическое образование вне Академии, и на учеников Академии. К числу первых принадлежали Теэтет Афинский, Архит Тарентский и позднее Евдокс Книдский; к числу вторых — Амикл из Сиракуз, братья Менехм и Динострат.



- Сам Платон конкретных математических исследований не вёл, но опубликовал глубокие рассуждения по философии и методологии математики. А ученик Платона, Аристотель, оставил бесценные для нас записки по истории



- Евдокс Книдский первый создал геоцентрическую модель движения светил с 27 сферами. Позже эта конструкция была развита Аполлонием, Гиппархом и Птолемеем, которые увеличили число сфер до 34 и ввели эпициклы. Ему же принадлежат два выдающихся открытия: общая теория отношений (геометрическая модель вещественных чисел) и античный анализ — метод исчерпывания.



Евклид, Архимед, Аполлоний



- После завоеваний Александра Македонского научным центром древнего мира становится Александрия Египетская. Птолемей I основал в ней Мусейон (Дом Муз) и пригласил туда виднейших учёных. Это была первая в грекоязычном мире государственная академия, с богатейшей библиотекой (ядром которой послужила библиотека Аристотеля), которая к I веку до н. э. насчитывала 70000 томов.



- Фундамент математики, описанный Евклидом, расширил другой великий учёный — Архимед, один из немногих математиков античности, которые одинаково охотно занимались и теоретической, и прикладной наукой. Он, в частности, развил метод исчерпывания, сумел вычислить площади и объёмы многочисленных фигур и тел, ранее не поддававшихся усилиям математиков.



- Учёные Александрии объединили вычислительную мощь и древние знания вавилонских и египетских математиков с научными моделями эллинов. Значительно продвинулись плоская и сферическая тригонометрия, статика и гидростатика, оптика, музыка и др. Эратосфен уточнил длину меридиана и изобрёл своё знаменитое «решето». В истории математики известны три великих геометра древности, и прежде всего — Евклида с его «Началами».
- Тринадцать книг *Начал* — основа античной математики, итог её 300-летнего развития и база для дальнейших исследований. Влияние и авторитет этой книги были огромны в течение двух тысяч лет.





- Последним из тройки великих был Аполлоний Пергский, автор глубокого исследования конических сечений.



- Греческая математика поражает прежде всего красотой и богатством содержания. Многие учёные Нового времени отмечали, что мотивы своих открытий почерпнули у древних. Зачатки анализа заметны у Архимеда, корни алгебры — у Диофанта, аналитическая геометрия — у Аполлония и т. д. Но главное даже не в этом. Два достижения греческой математики далеко пережили своих творцов.
- Первое — греки построили математику как целостную науку с собственной методологией, основанной на чётко сформулированных законах логики.
- Второе — они провозгласили, что законы природы постижимы для человеческого разума, и математические модели — ключ к их познанию.
- В этих двух отношениях античная математика вполне современна



СТРАШНО ЗА ВНИМАНИЕ

