



Дорогие ребята!

Вам никак нельзя расслабляться, вас ждут впереди экзамены.

- Данная презентация поможет вам разобраться с новой темой.
- Успехов в работе!
  - Оксана Владимировна



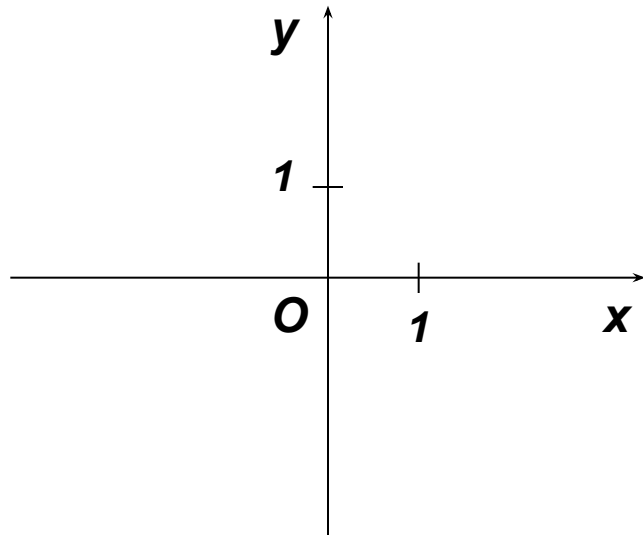
# Координатный метод

**Геометрия**  
**9класс**

# Содержание

- Координаты точки
- Расстояние между точками
- Уравнение окружности
- Координаты середины отрезка
- Уравнение прямой
- Заключение

