Метод координат в пространстве

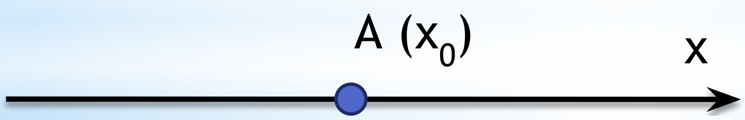
*Содержание темы

1. Прямоугольная система координат в пространстве
2. Координаты вектора
3. Связь между координатами вектора и координатами точек
4. Простейшие задачи в координатах
5. Угол между векторами
6. Скалярное произведение векторов
7. Вычисление углов между прямыми и плоскостями
8. Движения. Центральная симметрия. Осевая симметрия.

*Прямоугольная система координат в пространстве

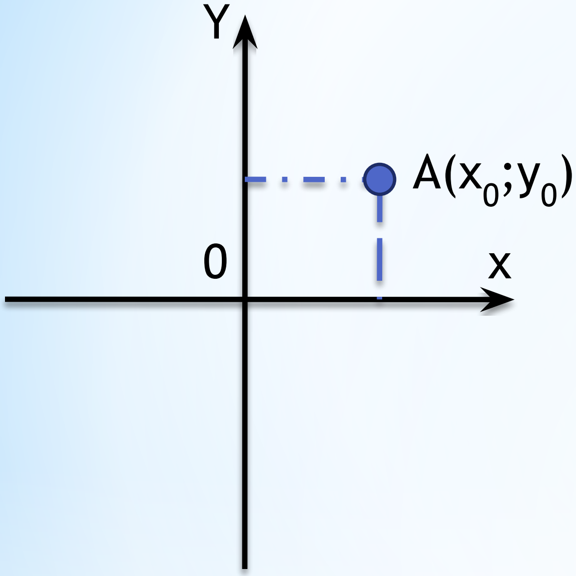
Системы координат

1. Числовая прямая (на прямой)



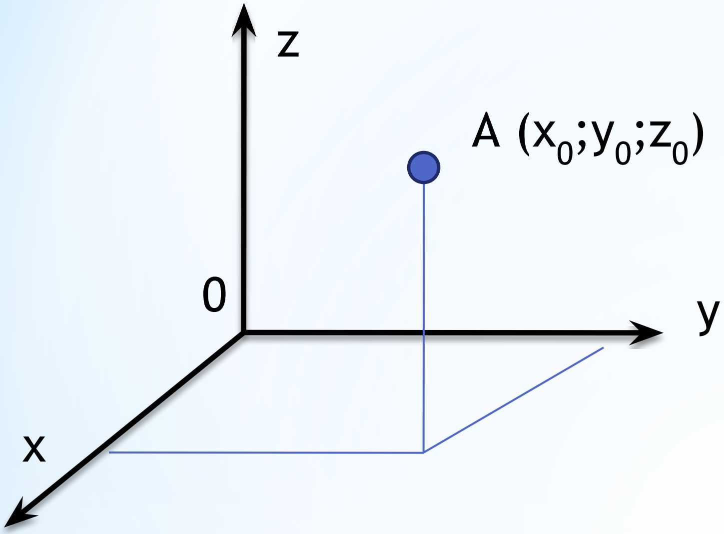
x-абсцисса, единица измерения –длина, точка с одной координатой

2. Декартова система координат (на плоскости)



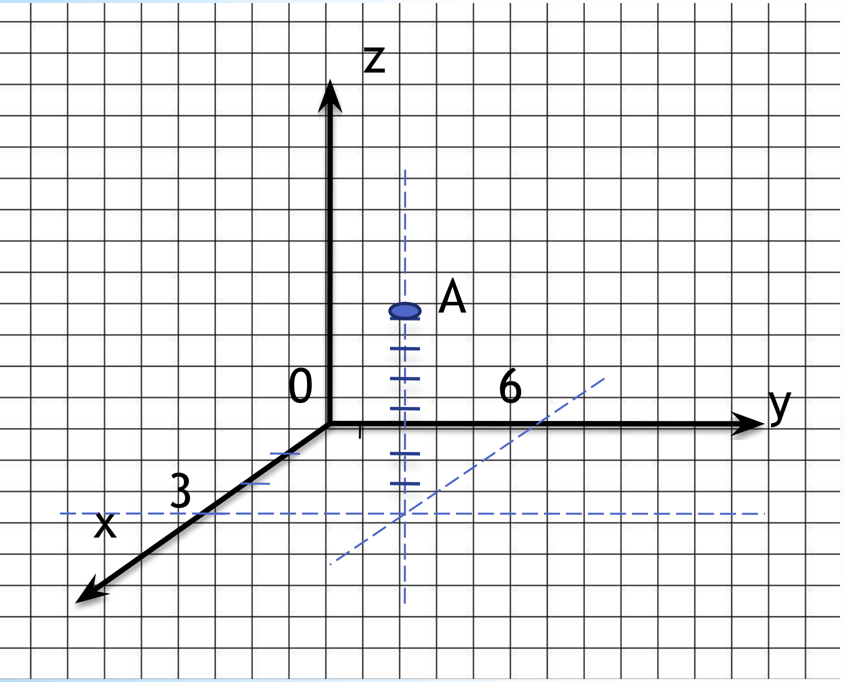
X- абсцисса, y- ордината,
 единицы измерения-
 длина и ширина.
Точка с двумя
координатами A(x_0;y_0)

3. Прямоугольная система координат (в пространстве)



