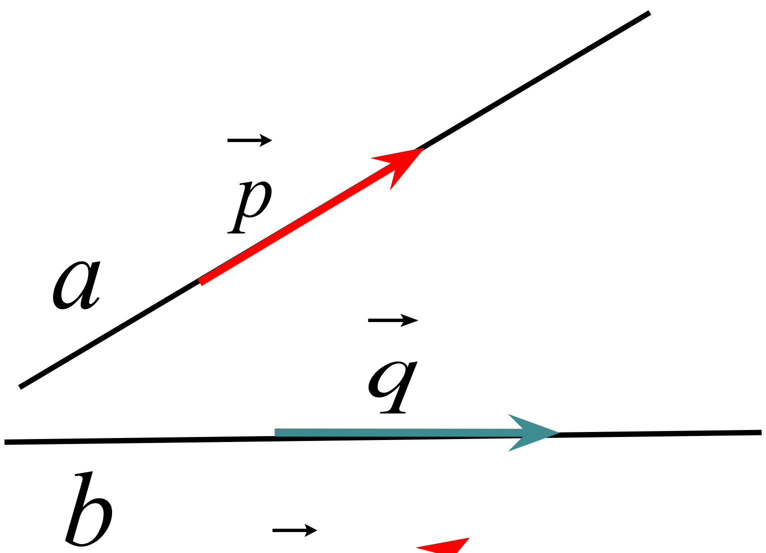
Стереометрия

Метод координат в задачах С2

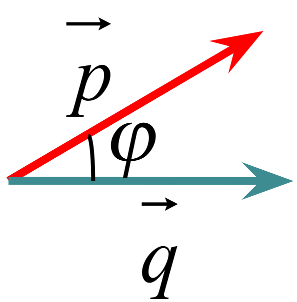
Угол между прямыми



$\vec{p}$ - направляющий вектор прямой ***a***

$\vec{q}$ - направляющий вектор прямой ***b***

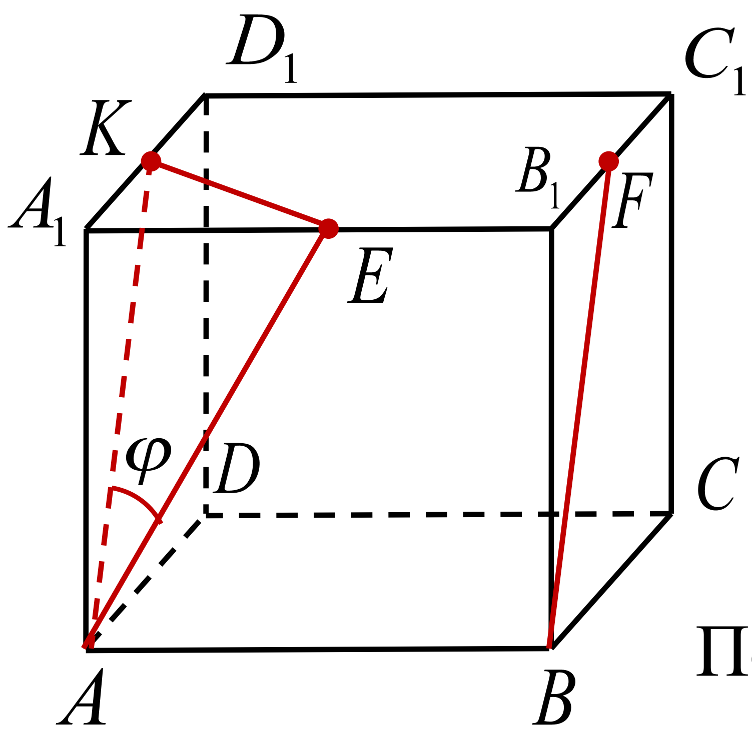
φ - угол между прямыми



$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\quad\quad$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AE и BF, где E – середина ребра A_1B_1, а F – середина ребра B_1C_1



Решение (1 способ)