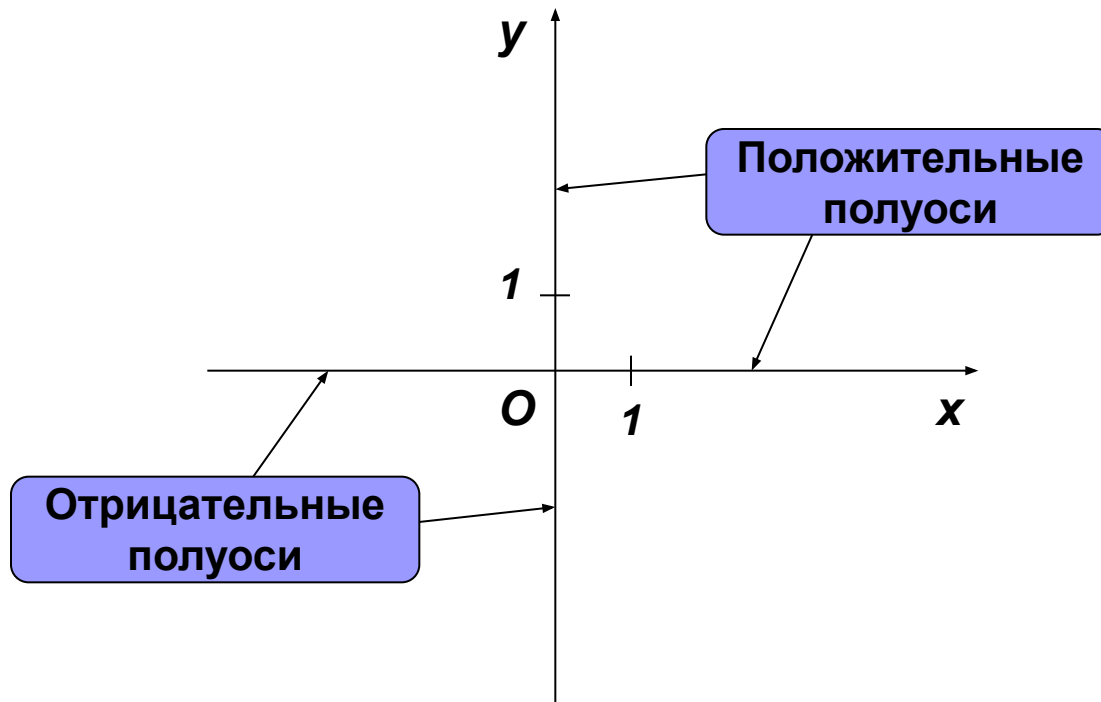
# Координаты точки



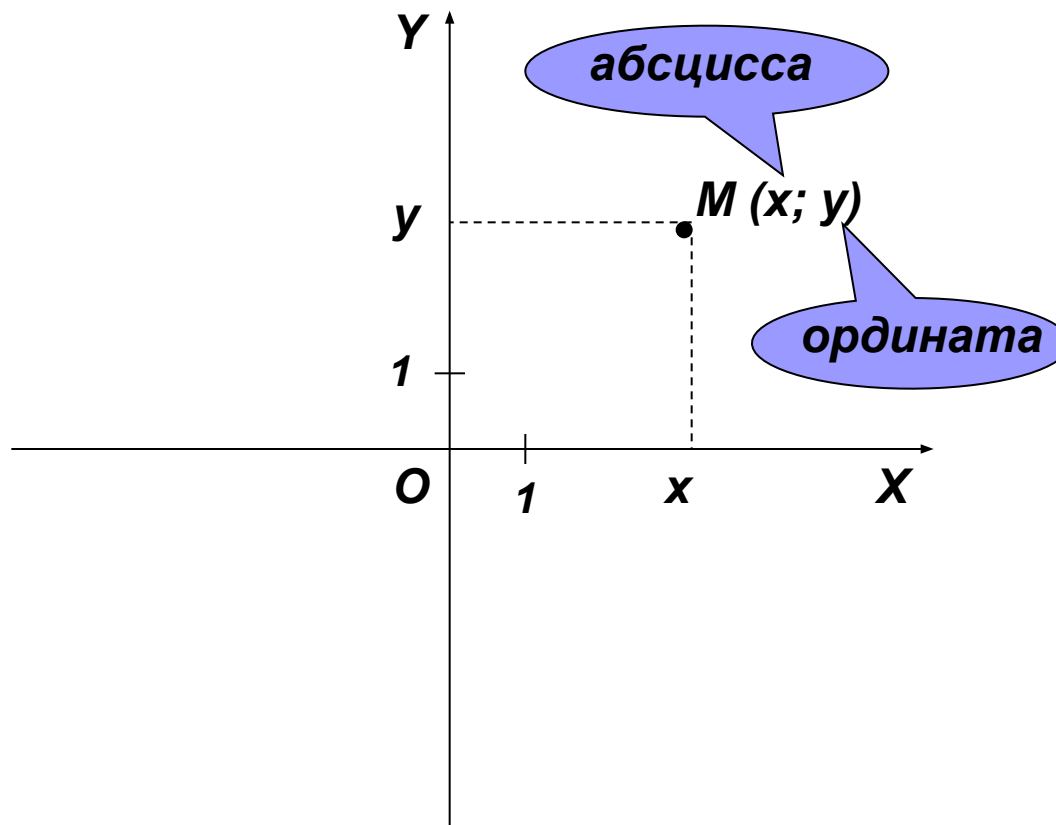
Говорят, что на плоскости задана **прямоугольная система координат**, если через некоторую точку **O** плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано направление (которое на рисунке отмечается стрелкой) и одна и та же единица измерения отрезков. Точка **O** называется **началом координат**, а прямые с выбранными на них направлениями – **осями координат**. Одна из осей координат называется **осью абсцисс**, а другая – **осью ординат**. Ось абсцисс обозначается **Ox**, а ось ординат – **Oy**.

## **Прямоугольная система координат:**

- ✓ **O** – начало;
- ✓ **Ox** – ось абсцисс;
- ✓ **Oy** – ось ординат;
- ✓ **Ox**  $\perp$  **Oy**
- ✓ на осях выбран масштаб (единичный отрезок)



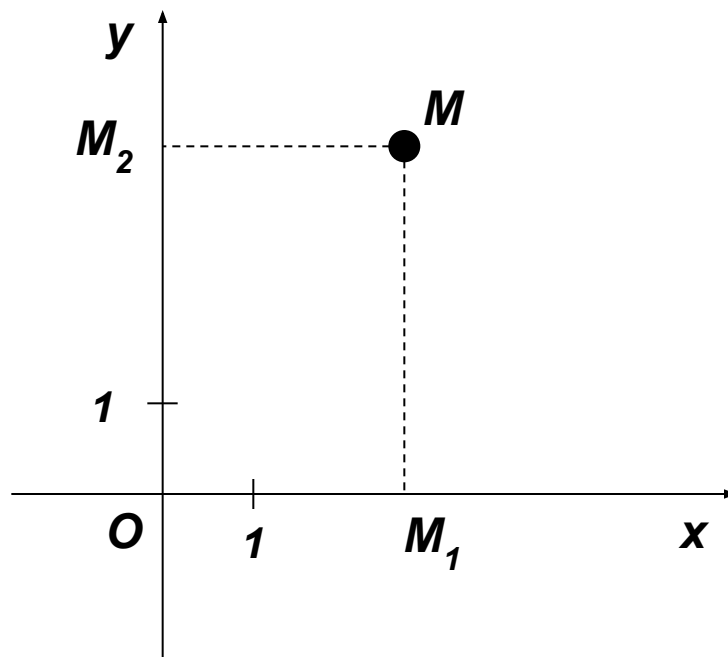
Для каждой из осей определены два противоположных луча с началом в точке  $O$ . Луч, направление которого совпадает с направлением координатной оси, называется **положительной полуосью**, а другой – **отрицательной полуосью**.



Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то в этой системе координат каждой точке  $M$  плоскости соответствует упорядоченная пара чисел  $x, y$ . Эта пара чисел называется **координатами точки  $M$** . Первая координата называется **абсциссой**, вторая – **ординатой**.

