

**Автор: Елена Юрьевна Семёнова**

# **Метод координат в пространстве**

# Разложение вектора по трём некомпланарным векторам

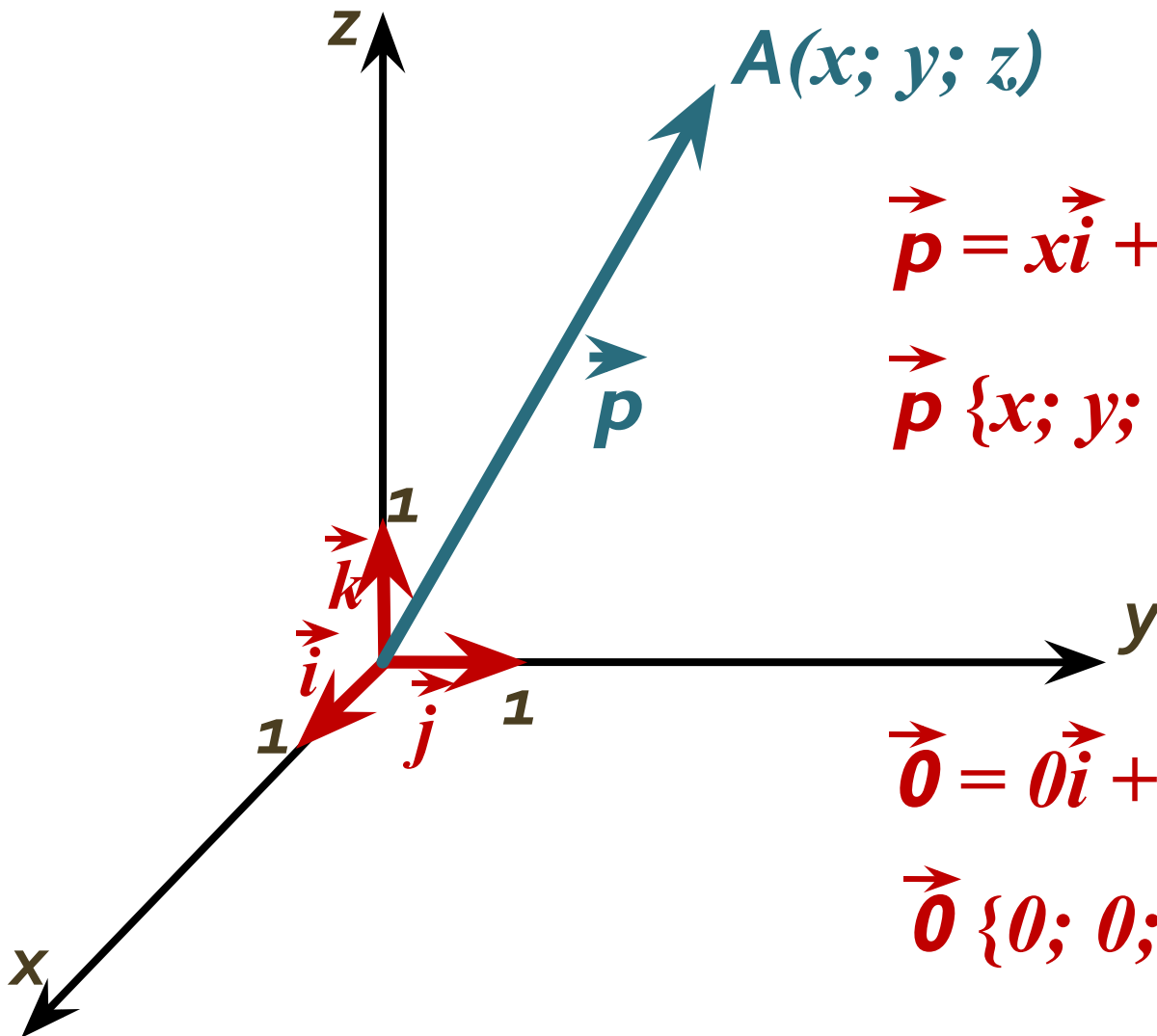
Любой вектор  $\vec{a}$  можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

причем коэффициенты разложения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  определяются единственным образом.

Коэффициенты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в разложении вектора  $\vec{a}$  по координатным векторам называются **координатами вектора  $\vec{a}$**  в данной системе координат.