K **-** середина A_1D_1

$$AK \parallel BF \qquad \angle KAE = \varphi$$

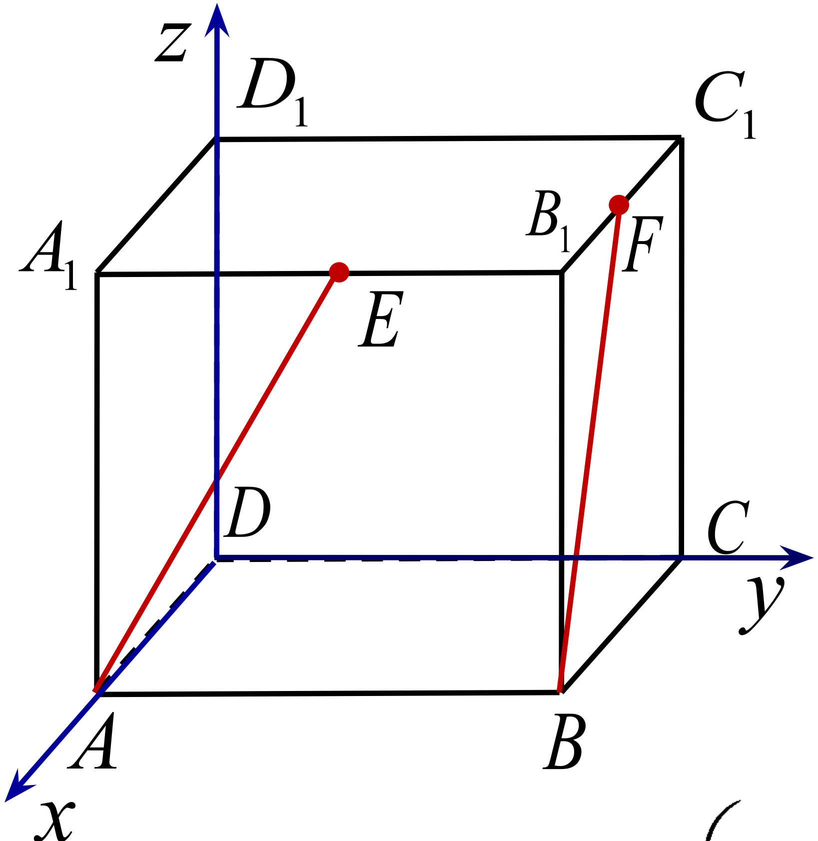
$$AE = AK = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle AKE$

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 0{,}8 \qquad \varphi = \arccos 0{,}8$$

Решение (2 способ)