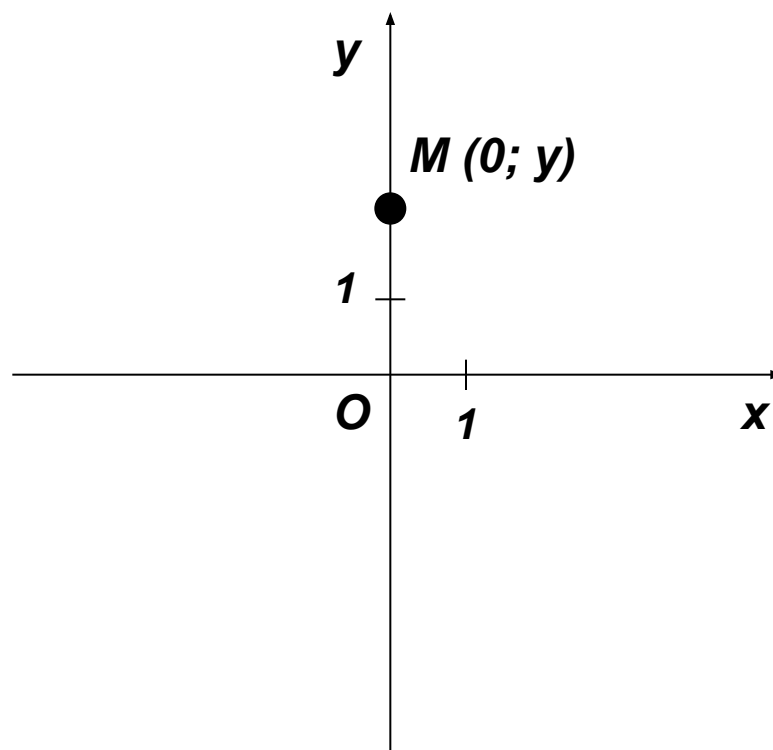
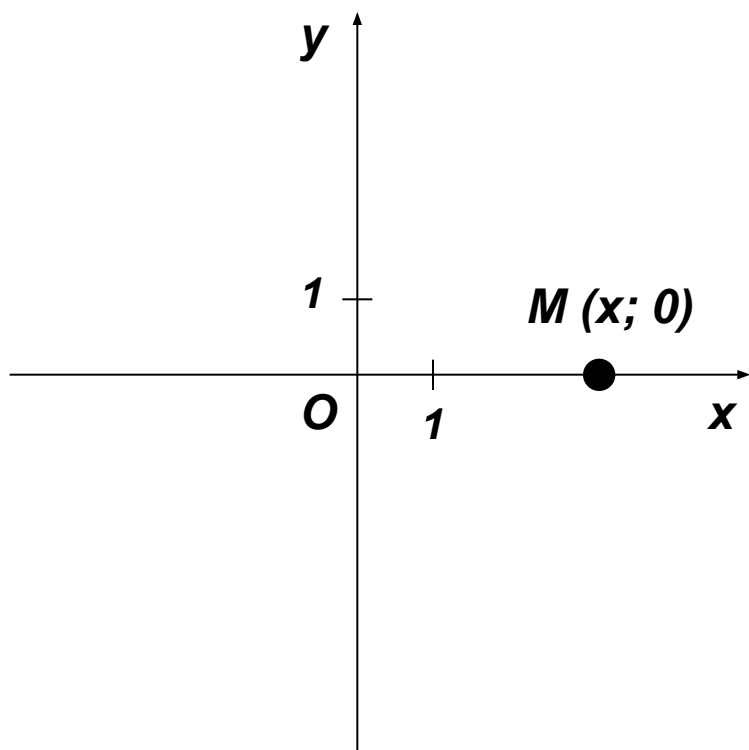
Пусть  $M_1$  и  $M_2$  – точки пересечения осей координат  $Ox$  и  $Oy$  с прямыми, проходящими перпендикулярно им через точку  $M$  соответственно. Тогда координаты  $x$ ,  $y$  точки  $M$  определяются следующим образом:

- ✓  $x = OM_1$ , если точка  $M_1$  принадлежит положительной полуоси;
- ✓  $x = 0$ , если  $M_1$  совпадает с точкой  $O$ ;
- ✓  $x = -OM_1$ , если точка  $M_1$  принадлежит отрицательной полуоси;
- ✓  $y = OM_2$ , если  $M_2$  принадлежит положительной полуоси;
- ✓  $y = 0$ , если  $M_2$  совпадает с точкой  $O$ ;
- ✓  $y = -OM_2$ , если точка  $M_2$  принадлежит отрицательной полуоси.



Координаты точки  $M$  записываются в скобках после обозначения точки:  $M(x; y)$  (на первом месте записывается абсцисса, на втором записывается ордината).

Если точка  $M$  лежит на оси  $Ox$ , то она имеет координаты  $(x; 0)$ , если  $M$  лежит на оси  $Oy$ , то ее координаты –  $(0; y)$ .





Рассмотрим примеры.

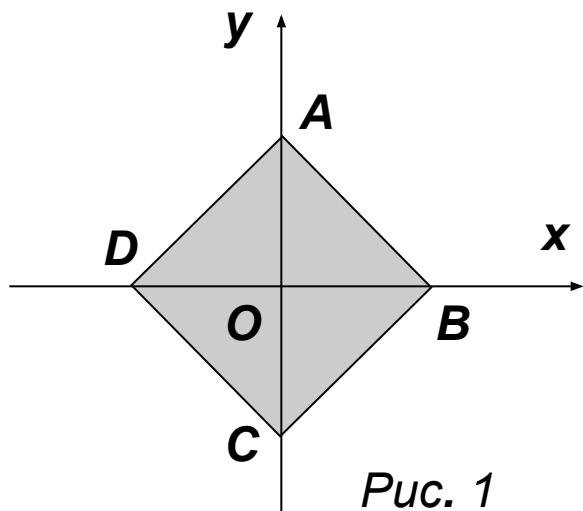


Рис. 1

Пусть  **$ABCD$**  – квадрат, длина стороны которого равна двум единицам длины, а прямоугольная система координат выбрана так, как показано на рисунке 1. Тогда в выбранной системе вершины квадрата имеют координаты:

$$A (0; \sqrt{2}); B (\sqrt{2}; 0); C (0; -\sqrt{2}); D (-\sqrt{2}; 0).$$

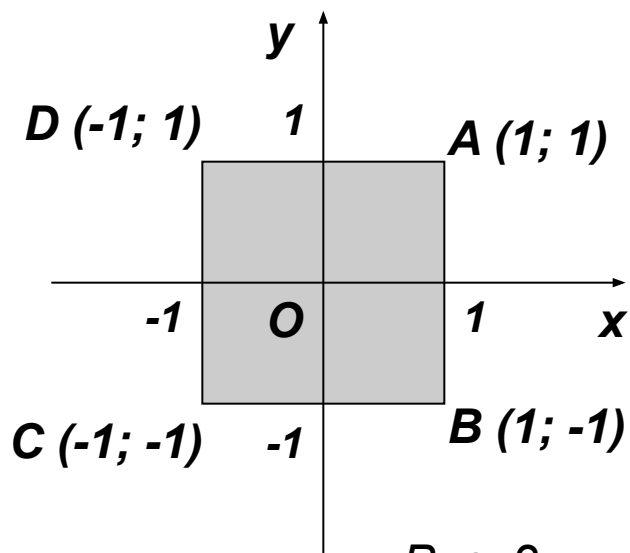


Рис. 2

Если система координат выбрана так, как показано на рисунке 2, то координаты вершин данного квадрата в этой системе имеют координаты:

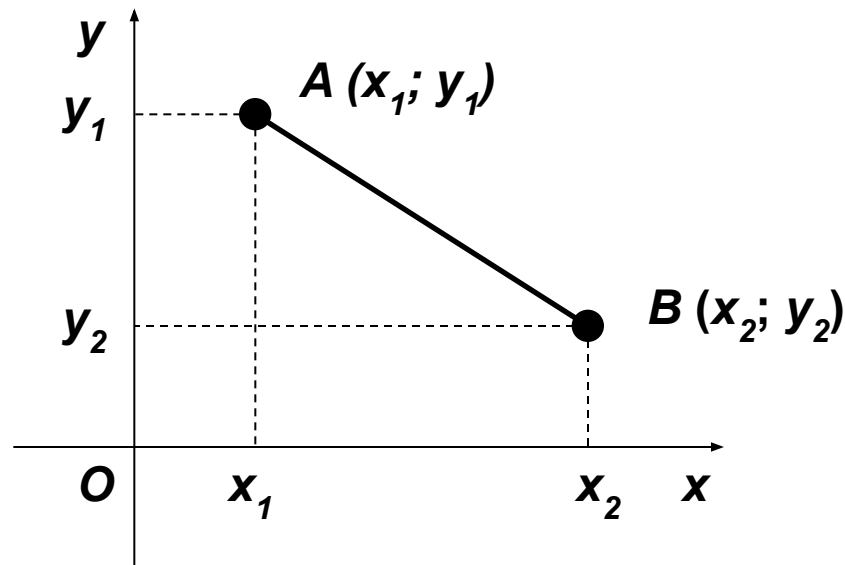
$$A (1; 1); B (1; -1); C (-1; -1); D (-1; 1).$$



# Расстояние между точками

Рассмотрим вопрос о нахождении расстояния между точками, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и известны координаты точек **A** и **B** в этой системе координат: **A** ( $x_1; y_1$ ) и **B** ( $x_2; y_2$ ). Тогда расстояние  $d(A, B) = AB$  между точками **A** и **B** можно найти по формуле

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

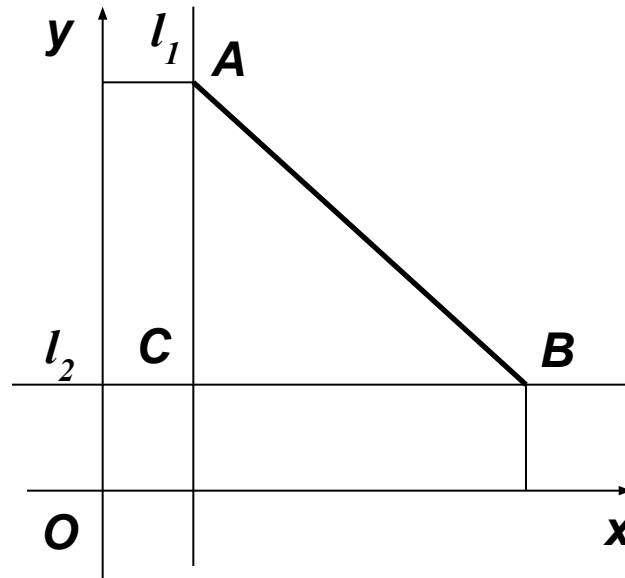


Докажем формулу  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  для случая, когда  $x_1 \neq x_2$  и  $y_1 \neq y_2$ , т. е. когда отрезок **AB** не параллелен ни одной из координатных осей. Пусть **C** – точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ , которые проходят через точки **A**, **B** соответственно и параллельны осям **Oy**, **Ox**. Рассмотрим прямоугольный треугольник **ABC**. Длины сторон **AC** и **BC** равны: **AC** =  $|x_2 - x_1|$ , **BC** =  $|y_2 - y_1|$ . Тогда по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

или

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Заметим, что формула  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  верна и для случаев:

- а)  $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$  (отрезок параллелен оси **Oy**, рисунок 1);
- б)  $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$  (отрезок параллелен оси **Ox**, рисунок 2);
- в)  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  (точки **A** и **B** совпадают).

В случае а)  $d(A, B) = AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$ .

В случае б)  $d(A, B) = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$ .

Если точки **A** и **B** совпадают, то  $d(A, B) = 0$ .