# Координаты вектора



$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{p} \{x; y; z\}$$

$$\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{0} \{0; 0; 0\}$$

# Действия над векторами

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$$

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

$$\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

# Действия над векторами

$$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$$

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

$$k\vec{a} \{ kx_1; ky_1; kz_1 \}$$

# Примеры

Дано:  $\vec{a} \{3; -7; 2\}$   $\vec{b} \{-5; 4; 1\}$

Найти:  $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$   $\vec{q} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$

Решение:

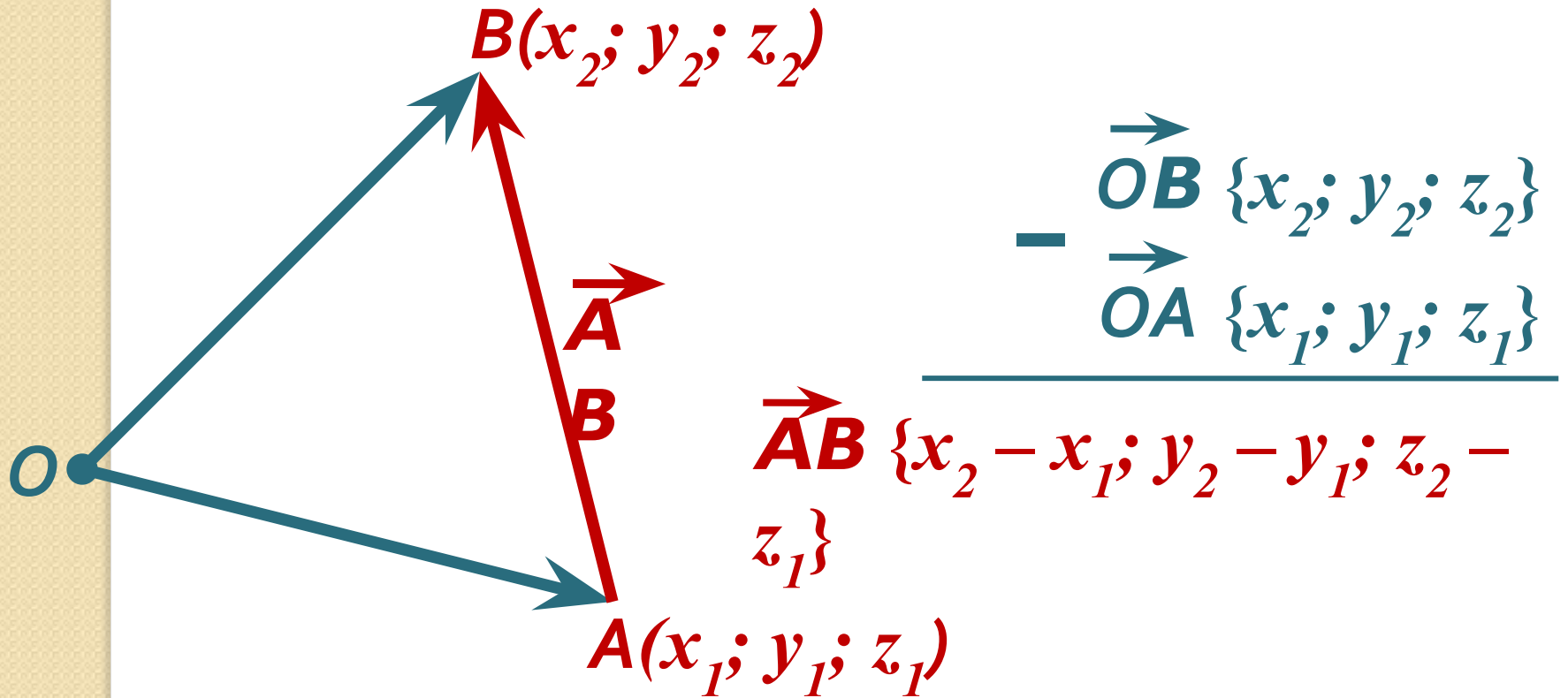
$$\begin{array}{r} + 3\vec{a} \{9; -21; 6\} \\ + -2\vec{b} \{10; -8; -2\} \\ \hline \vec{p} \{19; -29; 4\} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + -5\vec{a} \{-15; 35; -10\} \\ + 6\vec{b} \{-30; 24; 6\} \\ \hline \vec{q} \{-45; 59; -4\} \end{array}$$