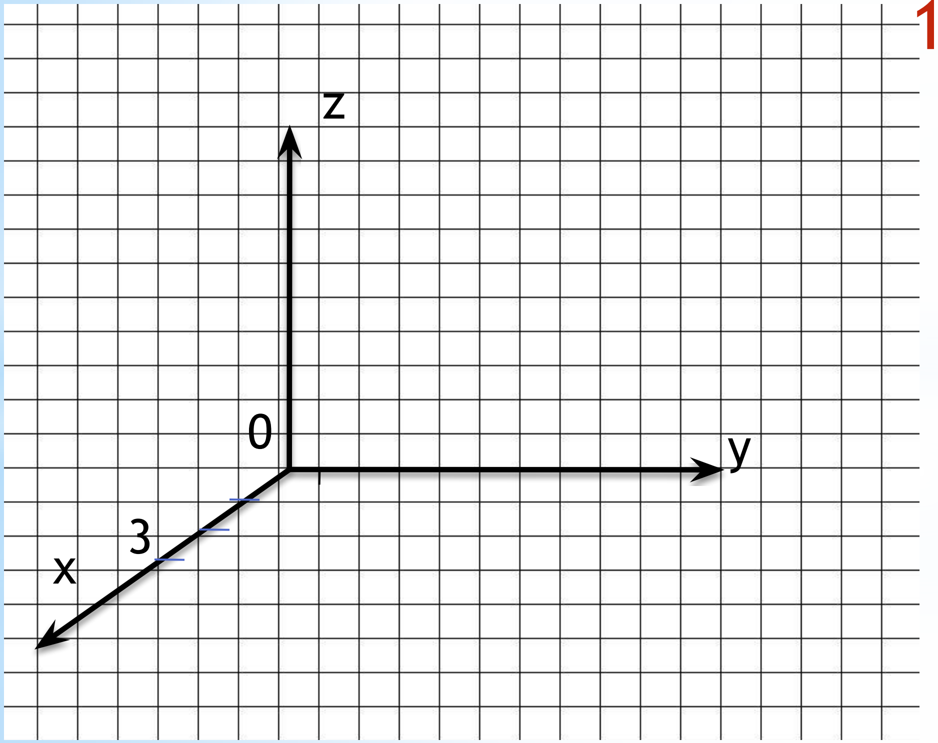
X-абсцисса, y-ордината, z- аппликата, единицы измерения: длина, ширина и высота. Точка с тремя координатами A $(x_0;y_0;z_0)$

Построение точек в прямоугольной системе координат



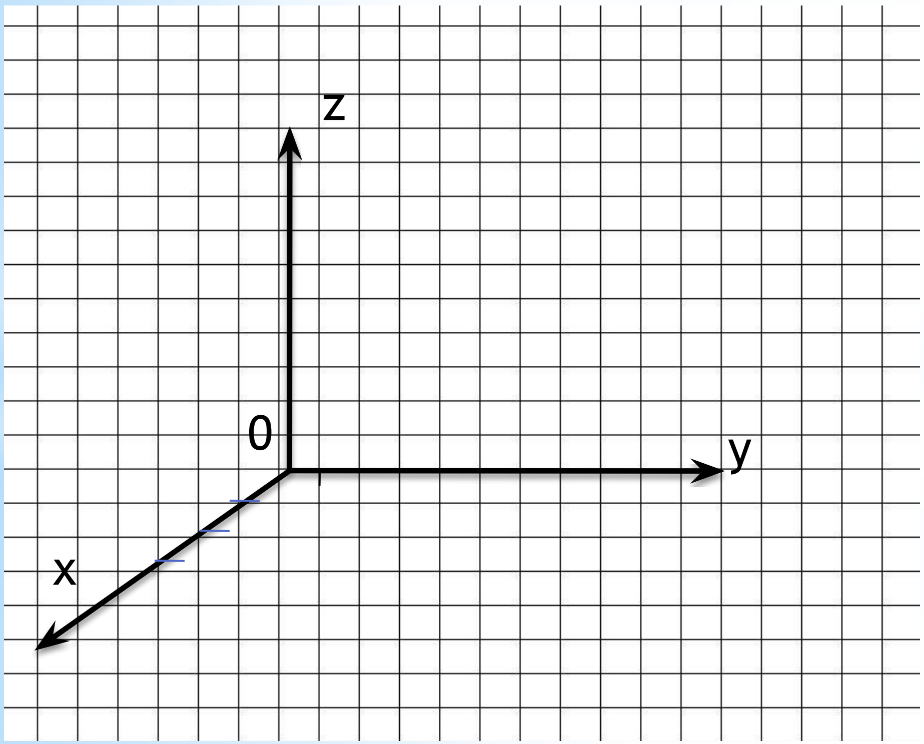
1. A(3;6;5) На оси Ох- отметить 3 единичных отрезка и провести прямую через эту точку, причем параллельную оси Оу
2. На оси Оу отметить два единичных отрезка и провести прямую через эту точку, причем параллельную оси Ох
3. Через точку пересечения двух прямых провести прямую параллельную оси Oz, и отметить на ней 5 единичных отрезков вверх.

