

# МАТЕМАТИКА



**ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ**  
**естественных наук**  
при Саратовском государственном аграрном  
университете им. Н.И. Вавилова

## Метод интервалов. Общий метод интервалов.

## **ЛЕКЦИЯ № 7**

# **«Метод интервалов. Общий метод интервалов.»**

**Литература С.М. Никольский  
«Алгебра и начала  
анализа: Учебник для 10  
класса  
общеобразовательных  
учреждений» §2 п. 2.7 – 2.9.**

# *План*

## *лекции:*

- Рациональные неравенства
- Метод интервалов
- Общий метод интервалов

# Определе

ние

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно  $x$ , называют рациональным неравенством с неизвестным  $x$ .

$$(5x + 1)(3 - 2x) < 0$$

$$\frac{(2x - 3)^4(7 - x)^3}{(2x - 1)^2(3 - x)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} \leq \frac{2}{x - 5} - 3$$

$$\frac{4x - 6}{5 - x} > 2$$

$$(x^2 - 1)^2(3 - 2x)^3(4 - x) < 0$$

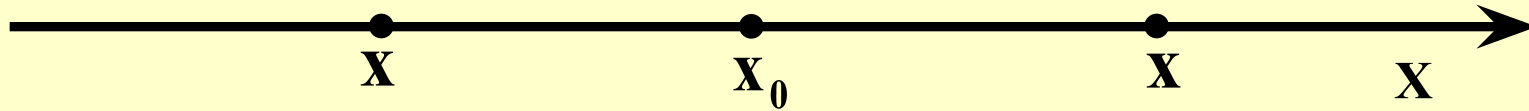
# Определе ние

Решением неравенства с неизвестным  
называют число, при подстановке  
которого в это неравенство вместо  
получается верное числовое  
неравенство.

Решить неравенство – значит найти все  
его решения или показать, что их нет.

$$x - x_0 < 0$$

$$x - x_0 > 0$$



Метод интервалов для решения  
неравенств вида  $A(x) > 0$  на следующем

$$A(x) < 0$$

утверждении.  
Точка  $x_0$  делит ось  $x$  на две части:

1) для любого  $x$ , находящегося справа от  
точки  $x - x_0$ , двучлен

положителен;  
2) для любого  $x$ , находящегося слева от  $x_0$

точки  $x - x_0$ , двучлен

отрицателен.

Пусть требуется решить

**неравенство**  
 $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) > 0$

Не нарушая общности,

**положим**  
 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) > 0$

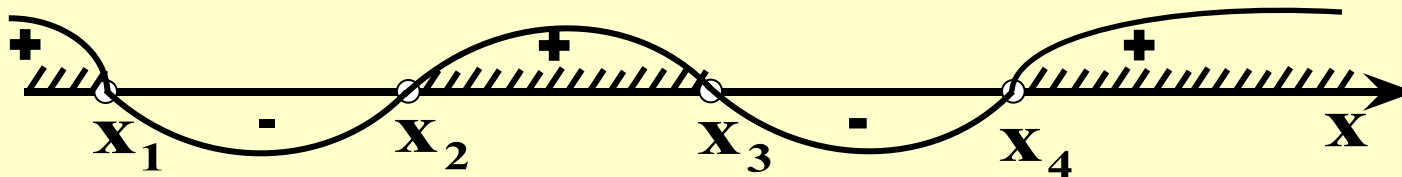
Тогда:

5). Аналогично рассуждая,

**получим, что**  $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) > 0$  для  $x$  интерва

$(x_4; \infty)$ ,  $(x_2; x_3)$ ,  $(-\infty; x_1)$  и **из**  $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) < 0$  **лов**

для  $x$  интерва  $(x_3; x_4)$ ,  $(x_1; x_2)$ .



## Замечани

Сами числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$  не являются решением неравенства  $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$

## Замечани

Множество решений неравенства вида  $A(x) \geq 0$ , и  $A(x) \leq 0$  где  $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ ,  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  есть объединение множества всех решений  $A(x) > 0$  и множества всех решений уравнения  $A(x) = 0$  и множества всех решений  $A(x) < 0$



# Метод интервалов для решения

## неравенств вида

$$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) \leq 0 \quad A(x) \geq 0$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

где

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_k$$

, то есть все различны.