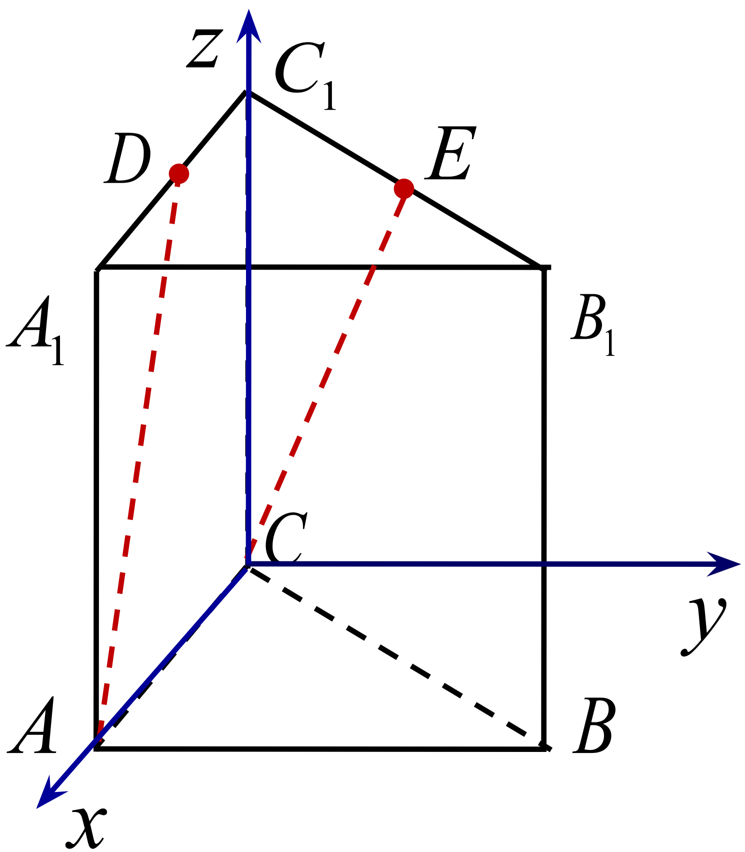
$A(1;0;0)$ $\quad E(1;\frac{1}{2};1)$

$B(1;1;0)$ $\quad F(\frac{1}{2};1;1)$

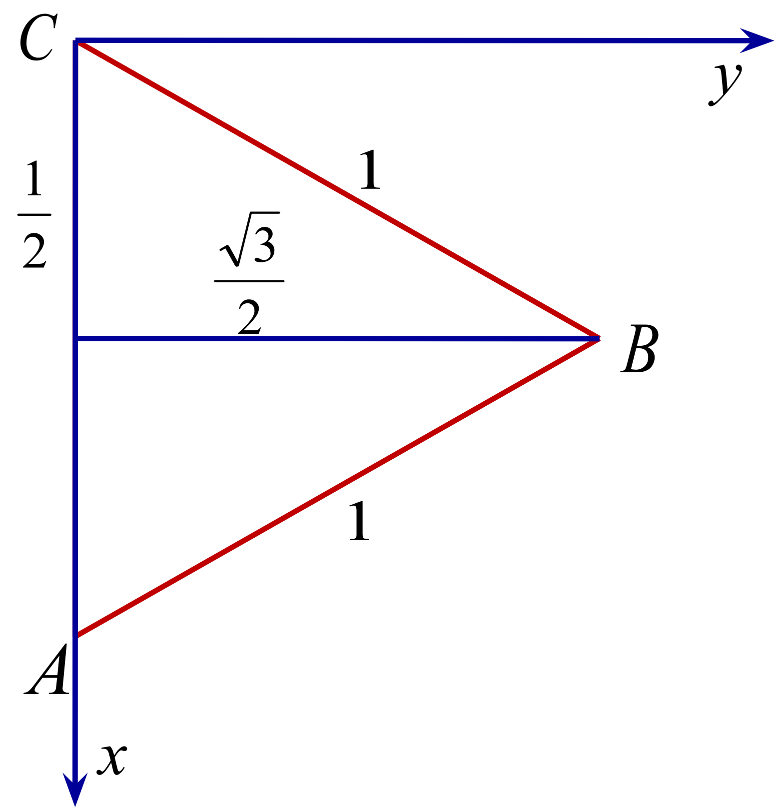
$\overrightarrow{AE}\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ $\quad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$

$$\cos\varphi=\frac{\left|0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot 0+1\cdot 1\right|}{\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}}=0{,}8$$