Построение точек в прямоугольной системе координат



1. A(6;5;6), B(4;0;6), C(3;-1;0), D(0;0;7), E(0;0;3), F(2;0;0), G(2;3;-4), Q(-4;0;3), W(0;-1;0), R(1;2;3), T(0;5;-7), Y(2;-3;5), U(8;8;-6), O(3;-6;2), K(0;0;10), N(-5;-3;4) M(-6;2;6), S(4;0;6)

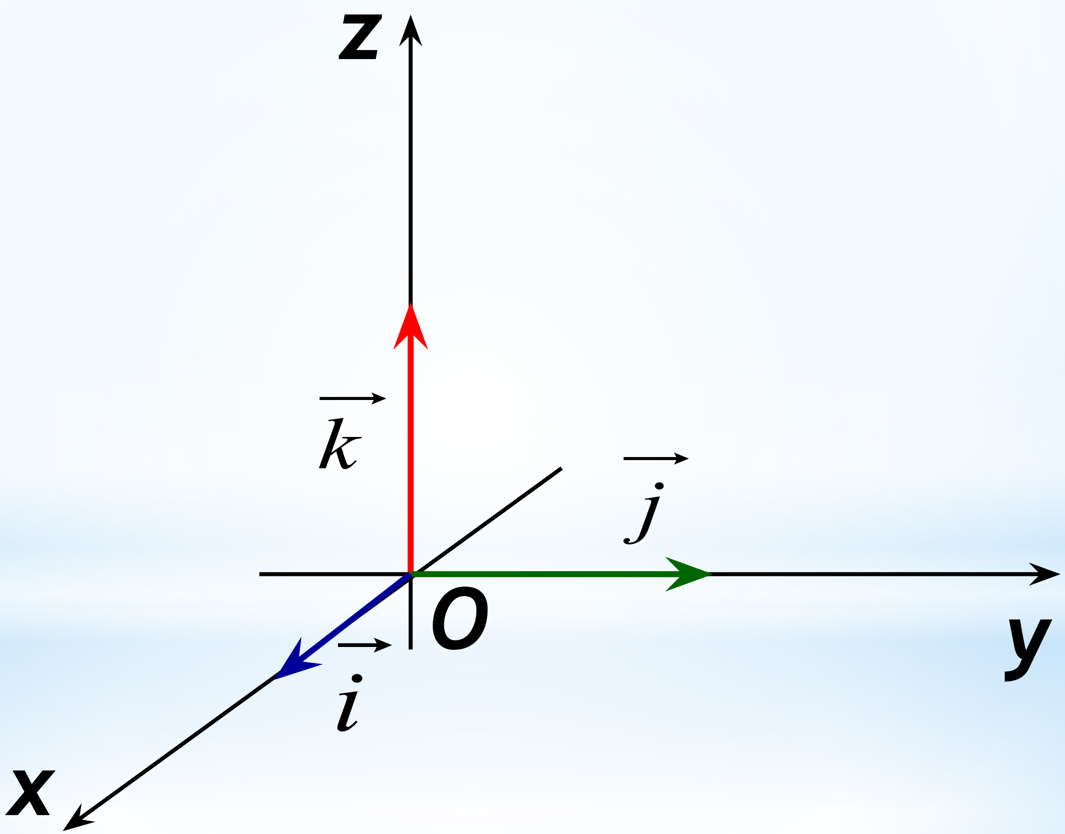
402. Даны координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (0;\ 1;\ 0)$ и $A_1\ (1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.



402. Даны координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (0;\ 1;\ 0)$ и $A_1\ (1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

Единичный вектор – *вектор, длина которого равна 1.*

i – единичный вектор оси абсцисс, j – единичный вектор оси ординат, k – единичный вектор оси аппликат.



Любой вектор ā можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде:

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Нулевой вектор можно представить в виде:

$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k}$$

Координаты равных векторов соответственно равны, т.е., если

ā { x1; y1; z1 } = $\vec{b}$ { x2; y2; z2 }, то

x1 = x2, y1 = y2, z1 = z2.

1. **Сумма векторов:**

$\vec{a} + \vec{b} = \{ x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2 \}$.

2. **Разность векторов:**

$\vec{a} - \vec{b} = \{ x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2 \}$.

3. **Произведение вектора на число:**

$a\bar{a} = \{ ax;\ ay;\ az \}$.

*Решение задач

403. Запишите координаты векторов: $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{k}-\vec{i}$, $\vec{n}=0{,}7\vec{k}$.

404. Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\{-3;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\{0;\ 0;\ 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

107. Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -5;\ 2\}$, $\vec{b}\{0;\ 7;\ -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3};\ 0;\ 0\right\}$ и $\vec{d}\{-2,7;\ 3,1;\ 0,5\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{d}+\vec{b}$; д) $\vec{d}+\vec{a}$; е) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$; з) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

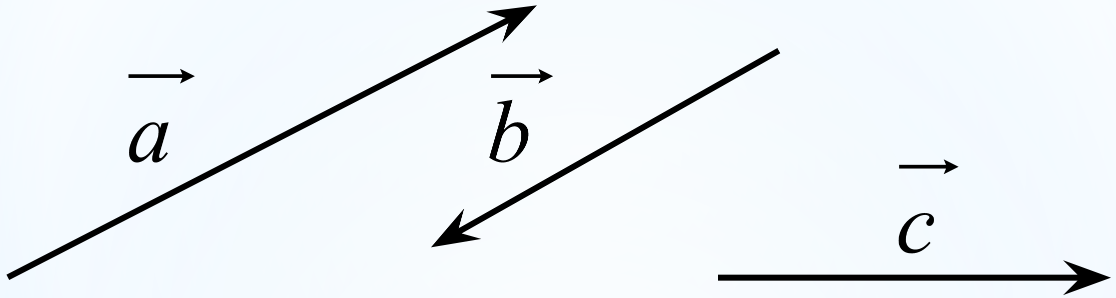
09. Даны векторы $\vec{a}\{5;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ 0{,}2;\ 0\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{5};\ -\frac{1}{7}\right\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{a}-\vec{c}$; г) $\vec{d}-\vec{a}$; д) $\vec{c}-\vec{d}$; е) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0{,}2\vec{b}$.

110. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ -5;\ -2\}$ и $\vec{c}\{2;\ 1;\ -3\}$. Найдите координаты векторов

$$\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c} \text{ и } \vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}.$$

411. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{0;\ 2;\ -2\}$, $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{d}\{-2;\ 1;\ -2\}$. Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$; б) $-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}$; в) $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-5\vec{d}$; г) $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})$.

