

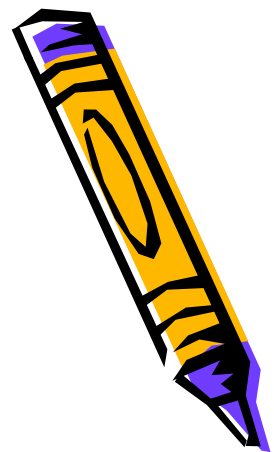
Матричний підхід до лінійної багатофакторної моделі



План

1. Лінійна багатофакторна економетрична модель і основні її припущення в матричній формі.
2. МНК в матричній формі.
3. Дисперсійно-коваріаційна матриця .
4. Прогнозування за економетричною моделлю.

1. Лінійна багатофакторна економетрична модель і основні її припущення в матричній формі



$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} \dots + \beta_m x_{mi} + u_i, \quad (1)$$

де y_i – i -е значення залежної змінної; x_{ji} – i -е значення j -ої незалежної змінної; $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ – невідомі детерміновані параметри; u_i – i -е значення випадкової змінної.



$$\begin{cases} y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{21} \dots + \beta_m x_{m1} + u_1; \\ y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{12} + \beta_2 x_{22} \dots + \beta_m x_{m2} + u_2; \\ \square \\ y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{1n} + \beta_2 x_{2n} \dots + \beta_m x_{mn} + u_n. \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}, \quad (3)$$

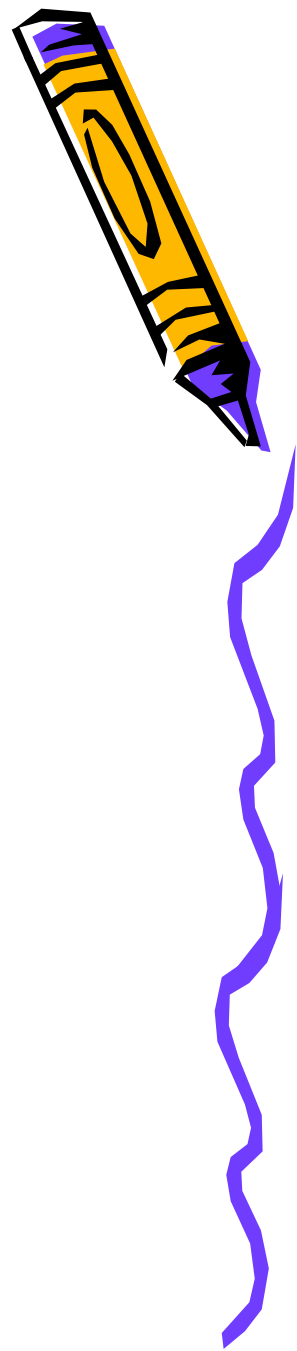
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \square \\ y_n \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \square & x_{m1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \square & x_{m2} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \square & x_{mn} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \square \\ \beta_m \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \square \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Припущення 1.

$$M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \square \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(u_1) \\ M(u_2) \\ \square \\ M(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \square \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Припущення 2.

$$M(\mathbf{UU}') = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \square \\ u_n \end{bmatrix} \cdot [u_1 \quad u_2 \quad \square \quad u_n],$$



$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{UU}') &= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \square & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & \sigma^2 \end{bmatrix} = \\
 &= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square & 0 \\ 0 & 1 & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 E
 \end{aligned}$$

Дисперсійно–коваріаційна матриця випадкових величин u_i . По діагоналі її стоять дисперсії, поза діагоналлю – коваріації.

Припущення 4. Вектор випадкових величин u_i має нормальний закон розподілу

Припущення 5. Матриця \mathbf{X} утворюється з фіксованих елементів, тобто не випадкова.