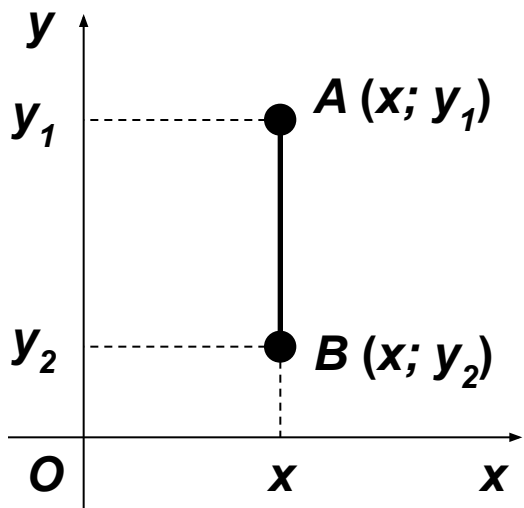


Рис. 1

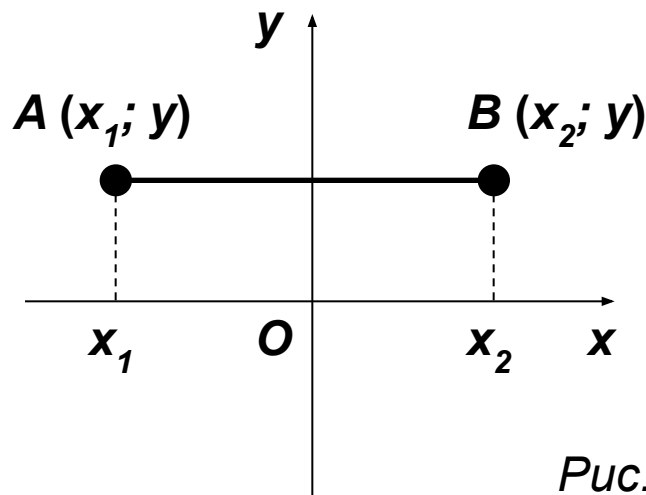


Рис. 2

Рассмотрим пример.

Пусть необходимо вычислить площадь квадрата ***ABCD***, две вершины которого имеют координаты ***A*** (8; 8) и ***B*** (5; 5). Площадь квадрата равна квадрату длины стороны.

Следовательно,  **$S_{ABCD} = AB^2$** . Для вычисления длины стороны ***AB*** воспользуемся формулой расстояния между двумя точками

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$AB = \sqrt{(8 - 5)^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь квадрата  **$S_{ABCD} = AB^2 = 18$  кв. ед.**

Ответ: 18 кв. ед.



# Уравнение окружности

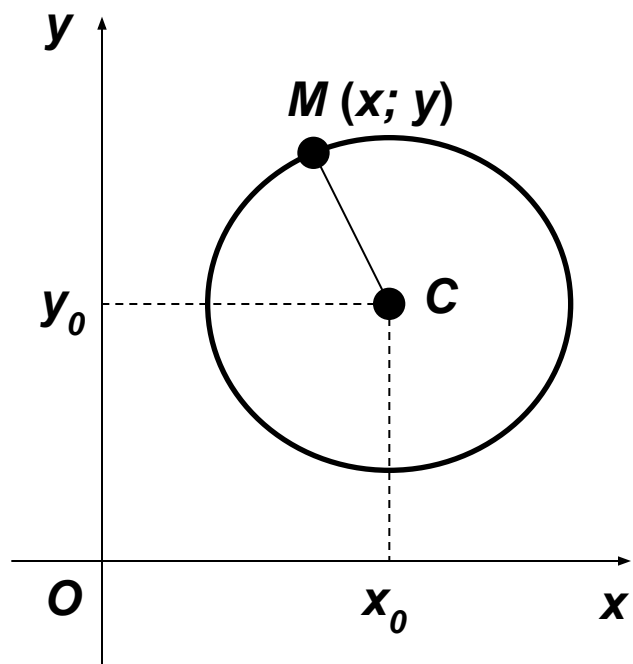
Рассмотрим вопрос об уравнении окружности.

Уравнение с двумя переменными называется **уравнением фигуры**, если ему удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной фигуре.

Составим уравнение окружности с центром в точке  $O(x_0; y_0)$  и радиусом  $R$ .

Пусть точка  $M(x; y)$  принадлежит окружности. Тогда в силу определения окружности  $CM = R$ . Следовательно, квадрат расстояния между точками  $C$  и  $M$  равен квадрату радиуса:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 .$$



Пусть точка  $M_1(x_1; y_1)$  не принадлежит окружности, тогда  $CM_1 \neq R$ , а значит,  $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \neq R^2$ , т. е. если точка не принадлежит окружности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .

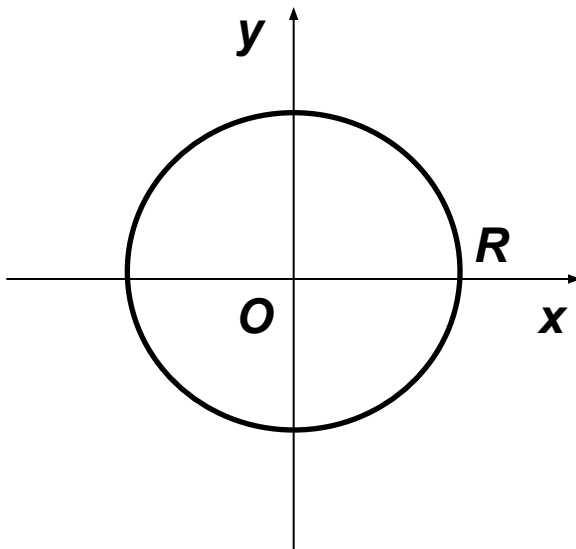
Таким образом, уравнение

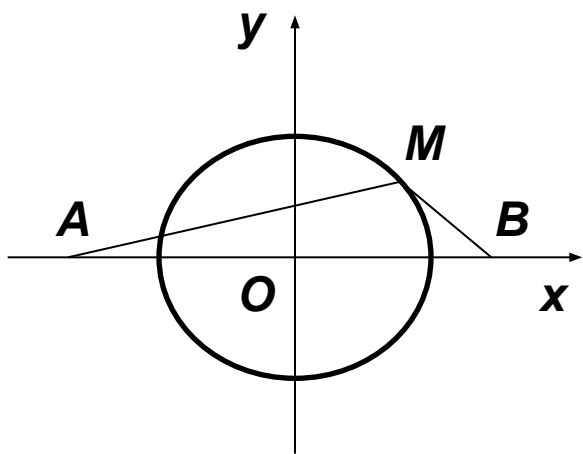
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

есть **уравнение окружности** с центром в точке  $C(x_0; y_0)$  и радиусом  $R$ .

Заметим, что если центр окружности совпадает с началом системы координат, то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2$$





**Задача.** Составьте уравнение фигуры на плоскости, состоящей из всех точек, сумма квадратов расстояний которых от точек **A**  $(-6; 0)$  и **B**  $(6; 0)$  равна 104.

**Решение.**

1) Пусть **M**  $(x; y)$  – точка, принадлежащая фигуре, уравнение которой необходимо составить. Тогда по условию задачи  **$AM^2 + BM^2 = 104$** .

2) Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, координаты которых известны. Получаем:

$$AM = \sqrt{(x+6)^2 + y^2}; BM = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}.$$

3) По условию задачи  $(x+6)^2 + y^2 + (x-6)^2 + y^2 = 104$ . После упрощения получаем  $x^2 + y^2 = 16$ .

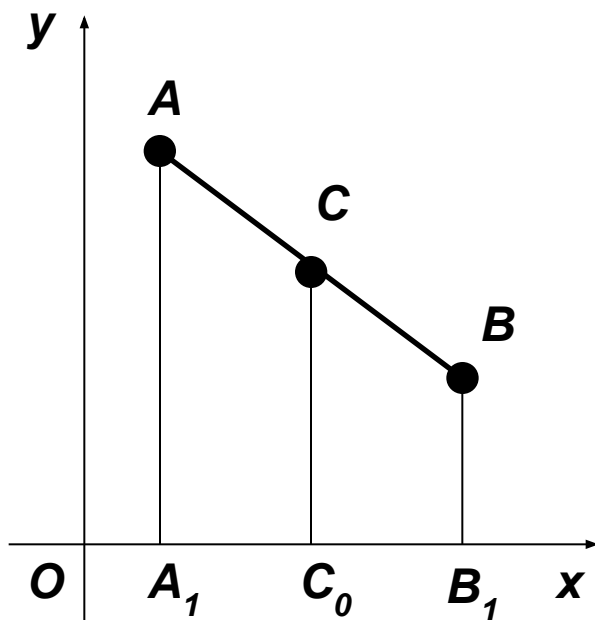
Если точка **M**  $(x; y)$  не принадлежит фигуре, о которой идет речь в задаче, то  **$AM^2 + BM^2 \neq 104$** , а значит, координаты точки **M**  $(x; y)$  не удовлетворяют уравнению  $x^2 + y^2 = 16$ . Таким образом, уравнение фигуры имеет вид  $x^2 + y^2 = 16$  и фигура является окружностью с центром в начале координат и радиусом 4.





# Координаты середины отрезка

Рассмотрим вопрос о вычислении координат середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка.



Пусть  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  – произвольные точки плоскости, а точка  $C(x_0; y_0)$  – середина отрезка  $AB$ . Найдем координаты  $x_0$  и  $y_0$ .

Найдем координату  $x_0$ .

1) Пусть отрезок  $AB$  не параллелен оси  $Oy$ , т. е.  $x_1 \neq x_2$ . Проведем через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  прямые, параллельные оси  $Oy$ , которые пересекают ось  $Ox$  в точках  $A_1(x_1; 0)$ ,  $B_1(x_2; 0)$  и  $C_0(x_0; 0)$  соответственно. Тогда по теореме Фалеса точка  $C_0(x_0; 0)$  – середина отрезка  $A_1B_1$ , т. е.  $A_1C_0 = C_0B_1$  или  $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$ . Отсюда следует, что либо  $x_0 - x_1 = x_0 - x_2$ , либо  $x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2)$ . Так как  $x_1 \neq x_2$ , то первое равенство невозможно, а значит, верно второе равенство, из которого получаем, что

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

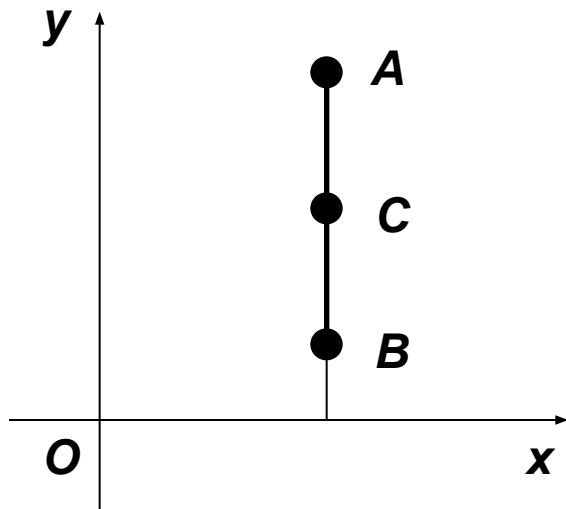


Рис. 1

2) Пусть отрезок **AB** параллелен оси **Oy**, т. е.  $x_1 = x_2$ . В этом случае все точки **A**<sub>1</sub>, **B**<sub>1</sub>, **C**<sub>0</sub> имеют одну и ту же абсциссу, а следовательно, формула

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

верна и в этом случае (рис. 1).