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны.



Если векторы $\vec{a}$ { x_1; y_1; z_1 } и $\vec{b}$ { x_2; y_2; z_2 }, то:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

413. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\{3;\ 6;\ 8\}$ и $\vec{b}\{6;\ 12;\ 16\}$; б) $\vec{c}\{1;\ -1;\ 3\}$ и $\vec{d}\{2;\ 3;\ 15\}$; в) $\vec{i}\{1;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{j}\{0;\ 1;\ 0\}$; г) $\vec{m}\{0;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{n}\{5;\ 7;\ -3\}$; д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};\ -1;\ 5\right\}$ и $\vec{q}\{-1;\ -3;\ -15\}$?

*Самостоятельная работа

1 вариант

№1. Даны векторы $\vec{a}$ {2; -4; 3} и $\vec{b}$ {-3; 1/2; 1}. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

№2. Даны векторы $\vec{a}$ {1; -2; 0}, $\vec{b}$ {3; -6; 0}, $\vec{c}$ {0; -3; 4}. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 1/3\vec{b} - \vec{c}$.

№3. Найдите значения m и n, при которых векторы $\vec{a}$ {6; n; 1} и $\vec{b}$ {m; 16; 2} коллинеарны.

2 вариант

№1. Даны векторы a {1; -3; -1} и b {-1; 2; 0}. Найдите координаты вектора c = a – b.

№2. Даны векторы a {2; 4; -6}, b {-3; 1; 0}, c {3; 0; -1}. Найдите координаты вектора p = -1/2a + 2b – c.

№3. Найдите значения m и n, при которых векторы a {-4; m; 2} и b {2; -6; n} коллинеарны.

*Связь между координатами вектора и координатами точек

Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало — с началом координат, называется радиус-вектором данной точки.

каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

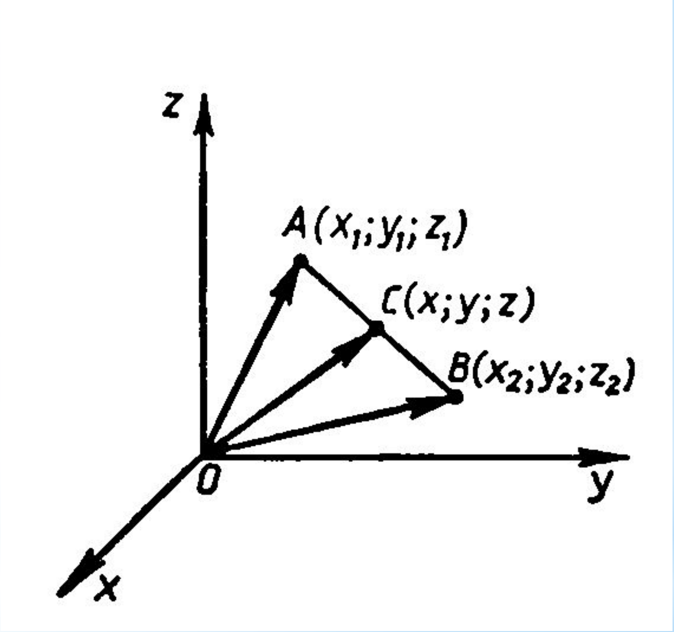
A $(x_1;y_1;x_1)$
B $(x_2;y_2;z_2)$
AB $\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}$

* Даны векторы $\overrightarrow{OA}\{3; 2; 1\}$, $\overrightarrow{0B}\{1; -3; 5\}$ и $\overrightarrow{OC}\{-1/3, 0,75; -2,5\}$ Запишите координаты точек А, В а С, если точка О — начало координат.

* **Найдите координаты вектора AB, если: а) A(3; — 1; 2), B (2; — 1; 4); б) A (-2; 6; -2), B (3; — 1; 0); в) A(1; 5/6;1/2),B(1/2;1/3;1/4)**

* Простейшие задачи в координатах

<u>а) Координаты середины отрезка.</u> В системе координат Oxyz отметим точку А с координатами (x_1; y_1; Z_1) и точку В с координатами (x_2 y_2; z_2). Выразим координаты (x; y; z) середины С отрезка АВ через координаты его концов.



$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

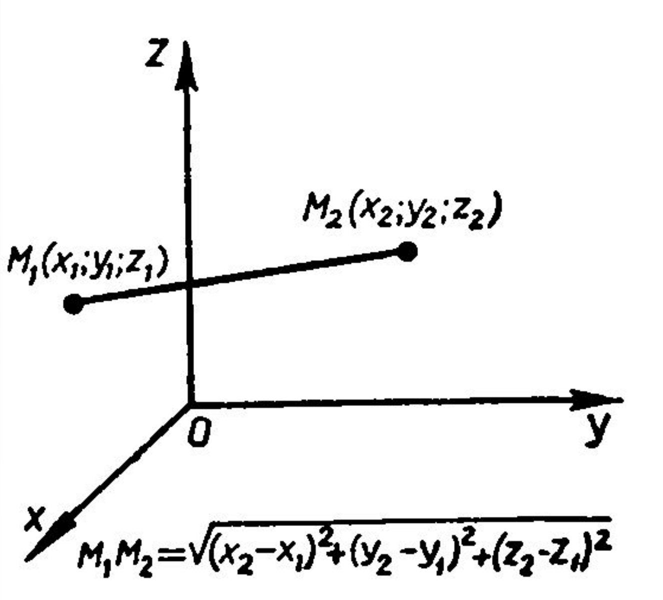
Таким образом, каждая координата середины отрезка равна

полусумме соответствующих координат его концов.