Связь между координатами  
вектора и координатами его

начала и конца

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



# Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

## Примеры

$$A(5; 3; -4), B(-2; 4; 1)$$

$$\vec{AB} \{-2 - 5; 4 - 3;$$

$$\vec{AB} \{-7; 1;$$

$$5\}$$

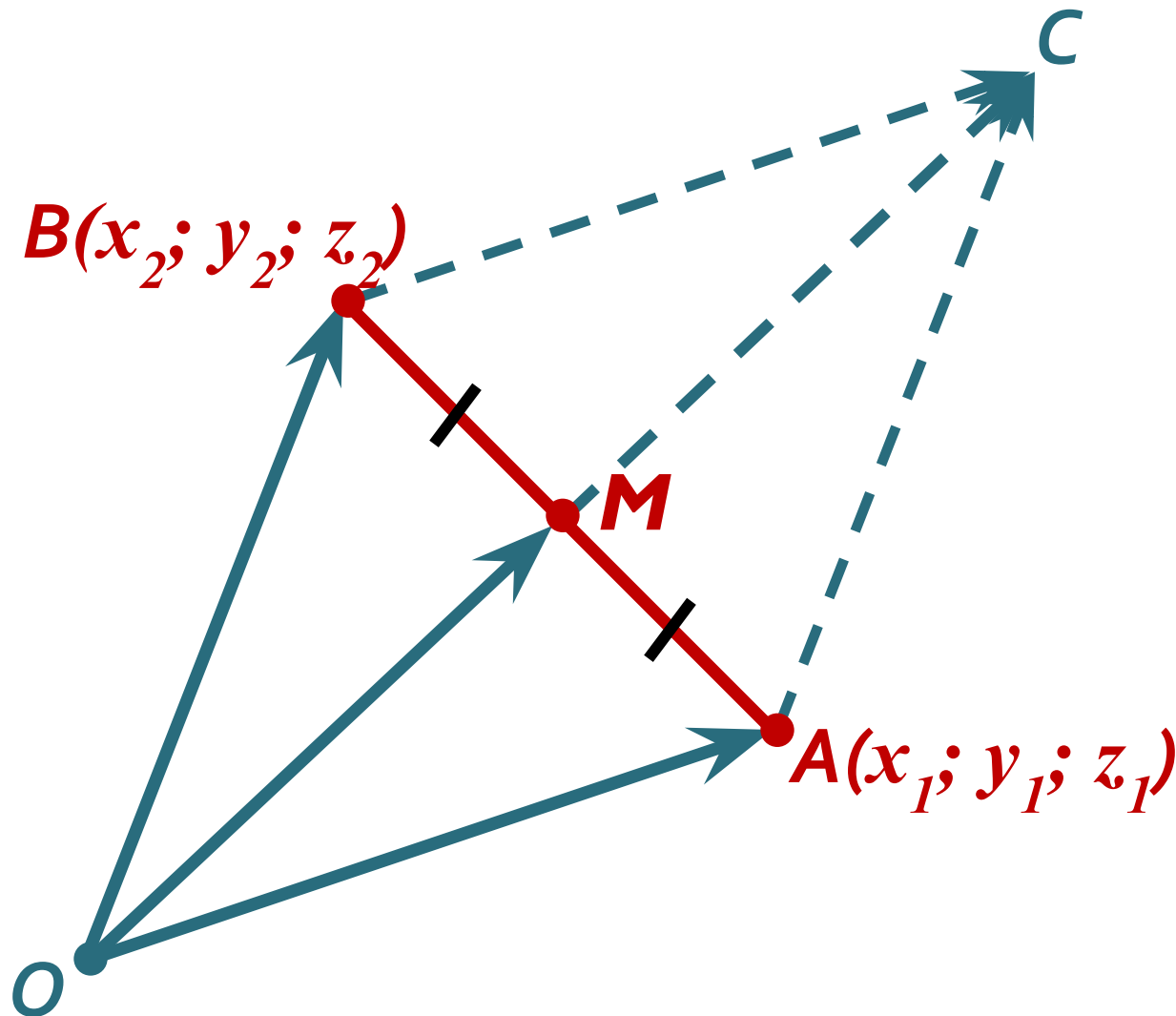
$$M(-3; 8; 2), N(0; -6; 5)$$

$$\vec{MN} \{0 - (-3); -6 - 8; 5 - 2\}$$

$$\vec{MN} \{3; -14; 3\}$$



# Координаты середины отрезка

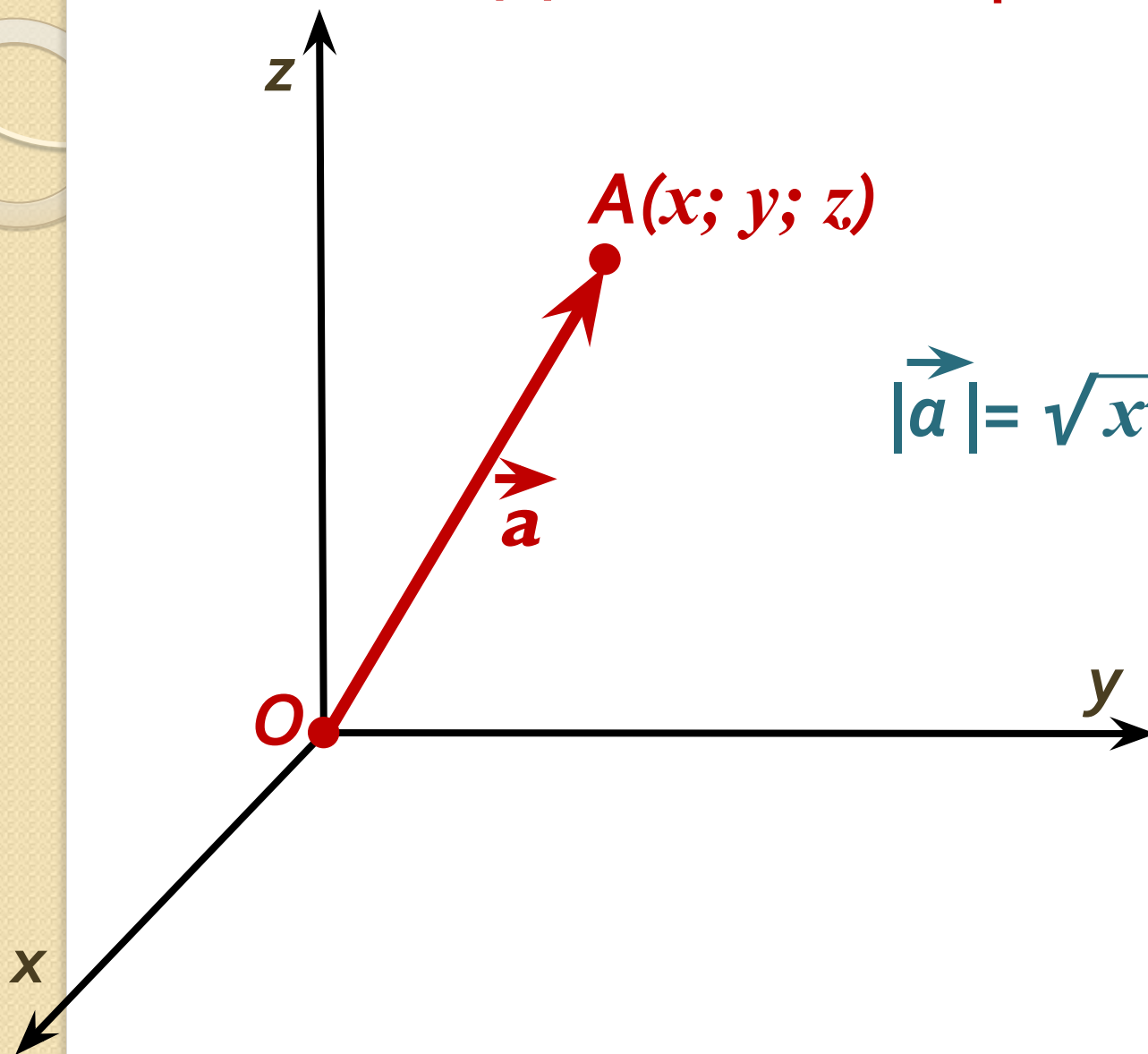


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

# Длина вектора

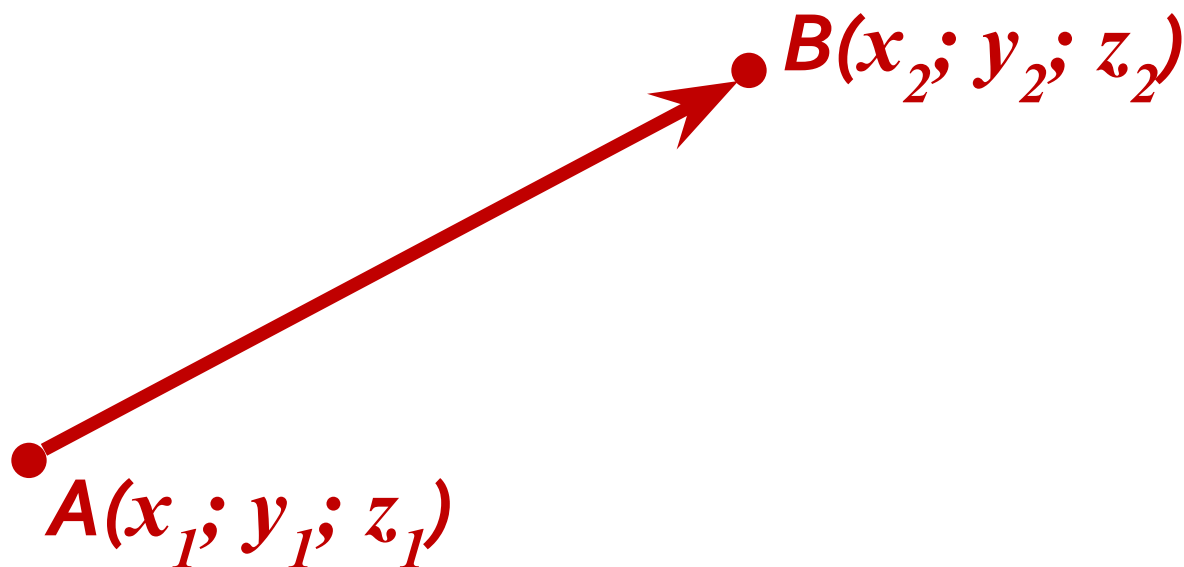


$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

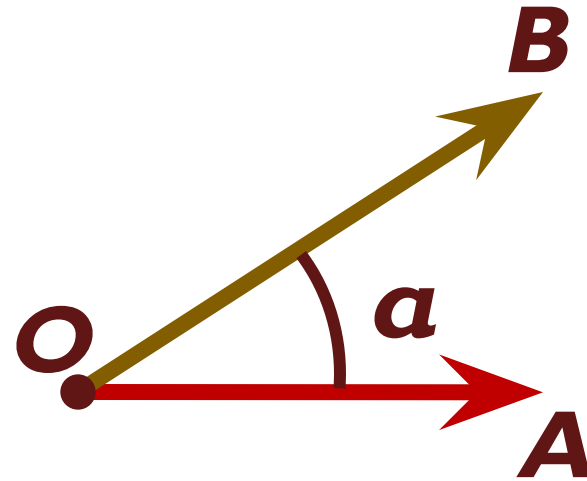
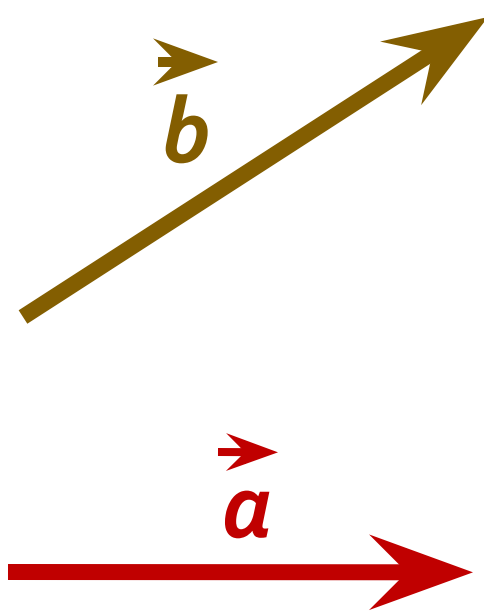
# Расстояние между двумя точками

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



# Угол между векторами



$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} &= \widehat{(\vec{OA}; \vec{OB})} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

# Скалярное произведение векторов

**Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

**Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

# Скалярное произведение векторов

**Скалярный квадрат вектора** (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

**Скалярное произведение векторов**

$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$  выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

# Скалярное произведение векторов

Косинус угла  $\alpha$  между ненулевыми векторами

$\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  вычисляется по формуле

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

# Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и любого числа  $k$  справедливы равенства:

1.  $\vec{a}^2 \geq 0$ , причем  $\vec{a}^2 > 0$  при  $\vec{a} \neq 0$ .
2.  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$  (переместительный закон).
3.  $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$  (распределительный закон).
4.  $k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b}$  (сочетательный закон).




# Угол между прямыми

Пусть  $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$  – направляющие векторы прямых  $a$  и  $b$ . Косинус угла  $\varphi$  вычисляется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



КОРМАТИ

БЕКТОРА