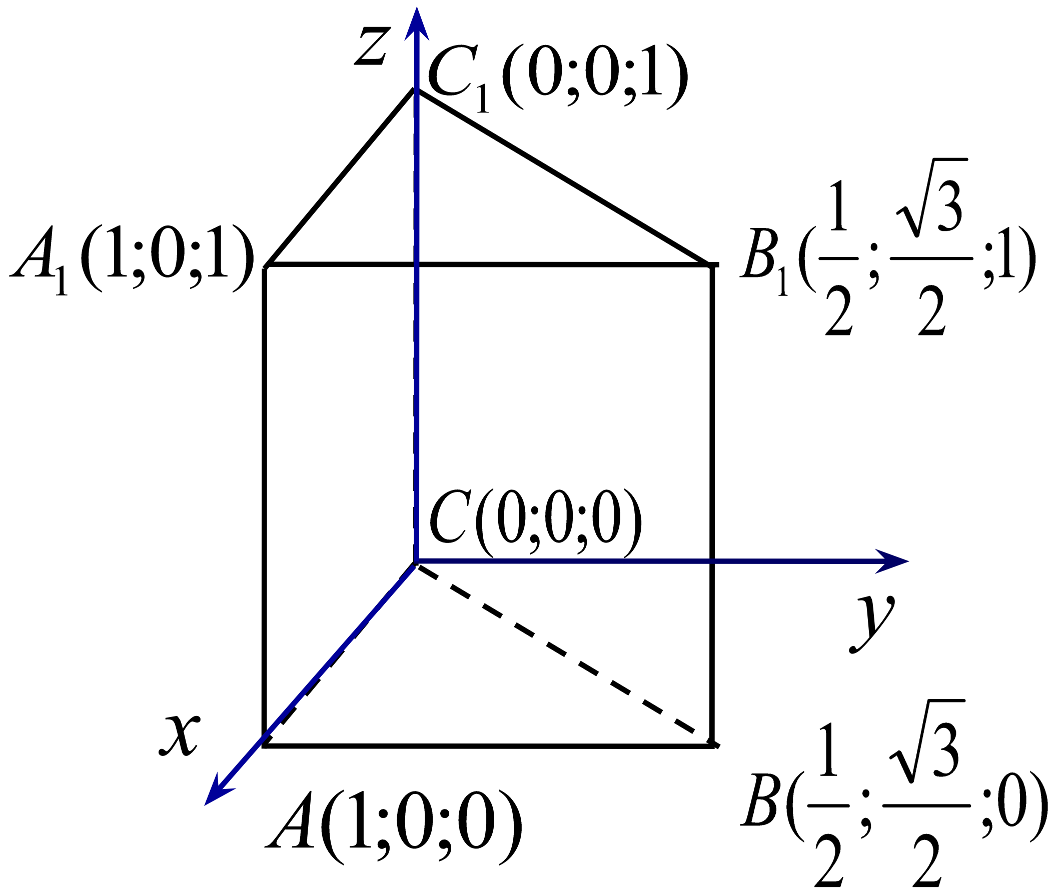
Задача 2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD и CE, где D и E - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1



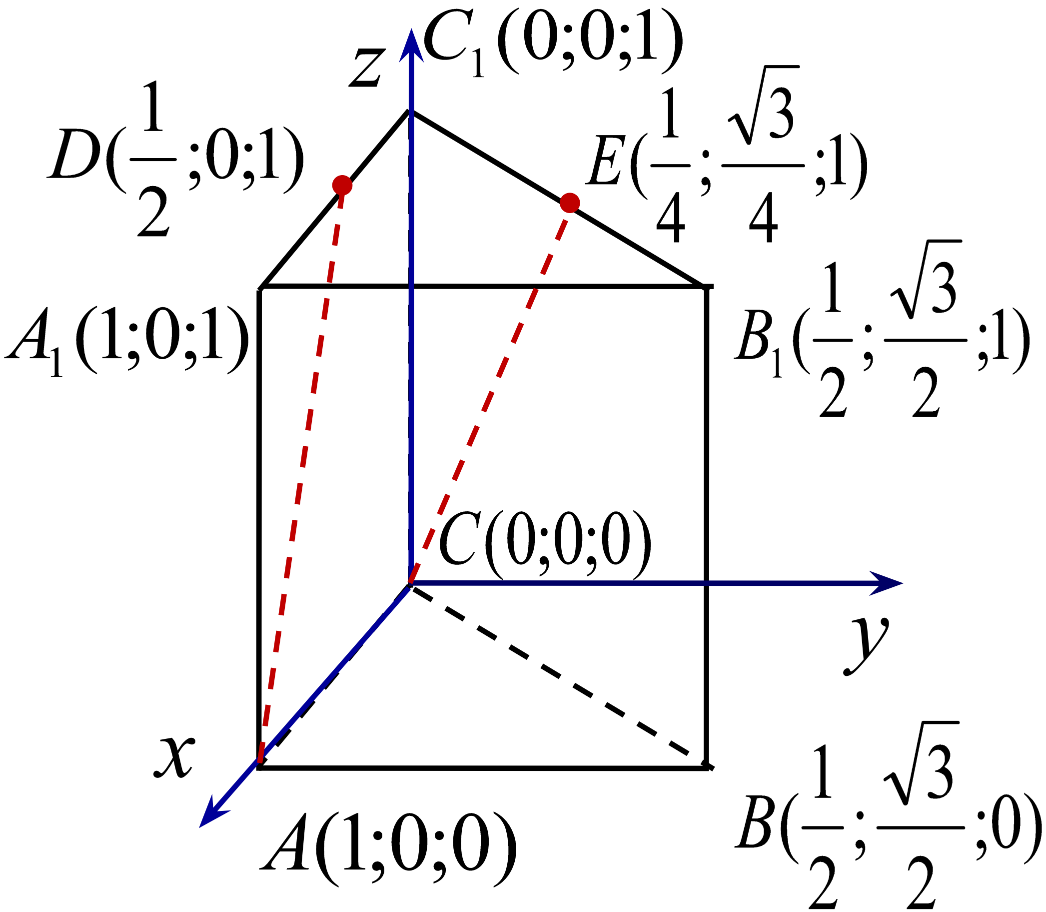
Решение.