б**) Вычисление длины вектора по его координатам**.
Длина вектора a (x; y; z) вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

в) Расстояние между двумя точками. Рассмотрим две произвольные точки: точку M_1, с координатами (x_1; y_1; z_1)
И точку M_2 с координатами (x_2; y_2; z_2). Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

*Решение задач

Точка M — середина отрезка AB. Найдите координаты: а) точки M, если $A(0;\ 3;\ -4)$, $B(-2;\ 2;\ 0)$; б) точки B, если $A(14;\ -8;\ 5)$, $M(3;\ -2;\ -7)$; в) точки A, если $B(0;\ 0;\ 2)$, $M(-12;\ 4;\ 15)$.

Середина отрезка AB лежит на оси Ox. Найдите m и n, если: а) $A(-3;\ m;\ 5)$, $B(2;\ -2;\ n)$; б) $A(1;\ 0{,}5;\ -4)$, $B(1;\ m;\ 2n)$; в) $A(0;\ m;\ n+1)$, $B(1;\ n;\ -m+1)$; г) $A(7;\ 2m+n;\ -n)$, $B(-5;\ -3;\ m-3)$.

Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(-1; 0; 2)$, $B(1; -2; 3)$; б) $A(-35; -17; 20)$, $B(-34; -5; 8)$.

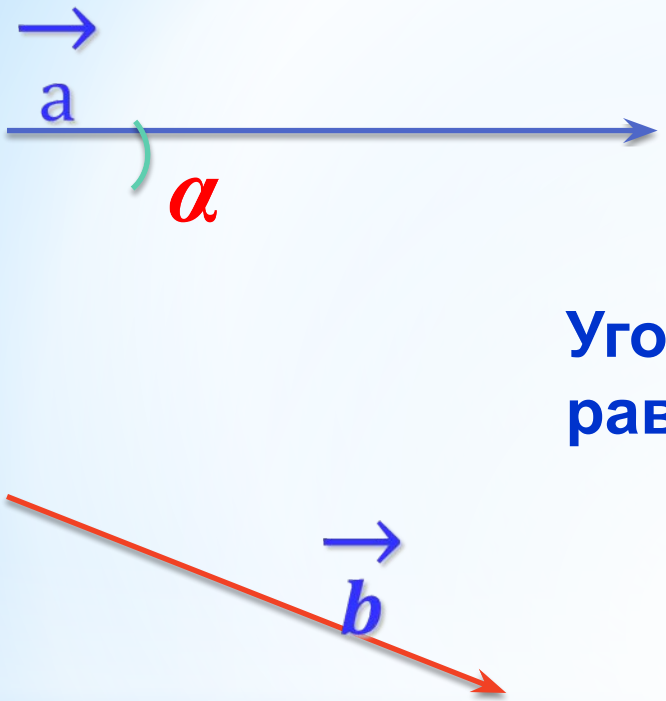
Найдите длины векторов: $\vec{a}\{5;\ -1;\ 7\}$, $\vec{b}\{2\sqrt{3};\ -6;\ 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{k}$, $\vec{m}=\vec{i}-2\vec{j}$.

Даны векторы $\vec{a}\{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b}\{-2;\ 3;\ 1\}$ и $\vec{c}\{-3;\ 2;\ 1\}$. Найдите:
а) $|\vec{a}+\vec{b}|$; б) $|\vec{a}|+|\vec{b}|$; в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|$; г) $|\vec{a}-\vec{b}|$; д) $|3\vec{c}|$;
е) $\sqrt{14}\ |\vec{c}|$; ж) $|2\vec{a}-3\vec{c}|$.

Определите вид треугольника ABC, если: а) $A(9;\ 3;\ -5)$, $B(2;\ 10;\ -5)$, $C(2;\ 3;\ 2)$; б) $A(3;\ 7;\ -4)$, $B(5;\ -3;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -10)$; в) $A(5;\ -5;\ -1)$, $B(5;\ -3;\ -1)$, $C(4;\ -3;\ 0)$; г) $A(-5;\ 2;\ 0)$, $B(-4;\ 3;\ 0)$, $C(-5;\ 2;\ -2)$.

Даны точки $A\left(\frac{3}{2}; 1; -2\right)$, $B(2; 2; -3)$ и $C(2; 0; -1)$. Найдите: а) периметр треугольника ABC; б) медианы треугольника ABC.