Припущення 6. Між факторами x_i, x_j відсутня мультиколінеарність, тобто фактори незалежні між собою. Це означає, що стовпці матриці \mathbf{X} лінійно незалежні, тобто не знайдеться таких чисел $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$, серед яких не всі дорівнюють нулю, щоб виразити один стовпець як лінійну комбінацію інших:

$$\gamma_0 \cdot 1 + \gamma_1 x_{1i} + \dots + \gamma_m x_{mi} = 0 \text{ або } \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

2. МНК в матричній формі

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \square \\ \hat{y}_n \end{bmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \square \\ \hat{\beta}_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \square \\ e_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \square \\ y_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \square & x_{m1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \square & x_{m2} \\ \square & \square & \square & \square & \square \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \square & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned}
 e(\hat{\beta}) &= \sum_{i=1}^n e_i^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \\
 &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} \rightarrow \min \\
 &[(\mathbf{X}\hat{\beta})' = \hat{\beta}'\mathbf{X}'; \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\beta}]. \\
 \frac{\partial e(\hat{\beta})}{\partial \hat{\beta}} &= -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

(Символ штрих (') означає операцію транспонування)

3. Дисперсійно-коваріаційна матриця

$$M[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \cdot (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'] =$$

$$= \begin{bmatrix} M(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 & M(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) & \square & M(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_m - \beta_m) \\ M(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_0 - \beta_0) & M(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & \square & M(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_m - \beta_m) \\ \square & \square & \square & \square \\ M(\hat{\beta}_m - \beta_m)(\hat{\beta}_0 - \beta_0) & M(\hat{\beta}_m - \beta_m)(\hat{\beta}_1 - \beta_1) & \square & M(\hat{\beta}_m - \beta_m)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\beta}_0}^2 & \sigma_{\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1} & \square & \sigma_{\hat{\beta}_0\hat{\beta}_m} \\ \sigma_{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0} & \sigma_{\hat{\beta}_1}^2 & \square & \sigma_{\hat{\beta}_1\hat{\beta}_m} \\ \square & \square & \square & \square \\ \sigma_{\hat{\beta}_m\hat{\beta}_0} & \sigma_{\hat{\beta}_m\hat{\beta}_1} & \square & \sigma_{\hat{\beta}_m}^2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}_u^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

де $\hat{\sigma}_u^2$ – оцінена дисперсія випадкової величини:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - m - 1}$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{n - m - 1} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n - m - 1}.$$

4. Прогнозування за економетричною моделлю

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$

H_1 : не всі β_j ($j = \overline{0, m}$) дорівнюють нулю.

F -відношення з m та $n - m - 1$
ступенями вільності:

$$F = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m}}{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}} = \frac{(n - m - 1) \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2},$$

де m – кількість факторів, що ввійшли в модель, n – кількість спостережень у вибірці.

$$F = \frac{(n - m - 1)R^2}{m(1 - R^2)}$$

$$F_{кр}(m; n - m - 1; \gamma)$$

Якщо $F > F_{кр}$, то ми відкидаємо H_0 з ризиком помилитися не більше ніж в $\gamma\%$ випадків, і приймаємо, що побудоване рівняння економетричної моделі адекватне реальній дійсності.

Якщо $F \leq F_{кр}$ – H_0 приймаємо і вважаємо, що побудована модель неадекватна. Тоді необхідно, можливо, будувати нелінійну модель або ввести додаткові фактори.

Точковий прогноз:

$$\hat{y}_{n+k} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1,n+k} + \dots + \hat{\beta}_m x_{m,n+k}$$

або в матричній формі:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{n+k} = \mathbf{X}_{n+k} \hat{\boldsymbol{\beta}},$$

де \mathbf{X}_{n+k} – матриця очікуваних пояснювальних змінних.

Інтервал, у який з певною заданою імовірністю $p = 1 - \gamma$ потрапляє дійсне значення залежної змінної:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{n+k} \pm t_{\gamma} \hat{\sigma}_u \sqrt{1 + \mathbf{X}'_{n+k} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+k}},$$

де \mathbf{X}'_{n+k} вектор значень з m факторів у період $n + k$.

$$\hat{\mathbf{Y}}_{n+k} \pm t_{\gamma} \hat{\sigma}_u \sqrt{\mathbf{X}'_{n+k} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}_{n+k}}.$$