Координаты правильной треугольной призмы



Решение.



$$\overrightarrow{AD}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}$$

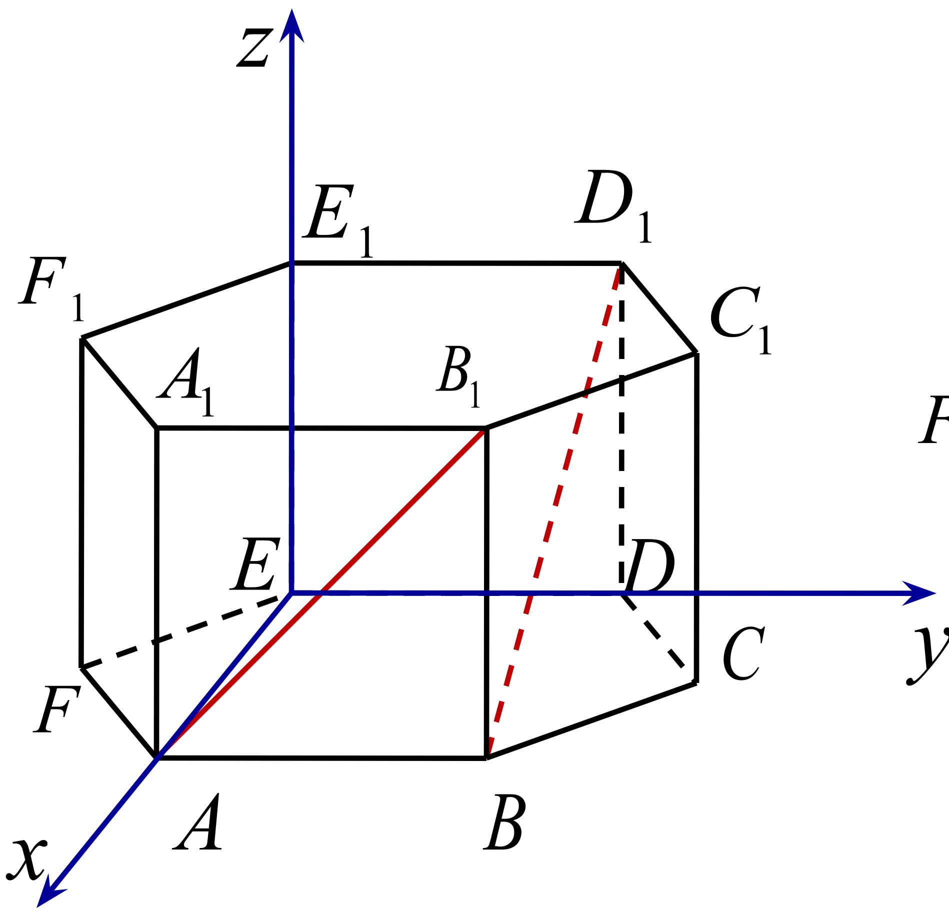
$$\overrightarrow{CE}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$$

$$\overrightarrow{AD}\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\} \qquad \overrightarrow{CE}\left\{\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right\}$$

