

Метод итерации

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\
 x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n, \\
 \dots \\
 x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{1n}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{2n}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}} x_{n-1}.
 \end{array} \right.$$

Обозначим:

$$\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_{ii} \quad \text{---} \quad \frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}.$$

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \beta_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \beta_2$$

• • • • • • • • • • • • • • • •
•

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + \beta_n$$

Обозначим:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

и

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$X = \beta + \alpha X$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

нулевое приближение

$$X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)}$$

Итерационная последовательность

$$X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$$

Пример 1.

Решить систему методом итерации

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 - 1 \\ x_2 = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 \\ x_3 = x_1 - x_2 - 3 \end{cases}$$

$x^{(0)}(0;0;0)$ - нулевое приближение

$$x_1^{(1)} = 3 * 0 - 0 - 0 - 1$$

$$x_2^{(1)} = 3 * 0 - 3 * 0 + 0 - 2$$

$$x_3^{(1)} = 0 - 0 - 3$$

$x^{(1)}(-1;-2;-3)$ - первое приближение

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3 * (-1) - (-2) - (-3) - 1 \\ x_2^{(2)} = 3 * (-1) - 3 * (-2) + (-3) - 2 \\ x_3^{(2)} = -1 - (-2) - 3 \end{cases}$$

$x^{(2)} (1; -2; -2)$ - второе приближение

Условия сходимости итерационного процесса

ИЛИ

$$\sum_{J=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

$$\sum_{J=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

Пример 2: Проверить сходимость итерационного процесса для системы.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = 0 + 0,2 + 0,2 = 0,4 < 1$$

$$|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{32}| = 0,125 + 0 + 0,2 = 0,325 < 1$$

$$|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}| = 0,125 + 0,2 + 0 = 0,325 < 1$$



$$\| \alpha \|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

либо

$$\| \alpha \|_2 = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

либо

$$\| \alpha \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1$$

Матрица $A=[a_{ij}]$ определяется тремя **нормами**:

$$1) \quad \|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$2) \quad \|A\|_2 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$3) \quad \|A\|_3 = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$$

Оценка погрешности приближенного процесса метода итерации

$$\|X_i - X_i^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$$

Пример 3. Привести систему к нормальному

виду

$$\left\{ \begin{array}{l} 7,6 x_1 + 0,5 x_2 + 2,4 x_3 = 1,9 \\ 2,2 x_1 + 9,1 x_2 + 4,4 x_3 = 9,7 \\ -1,3 x_1 + 0,2 x_2 + 5,8 x_3 = -1,4 \end{array} \right.$$

Решение

$$\left\{ \begin{array}{l} (10-2,4) x_1 + 0,5 x_2 + 2,4 x_3 = 1,9 \\ 2,2 x_1 + (10-0,9) x_2 + 4,4 x_3 = 9,7 \\ -1,3 x_1 + 0,2 x_2 + (10-4,2) x_3 = -1,4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10 x_1 = 2,4 x_1 - 0,5 x_2 - 2,4 x_3 + 1,9 \\ 10 x_2 = -2,2 x_1 + 0,9 x_2 - 4,4 x_3 + 9,7 \\ 10 x_3 = 1,3 x_1 - 0,2 x_2 + 4,2 x_3 - 1,4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0,24 x_1 - 0,05 x_2 - 0,24 x_3 + 0,19 \\ x_2 = -0,22 x_1 + 0,09 x_2 - 0,44 x_3 + 0,97 \\ x_3 = 0,13 x_1 - 0,02 x_2 + 0,42 x_3 - 0,14 \end{array} \right.$$