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов:

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad \text{где } n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

2. Найти нули множителей, стоящих в левой части неравенства, и расположить их на оси  $x$  в соответствующем порядке.

## Метод интервалов для решения

**неравенств вида**

$$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

**где**  
 $n \geq 1, n \in \mathbb{N} \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$x_k$

**то есть все**

**различны.**

3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный.

**Пример**

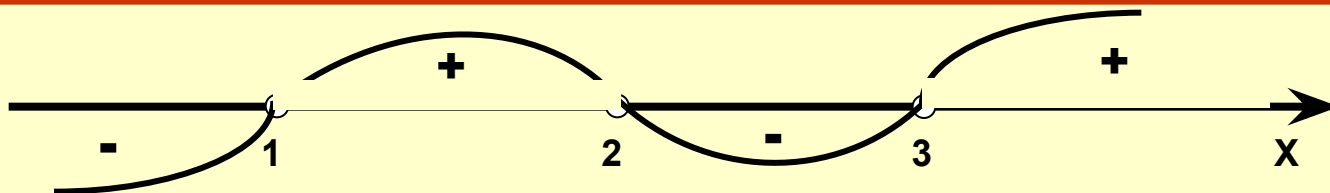
**р1**

**Решить неравенство**  $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

**Решение**

**ие**

**Нули множителей:**  $x = 1$   $x = 2$   $x = 3$



**Ответ:**

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

**Пример**

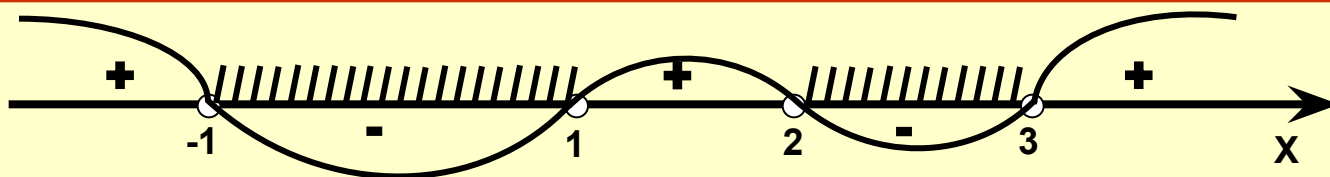
**р2**

$$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0$$

**Решение**

$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0$ ,  
умножив неравенство на  $-1$  и  
разложив квадратный трёхчлен на  
множители, получим неравенство  
равносильное данному

**Нули множителей:  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$**



**Ответ:**  $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$

**Пример 3**

**Решение**

**Решение**

**е**

$$(x^2 - 6x)(16 - x^2) \geq 0$$

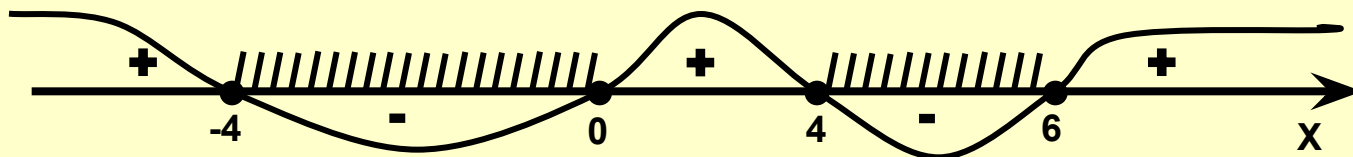
$$(x^2 - 6x)(16 - x^2) \geq 0$$

умножив неравенство на  $-1$  и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим

$$x(x-6)(x-4)(x+4) \leq 0$$

данному

**Нули множителей:  $x = 0$ ,  $x = 4$ ,  $x = 6$**



**Ответ:**  $[-4 \leq x \leq 0,$   
 $4 \leq x \leq 6.]$

**Пример 4**

**Решить**

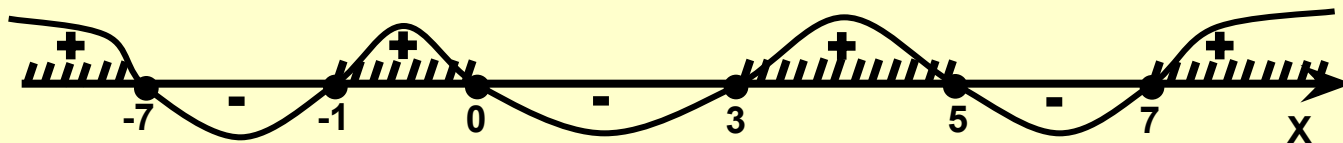
**неравенство**  $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x + 1)(49 - x^2)(5x - x^2) \geq 0$

**Решение**

$(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x + 1)(49 - x^2)(5x - x^2) \geq 0$ ,  
умножив неравенство 2 раза на  $-1$ ,  
разложив квадратные трёхчлены  
на множители  $x^2 + x + 1 > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ ,  
получим неравенство  
равносильное данному

$$(x + 3)(x - 1)(x - 7)(x + 7)x(x - 5) \geq 0$$

**Нули множителей:**  $x = -7, x = -1, x = 0, x = 3, x = 5, x = 7$



**Ответ:**

$$\begin{aligned} x &\leq -7, \\ -1 &\leq x \leq 0, \\ 3 &\leq x \leq 5, \\ x &\geq 7. \end{aligned}$$

# Общий метод интервалов для решения неравенств вида

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0,$$

где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

если не все  $x_i$  различны

1. Привести рациональное неравенство к одному из видов:

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0$$

где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

если не все  $x_i$  различны, то

произведение одинаковых двучленов

записывают в виде степени этого двучлена

$$A(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n} \quad k_m \geq 1; k_m \in \mathbb{N}$$

**Общий метод интервалов для решения неравенств вида  $A(x) > 0$ ,  $A(x) < 0$ ,  $A(x) \geq 0$ ,  $A(x) \leq 0$**

**где**  
 $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$   $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

**если не все различны**

**3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в нечётную степень, и сохранить знак, если соответствующий этому нулю**