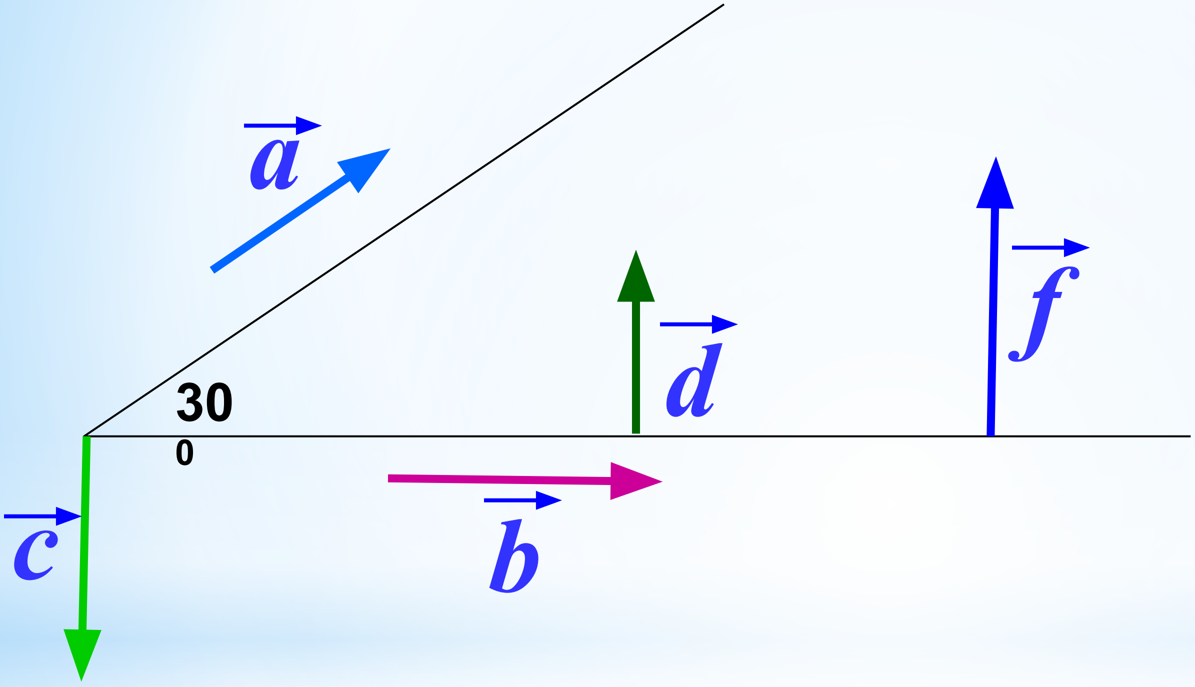
*Угол между векторами



Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α .

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \alpha$$

Найдите угол между векторами



$$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30^0$$

$$\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120^0$$

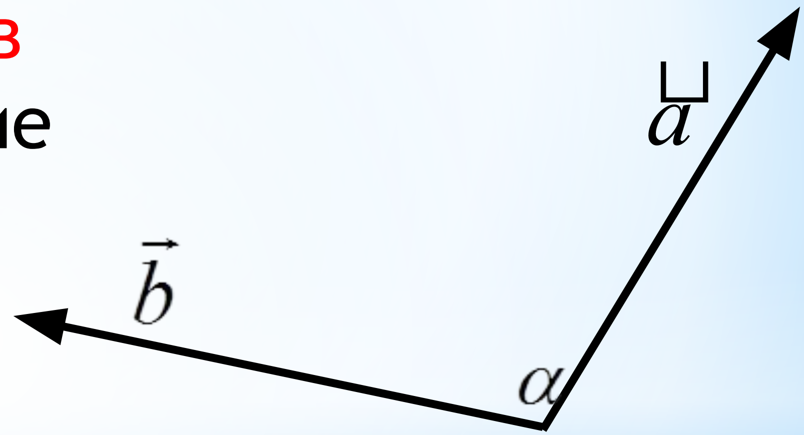
$$\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90^0$$

$$\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180^0$$

$$\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0^0$$

*Скалярное произведение векторов

Опред: Скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними



$\vec{a} \cdot \vec{b}$ – скалярное произведение _ векторов

$|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ – длины векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

*Примеры:

1. $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\alpha = 60^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot cos\left(60^0\right) = 3$

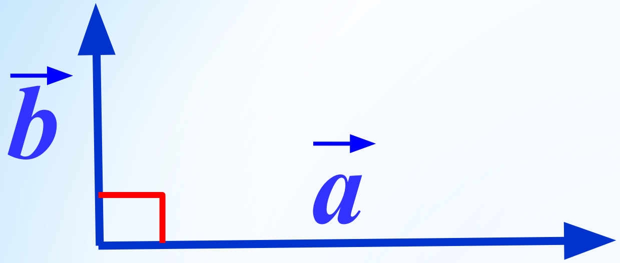
2. $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, $\alpha = 30^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot cos\left(30^0\right) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$

3. $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, $\alpha = 45^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot cos\left(45^0\right) = 14 \cdot \sqrt{2}$

4. $\left|\vec{a}\right| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 1$, $\alpha = 120^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot cos\left(120^0\right) = \frac{-1}{2}$

5. $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, $\alpha = 90^0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot cos\left(90^0\right) = 0$

Частный случай №1



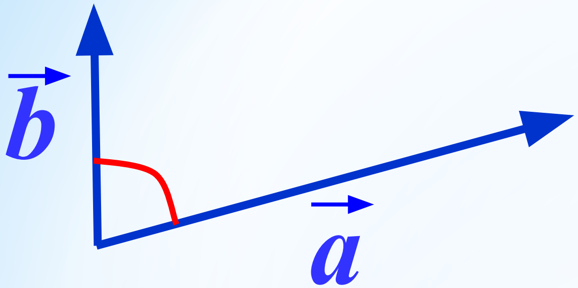
$$\widehat{\vec a\,\vec b} = 90^0$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cos 90^0 = 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы **перпендикулярны.**

$$\vec a \cdot \vec b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec a \perp \vec b$$

Частный случай №2



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

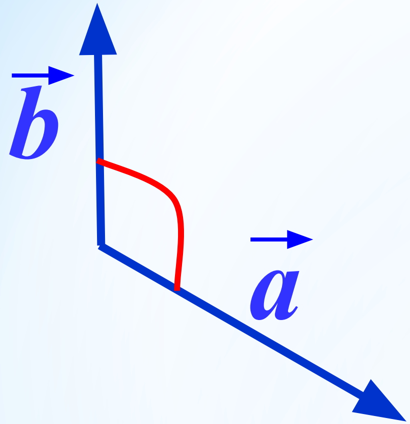
$$> 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha > 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов положительно тогда и только тогда, когда угол между векторами **острый.**

$$\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} < 90^0$$

Частный случай №3



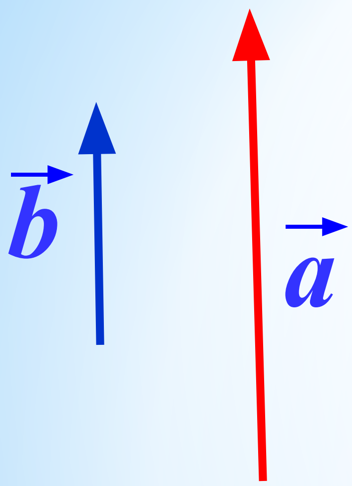
$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha < 0$$