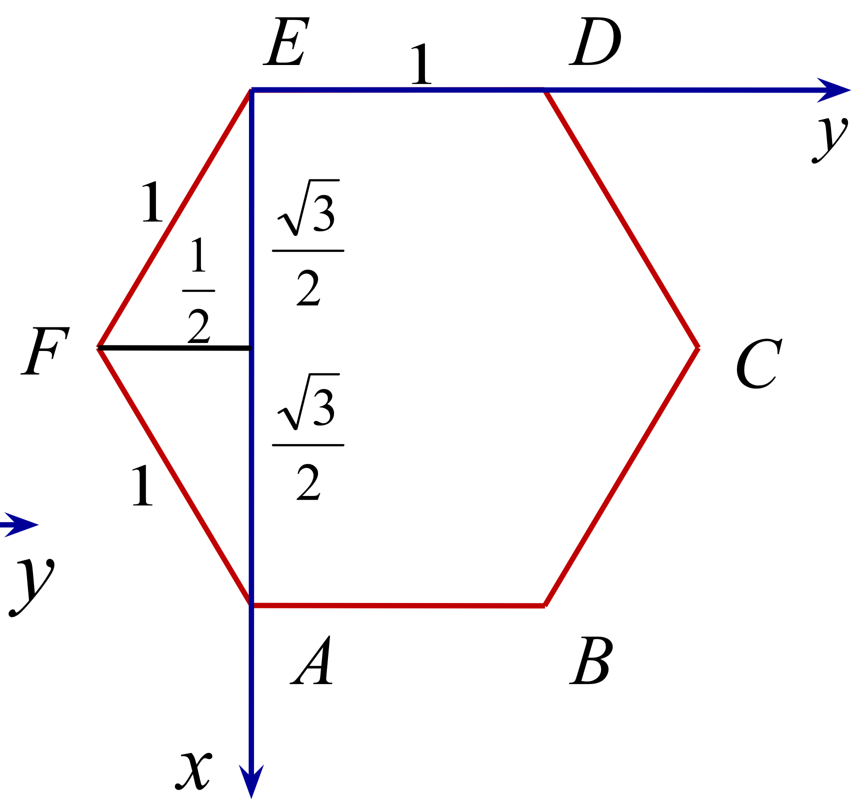
$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+1\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = 0{,}7$$