**двучлен возведён в чётную степень**



**Пример 1**

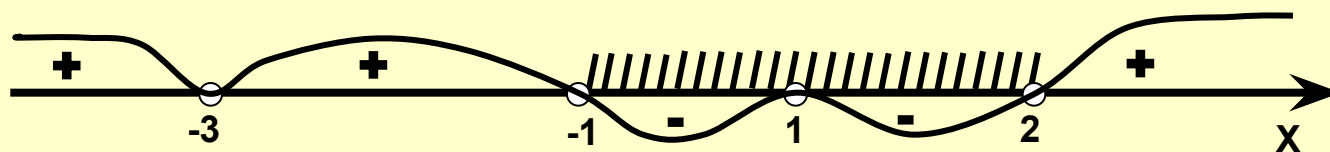
**Решение**

**Решение**

**Решение**

$$(x+3)^2(x+1)^3(x-1)^4(x-2) < 0$$

**Нули множителей:  $x = -3$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$**



**Ответ:**  $-1 < x < 1,$   
 $1 < x < 2.$

**Пример 1**

**решение**

**Решение**

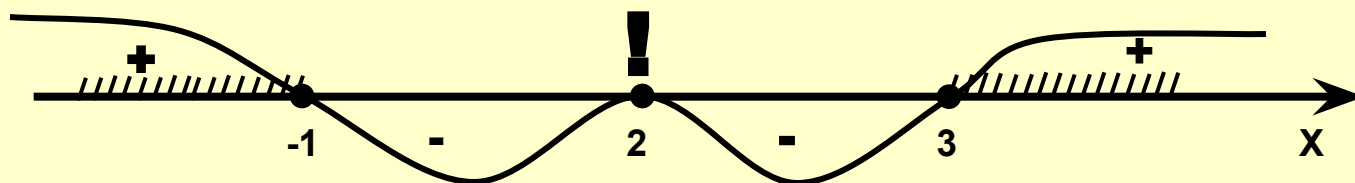
**ие**

**Решить неравенство  $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \leq 0$**

$$(x+1)(3-x)(x-2)^2 \leq 0,$$

$$(x+1)(x-3)(x-2)^2 \geq 0$$

**Нули множителей:  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$**



**Ответ:**  $\left[ \begin{array}{l} x \leq -1, \\ x = 2, \\ x \geq 3. \end{array} \right.$

# Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad A(x) \quad B(x)$$

и , где и

$$x - x_0$$

разлагаются в

**Замечани** разных двучленов

вида

Неравенство  $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$  равносильно неравенству  $A(x) \cdot B(x) > 0$

неравенство  $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$  равносильно неравенству  $A(x) \cdot B(x) < 0$

**Пример 1**

**р1**

**Решить**

**неравенство**  
$$\frac{x-3}{x-5} < 0$$

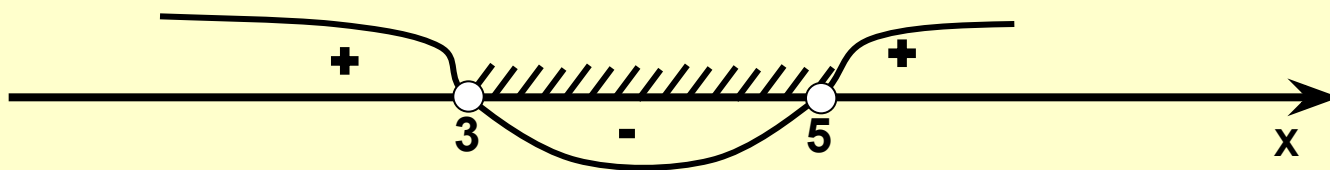
**Решение**

**ие**

$$\frac{x-3}{x-5} < 0,$$

$$(x-3)(x-5) < 0.$$

**Нули множителей**  $x=3$   $x=5$



**Ответ:**

$$3 < x < 5.$$

**Пример 2**

**Решить**

**неравенство**

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{-x^2 + 6x + 7} > 0$$

**Решение**

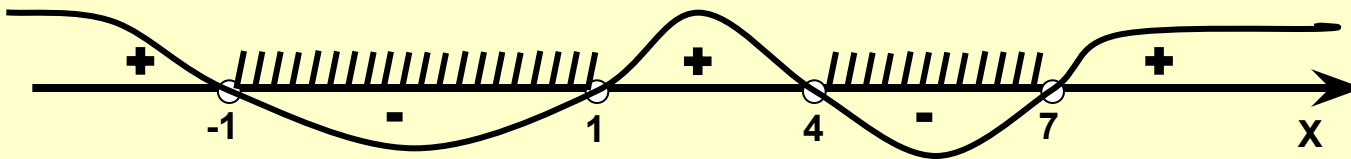
$$\frac{x^2 - 5x + 4}{-x^2 + 6x + 7} > 0,$$

умножив неравенство на  $-1$  и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство равносильное данному

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)} < 0.$$

$$(x-1)(x-4)(x+1)(x-7) < 0.$$

**Нули множителей:**  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $x = 7$



**Ответ:**

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 4 < x < 7. \end{cases}$$

**Пример 3**

**Решить неравенство**  
$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}$$

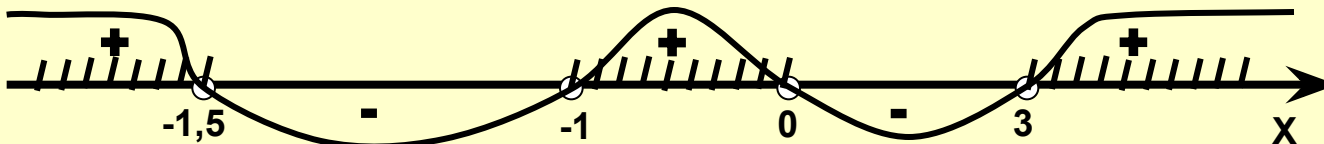
**Решение**

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x},$$
$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0,$$
$$\frac{x^2 - (2x+3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(2x+3)} > 0,$$
$$\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0.$$