Скалярное произведение ненулевых векторов отрицательно тогда и только тогда, когда угол между векторами **тупой**.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} > 90^0$$

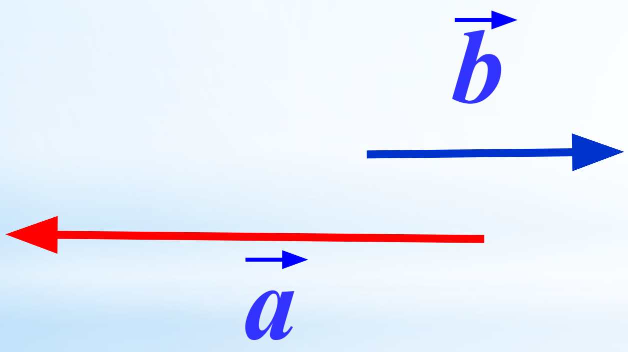
Частный случай №4



$$\widehat{\vec a\,\vec b} = 0^0$$

1

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos 0^0 = |\vec a|\cdot|\vec b|$$



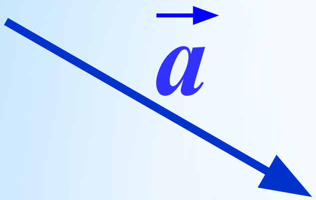
$$\widehat{\vec a\,\vec b} = 180^0$$

-1

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos 180^0 = -|\vec a|\cdot|\vec b|$$

Частный случай №5

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{a}} = 0^0$$



$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\overset{1}{\cos 0^0} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$$

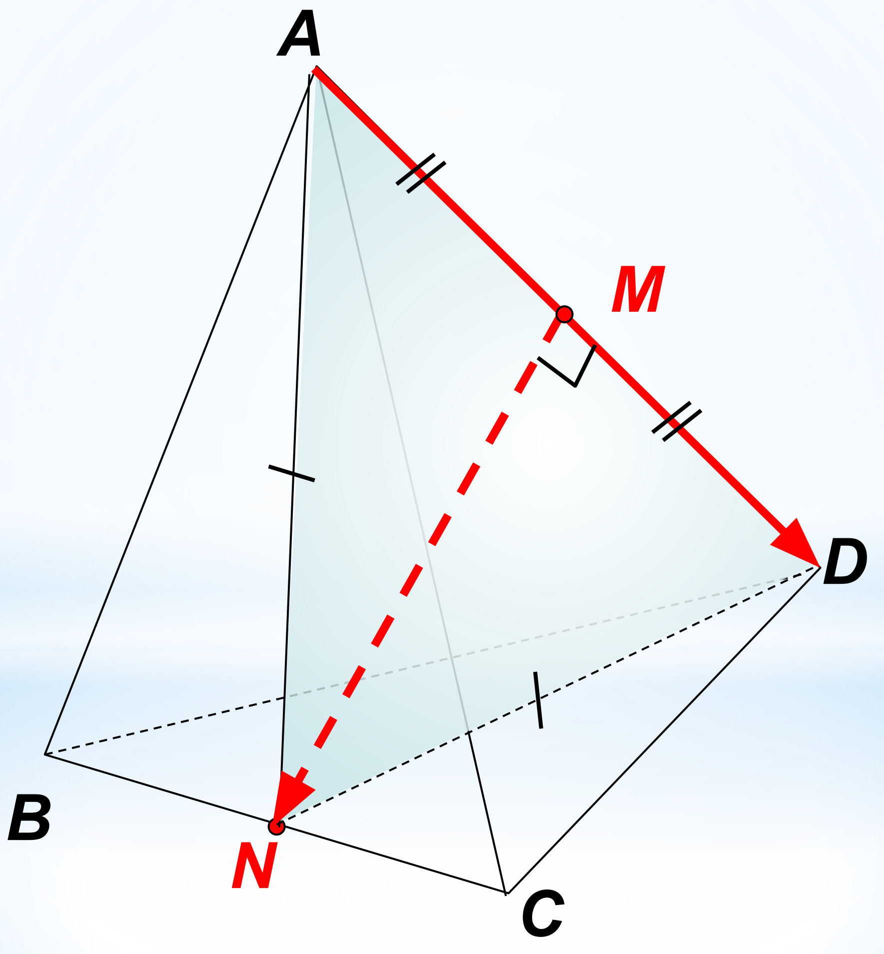
Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,2}$

Таким образом,
скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

Задача

Все ребра тетраэдра ABCD равны друг другу. Точки M и N – середины ребер AD и BC. Докажите, что $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$



*Формула нахождения скалярного произведения через координаты векторов

$$\vec{a}\ \{x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1\}$$

$$\vec{b}\ \{x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2\}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

*Примеры:

1. Даны векторы $\vec{a}\{1;-1;2\}$ $\vec{b}\{-1;1;1\}$ и $\vec{c}\{5;6;2\}$.Вычислите

   $\vec{a}\cdot\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{b}\cdot\vec{c}, \vec{a}\cdot\vec{a}, \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}$

2. Даны векторы $\vec{a}\{3;-1;1\}$ $\vec{b}\{-5;1;0\}$ и $\vec{c}\{-1;-2;1\}$. Выясните, какой угол (острый прямой или тупой) между векторами:
   - a) $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
   - b) $\vec{c}$ и $\vec{b}$;
   - c) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

*Угол между прямой и плоскостью

$$\cos\alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

*Примеры:

1. Вычислите угол между векторами:

   a) $\vec{a}\{2;-2;0\}$ и $\vec{b}\{3;0;-3\}$;

   b) $\vec{a}\{\sqrt{2};\sqrt{2};2\}$ и $\vec{b}\{-3;-3;0\}$;

   c) $\vec{a}\{0;5;0\}$ и $\vec{b}\{0;-\sqrt{3};1\}$;

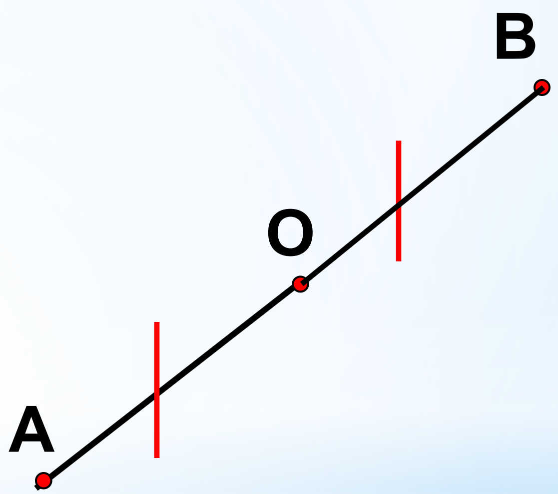
   d) $\vec{a}\{-2,5;2,5;0\}$ и $\vec{b}\{-5;5;5\sqrt{2}\}$;

   e) $\vec{a}\{-\sqrt{2};-\sqrt{2};-2\}$ и $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-1\right\}$.

* Слово “симметрия” в переводе с греческого звучит как “гармония”, означая красоту, соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей. Издавна человек использовал симметрию в архитектуре. Древним храмам, башням средневековых замков, современным зданиям она придает гармоничность, законченность.

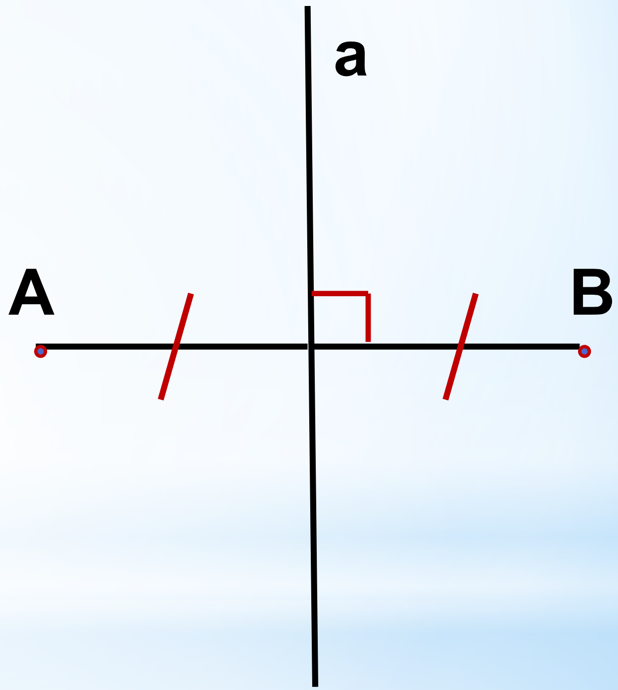
*Центральная симметрия.

* Симметрия относительно точки или центральная симметрия - это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону центра симметрии, соответствует другая точка, расположенная по другую сторону центра. При этом точки находятся на отрезке прямой, проходящей через центр, делящий отрезок пополам.



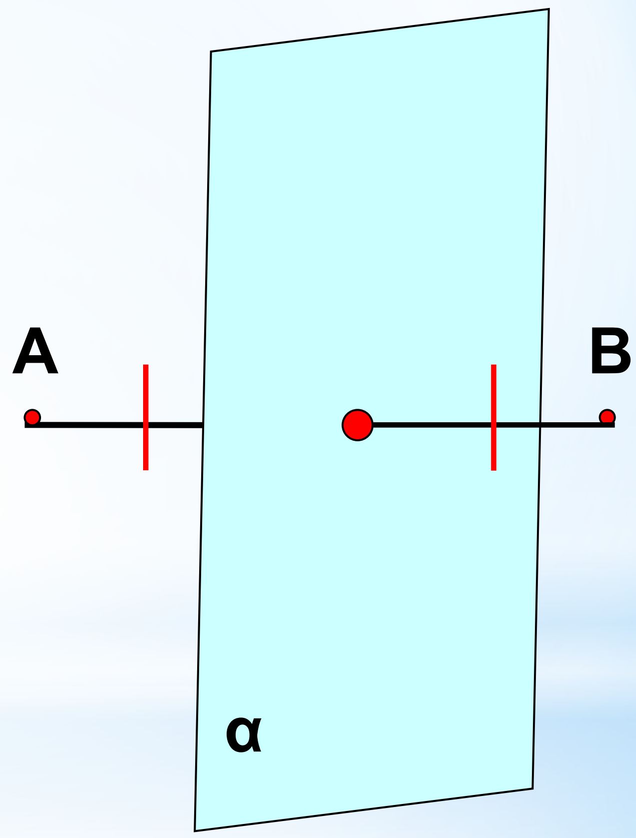
*Осевая симметрия.

* Симметрия относительно прямой (или осевая симметрия) - это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону прямой, всегда будет соответствовать точка, расположенная по другую сторону прямой, а отрезки, соединяющие эти точки, будут перпендикулярны оси симметрии и делятся ею пополам.



Зеркальная симметрия

- Точки А и В называются симметричными относительно плоскости α (плоскость симметрии), если плоскость α проходит через середину отрезка АВ и перпендикулярна к этому отрезку. Каждая точка плоскости α считается симметричной сама себе.



Симметрия в жизни

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7