



# Матрицы и определители

# МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

*Матрицей размера  $m \times n$  называется  
прямоугольная таблица чисел,  
содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов.*

Числа, составляющие матрицу, называются  
элементами матрицы.

## Обозначение:

$A_{m \times n}$  - матрица размерности  $m \times n$

$a_{ij}$  - элемент матрицы  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца,

где

$$i=1,2 \dots m$$

$$j=1,2 \dots n$$

$$A_{m \times n} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*матрица размерности  $m \times n$*

Две матрицы называются равными, если у них одинаковая размерность и совпадают строки и столбцы.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется квадратной.

# *Пример:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- квадратная матрица размерности 3x3

Элементы матрицы  $a_{ij}$ , у которых номер столбца совпадает с номером строки, называются диагональными.

Если в квадратной матрице все диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, то она называется единичной.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

*единичная матрица*



*Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны 0.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*Нулевая матрица*

*Матрица, состоящая из одной строки,  
называется матрицей-строкой или  
вектором-строкой.*

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$$

***МАТРИЦА-СТРОКА***

Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом или вектором-столбцом.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \square \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

*матрица-столбец*

С помощью матриц удобно описывать различного рода зависимости.

Например:

Распределение ресурсов по отраслям экономики:

<i>Ресурсы</i>	<i>Промышленность</i>	<i>с/хозяйство</i>
<i>Эл. энергия</i>	8	7.2
<i>Труд. ресурсы</i>	5	3
<i>Водные ресурсы</i>	4.5	5.5

Эту зависимость можно представить в виде матрицы:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 8 & 7.2 \\ 5 & 3 \\ 4.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Где элемент  $a_{ij}$  показывает сколько  $i$  - го ресурса потребляет  $j$  - отрасль.

Например,  $a_{32}$  показывает, сколько воды потребляет сельское хозяйство.

# ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

## 1. Умножение матрицы на число

*Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число.*

Полученные произведения образуют итоговую матрицу.

Пусть дана матрица  $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Умножаем ее на число  $\lambda$ :  $\lambda \cdot A = B$

Где каждый элемент матрицы  $B$ :

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Где:  $i = 1, 2, \dots, m$

$j = 1, 2, \dots, n$

Например:

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}}}$$



## 2. Сложение матриц

*Складываются матрицы одинаковой размерности. Получается матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов исходных матриц.*

Пусть даны матрицы  $A = (a_{ij})$

$$B = (b_{ij})$$

Складываем их:

$$A + B = C$$

Где каждый элемент матрицы  $C$ :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Аналогично проводится вычитание матриц.

# Пример.

*Найти сумму и разность матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

# Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

---

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

---

# 3. Умножение матриц

Умножение матриц возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Тогда каждый элемент полученной матрицы равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки первой матрицы на соответствующие элементы  $j$ -го столбца второй.

Пусть даны матрицы

$$A = (a_{ij})_{m \times k}$$

Умножаем их:

$$B = (b_{ij})_{k \times n}$$

$$A \cdot B = C$$

$m \times k \quad k \times n \quad m \times n$

Где каждый элемент матрицы  $C$ :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

# Пример.

*Найти произведение матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

# Решение:

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

---



Теперь перемножим матрицы в обратном порядке:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц в общем случае некоммукативно:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Перечисленные операции над матрицами  
обладают следующими свойствами:



$$A+B=B+A$$



$$(A+B)+C=A+(B+C)$$



3

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$



4

$$A(B+C) = AB + AC$$



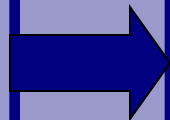
5

$$A(BC) = (AB)C$$

# 4. Транспонирование матриц

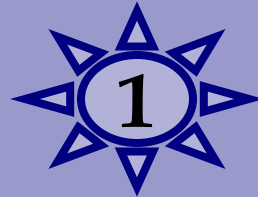
Матрица  $A^T$  называется транспонированной к матрице  $A$ , если в ней поменяли местами строки и столбцы.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



$$A^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ТРАСПОНИРОВАНИЯ:



$$(A^T)^T = A$$



$$(A+B)^T = A^T + B^T$$



$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$



$$(AB)^T = B^T A^T$$

# Пример.

*Транспонировать матрицу:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

# Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

---