**Нули множителей:  $x = -1,5$   $x = -1$   $x = 0$   $x = 3$**



**Ответ:**

$$\begin{cases} x < -1,5, \\ -1 < x < 0, \\ x > 3. \end{cases}$$

# Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad A(x) \quad B(x)$$

и , где и

разлагаются в

произведения двучленов, где в

числителе и знаменателе дроби

Не нарушая общности положим, что

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

неравенство  
имеет

$$\frac{(x - x_1)^{k_1} (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x - x_1)^{k_2} (x - x'_2) \cdot \dots \cdot (x - x'_m)} > 0$$

вид

тогда его можно

представить в виде

$$\frac{(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x - x_1)^{k_1+k_2} (x - x'_2) \cdot \dots \cdot (x - x'_m)} > 0$$

**Пример 1**

**Решить неравенство**

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$$

**Решение**

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)},$$

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{x(x-2) + 2(x+3) - 5x}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

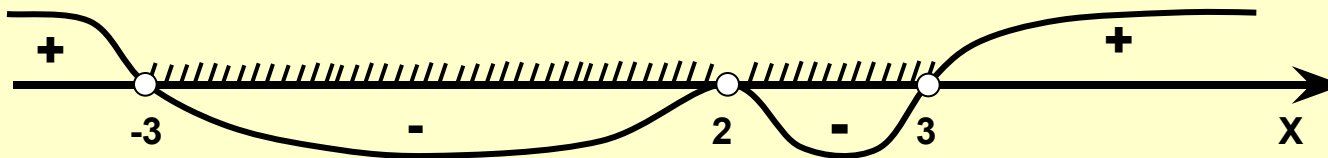
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{x-3}{(x+3)(x-2)^2} < 0,$$

$$(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0.$$

**Нули множителей:  $x = -3$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$**



**Ответ:**

$$\begin{cases} -3 < x < 2, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$



# Замечани

е.

Множество решений неравенств вида  $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$$

есть объединение множества

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

всех решений неравенств

и

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

множества всех решений уравнения

.

**Приме**

**решен**

**ие**

**(ЦТ 2000 г.) Найти число целых**

**решений неравенства** 
$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2},$$

$$\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0,$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0,$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0,$$

**Приме**

**Решен**

**це**

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых  
решений неравенства

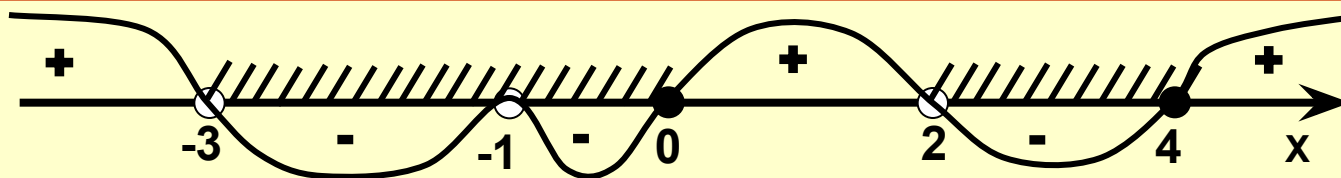
$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

**Нули числителя:**  $x = 4$

**Нули знаменателя:**  $x = -1$ ,  $x = 2$



**Итак**

$$\begin{cases} -3 < x < -1, \\ -1 < x \leq 0, \\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

**Целые**

$$x = -2; 0; 3; 4.$$

**решения:**

**Ответ: 4 целых**

**решения.**

# Домашнее

## задание

1) Материал лекций 1 – 7.

2) Галицкий М.Л. «Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов» §8

№ 8.54в), г); 8.72; 8.90; 8.96.

3) Сборник для подготовки к ЦТ. Тема № 6.