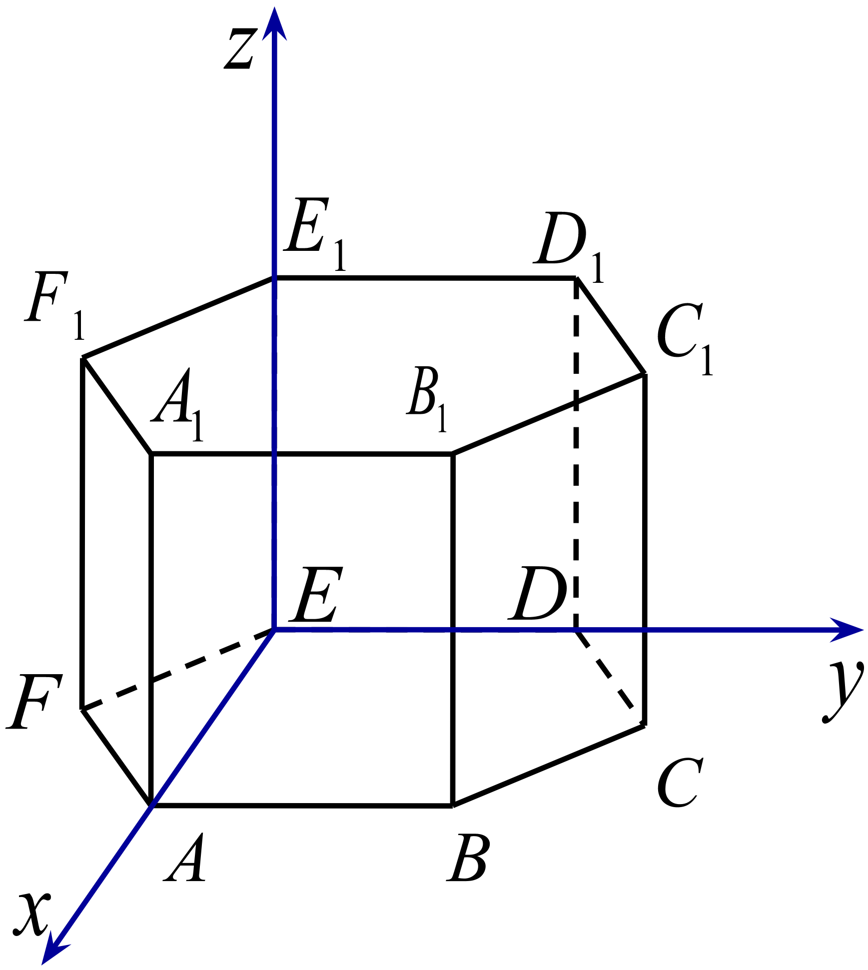
Задача 3 В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1



Решение.



Координаты правильной шестиугольной призмы



$E_1(0;0;1)$ $D_1(0;1;1)$

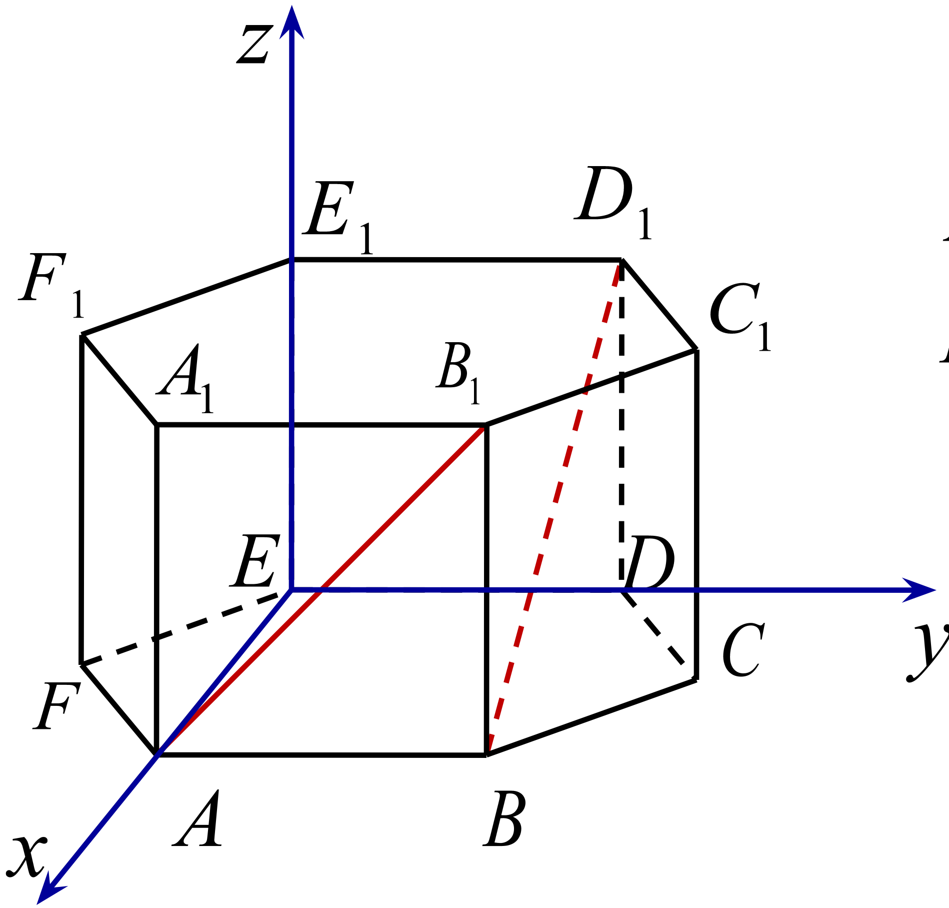
$F_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$ $C_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1)$