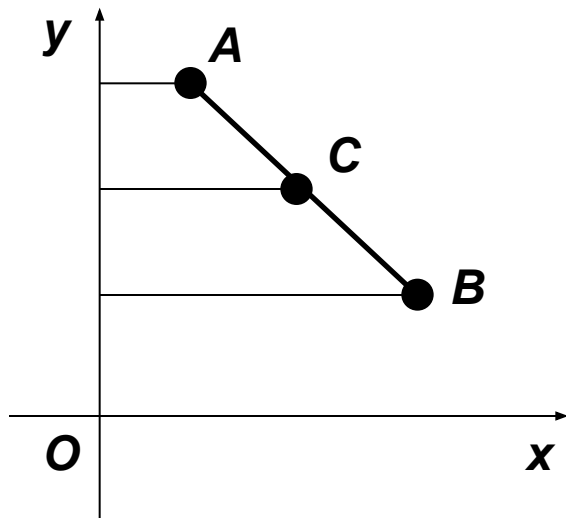
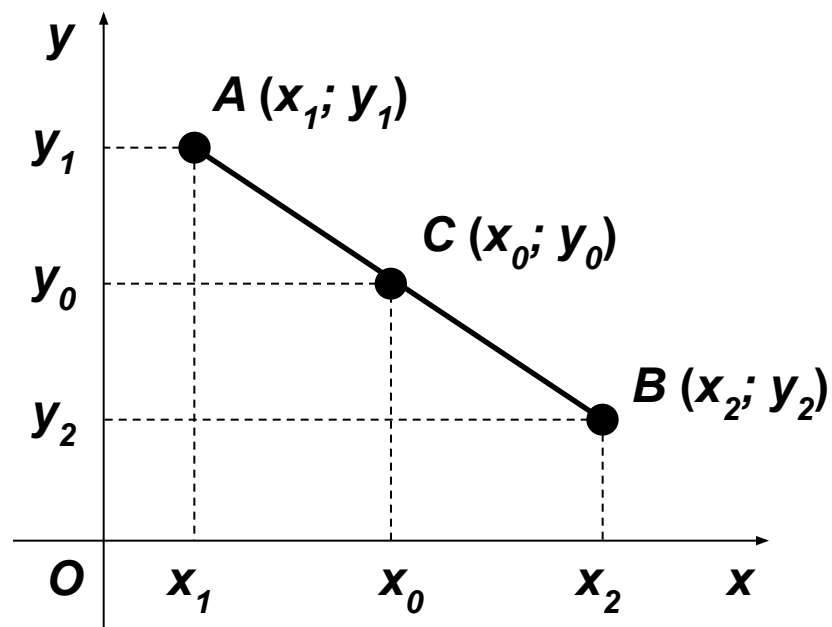


Рис. 2

Координата **y**<sub>0</sub> точки **C**<sub>0</sub> находится аналогично. В этом случае рассматриваются прямые, параллельные оси **Ox** (рис. 2), а соответствующая формула имеет вид

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Середина **C** отрезка **AB**, где **A**  $(x_1; y_1)$ , **B**  $(x_2; y_2)$ :

$$C(x_0; y_0)$$
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

**Задача.** Концами отрезка служат точки **A**  $(-8; -5)$ , **B**  $(10; 4)$ . Найдите координаты точек **C** и **D**, которые делят отрезок **AB** на три равные части.

**Решение.**

Пусть точки **C** и **D** имеют координаты  $(x_C; y_C)$  и  $(x_D; y_D)$ .

1) Найдем абсциссы точек **C** и **D**.

Так как точка **C** – середина отрезка **AD**, то выполняется равенство

$$x_C = \frac{x_D - 8}{2},$$

так как точка **D** – середина отрезка **CB**, то

$$x_D = \frac{10 + x_C}{2}.$$

Решив систему  $\begin{cases} 2x_C = x_D - 8, \\ 2x_D = 10 + x_C, \end{cases}$

находим  $x_C = -2$ ,  $x_D = 4$ .

2) Найдем ординаты точек **C** и **D**.

Для нахождения ординат точек **C** и **D** воспользуемся равенствами

$$y_C = \frac{y_D - 5}{2}; \quad y_D = \frac{y_C + 4}{2}.$$

Решив систему

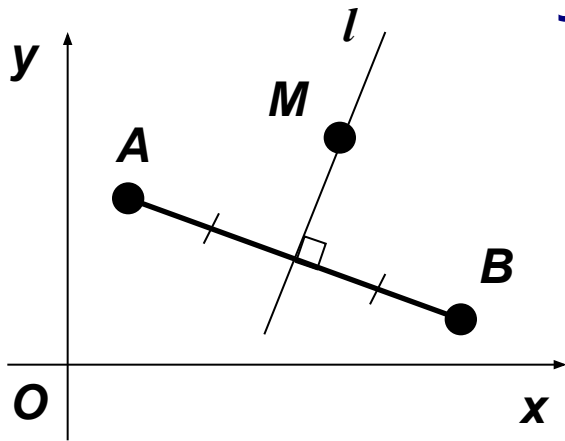
$$\begin{cases} 2y_C = y_D - 5, \\ 2y_D = y_C + 4, \end{cases}$$

находим  $y_C = -2$ ,  $y_D = 1$ .

