Метод итерации

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\
x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \dfrac{a_{n-1,\,n}}{a_{nn}} x_{n-1}
\end{cases}
$$

Обозначим:

$$
\frac{b_i}{a_{ii}} = \beta_i; \qquad -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \alpha_{ij}
$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

Обозначим:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

и

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$X = \beta + \alpha X$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

нулевое приближение

$$\boxed{X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)}}$$

Итерационная последовательность

$$X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$$

Пример 1.

Решить систему методом итерации

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 - 1 \\ x_2 = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2 \\ x_3 = x_1 - x_2 - 3 \end{cases}$$

$x^{(0)}$ (0;0;0) - нулевое приближение

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3*0-0-0-1 \\ x_2^{(1)} = 3*0-3*0+0-2 \\ x_3^{(1)} = 0-0-3 \end{cases}$$

$x^{(1)}$ (-1;-2;-3) - первое приближение

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 3*(-1)-(-2)-(-3)-1 \\ x_2^{(2)} = 3*(-1)-3*(-2)+(-3)-2 \\ x_3^{(2)} = -1-(-2)-3 \end{cases}$$

$x^{(2)}$ (1;-2;-2) - второе приближение

Условия сходимости итерационного процесса

или

$$\sum_{J=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1$$

$$\sum_{J=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1$$

Пример 2: Проверить сходимость итерационного процесса для системы.

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2 \end{cases}$$

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = 0+0,2+0,2=0,4<1$$

$$|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{32}| = 0,125+0+0,2=0,325<1$$

$$|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}| = 0,125+0,2+0=0,325<1$$

$$\| \alpha \|_1 = \max_i \sum_{J=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1$$

либо

$$\| \alpha \|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1$$

либо

$$\| \alpha \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right|^2} < 1$$

Матрица A=[a$_{ij}$] определяется тремя **нормами**:

1) $\| A \|_1 = \max\limits_i \sum\limits_j |\alpha_{ij}|$

2) $\| A \|_2 = \max\limits_j \sum\limits_i |\alpha_{ij}|$

3) $\| A \|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i,j} |\alpha_{ij}|^2}$

Оценка погрешности приближенного процесса метода итерации

$$X_i - X_i^{(k)} \leqslant \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|} \cdot \|\beta\|$$

Пример 3. Привести систему к нормальному виду

$$\begin{cases} 7{,}6\ x_1 + 0{,}5\ x_2 + 2{,}4\ x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2\ x_1 + 9{,}1\ x_2 + 4{,}4\ x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3\ x_1 + 0{,}2\ x_2 + 5{,}8\ x_3 = -1{,}4 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} (10-2{,}4)\ x_1 + 0{,}5\ x_2 + 2{,}4\ x_3 = 1{,}9 \\ 2{,}2\ x_1 + (10-0{,}9)\ x_2 + 4{,}4\ x_3 = 9{,}7 \\ -1{,}3\ x_1 + 0{,}2\ x_2 + (10-4{,}2)\ x_3 = -1{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\ x_1 = 2{,}4\ x_1 - 0{,}5\ x_2 - 2{,}4\ x_3 + 1{,}9 \\ 10\ x_2 = -2{,}2\ x_1 + 0{,}9\ x_2 - 4{,}4\ x_3 + 9{,}7 \\ 10\ x_3 = 1{,}3\ x_1 - 0{,}2\ x_2 + 4{,}2\ x_3 - 1{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}24\ x_1 - 0{,}05\ x_2 - 0{,}24\ x_3 + 0{,}19 \\ x_2 = -0{,}22\ x_1 + 0{,}09\ x_2 - 0{,}44\ x_3 + 0{,}97 \\ x_3 = 0{,}13\ x_1 - 0{,}02\ x_2 + 0{,}42\ x_3 - 0{,}14 \end{cases}$$