**Ответ:** C (-2; -2), D (4; 1).



## Уравнение прямой



Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны.

Пусть на плоскости дана прямая  $l$  и выбрана прямоугольная система координат. Рассмотрим две различные точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  такие, что прямая  $l$  является серединным перпендикуляром для отрезка  $AB$ .

1) Если точка  $M(x; y)$  лежит на прямой  $l$ , то  $AM = BM$ . Следовательно, координаты точки  $M$  удовлетворяют уравнению

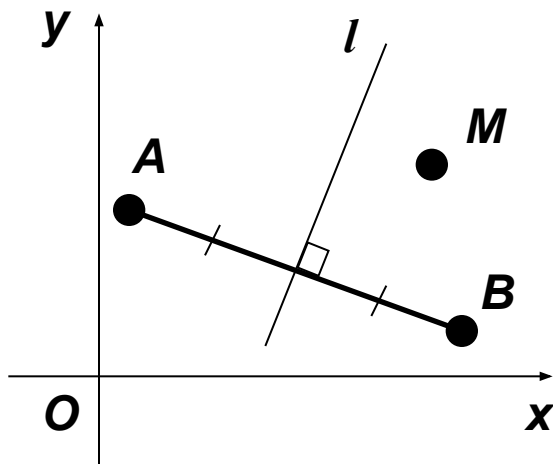
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,$$

которое после преобразования принимает вид

$$ax + by + c = 0,$$

где  $a = 2(x_1 - x_2)$ ,  $b = 2(y_1 - y_2)$ ,  $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$ . Заметим, что хотя бы один из коэффициентов  $a$ ,  $b$  уравнения  $ax + by + c = 0$  не равен нулю, т. к. точки  $A$  и  $B$  различные, а значит, хотя бы одна из разностей  $x_1 - x_2$ ,  $y_1 - y_2$  не равна нулю.

Таким образом, если точка  $M$  лежит на прямой  $l$ , то ее координаты удовлетворяют уравнению  $ax + by + c = 0$ , где коэффициенты  $a$  и  $b$  одновременно не равны нулю.



2) Если точка  $M(x; y)$  не лежит на прямой  $l$ , то  $AM \neq BM$  и  $AM^2 \neq BM^2$ , а следовательно, координаты точки  $M$  не удовлетворяют уравнению  $ax + by + c = 0$ .

Таким образом, **уравнением прямой** в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени

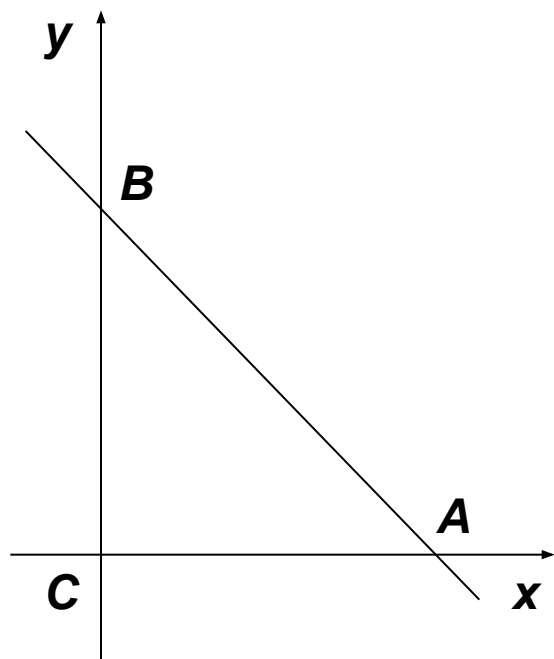
$$ax + by + c = 0,$$

где  $a$  и  $b$  одновременно не равны нулю.

- ✓ Если  $a = 0$ , то  $y = c_1$  – прямая  $\parallel O_x$ .
- ✓ Если  $b = 0$ , то  $y = c_2$  – прямая  $\parallel O_y$ .
- ✓ Если  $c = 0$ , то прямая проходит через  $O(0; 0)$ .

**Задача.** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ACB$  с прямым углом при вершине  $C$ . Найдите множество точек  $M$  плоскости, для каждой из которых выполняется условие  $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$ .

**Решение.**



Рассмотрим систему координат, начало которой совпадает с вершиной  $C$ , а вершины  $A$  и  $B$  расположены на осях  $Ox$  и  $Oy$ , как показано на рисунке. Если катет данного треугольника равен  $a$ , тогда  $(0; 0)$ ,  $(a; 0)$ ,  $(0; a)$  – координаты точек  $C$ ,  $A$  и  $B$  в выбранной системе координат соответственно. Пусть  $(x; y)$  – координаты точки  $M$ , принадлежащей искомому множеству точек.



Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, если известны их координаты:

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}, \quad CM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

По условию задачи  $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$ , следовательно,

$$(x-a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Отсюда получаем уравнение  $x + y - a = 0$ .

Если точка  $M(x; y)$  не принадлежит искомому множеству точек, то  $AM^2 + BM^2 \neq 2CM^2$ , а значит, координаты точки  $M$  не удовлетворяют уравнению  $x + y - a = 0$ . Таким образом,  $x + y - a = 0$  есть уравнение искомого множества точек и это множество есть прямая, на которой лежит гипотенуза  $AB$  данного треугольника.



# Заключение

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.