$A_1(\sqrt{3};0;1)$ $B_1(\sqrt{3};1;1)$

$E(0;0;0)$ $D(0;1;0)$

$F(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$ $C(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0)$

$A(\sqrt{3};0;0)$ $B(\sqrt{3};1;0)$



Решение.

$A(\sqrt{3};0;0) \qquad B_1(\sqrt{3};1;1)$

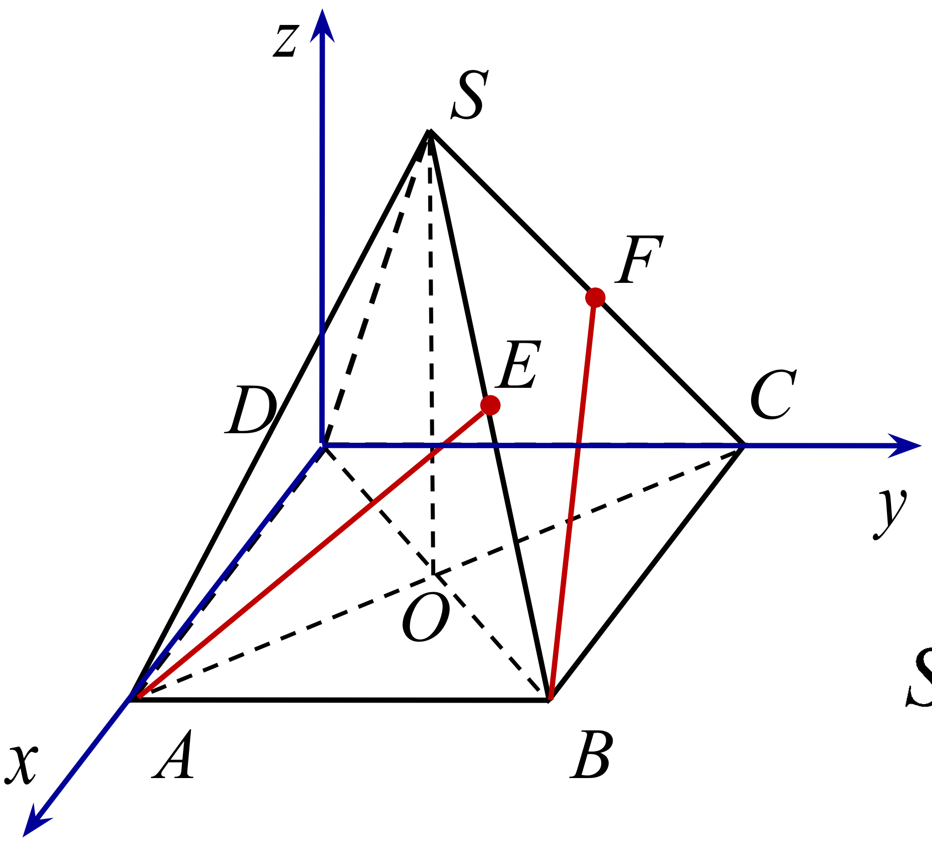
$B(\sqrt{3};1;0) \qquad D_1(0;1;1)$

$$\overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{BD_1}\{-\sqrt{3};0;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot(-\sqrt{3})+1\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 4 В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны *1*, отмечены точки *E* и *F* – середины сторон *SB* и *SC* соответственно. Найдите угол между прямыми *AE* и *BF*.



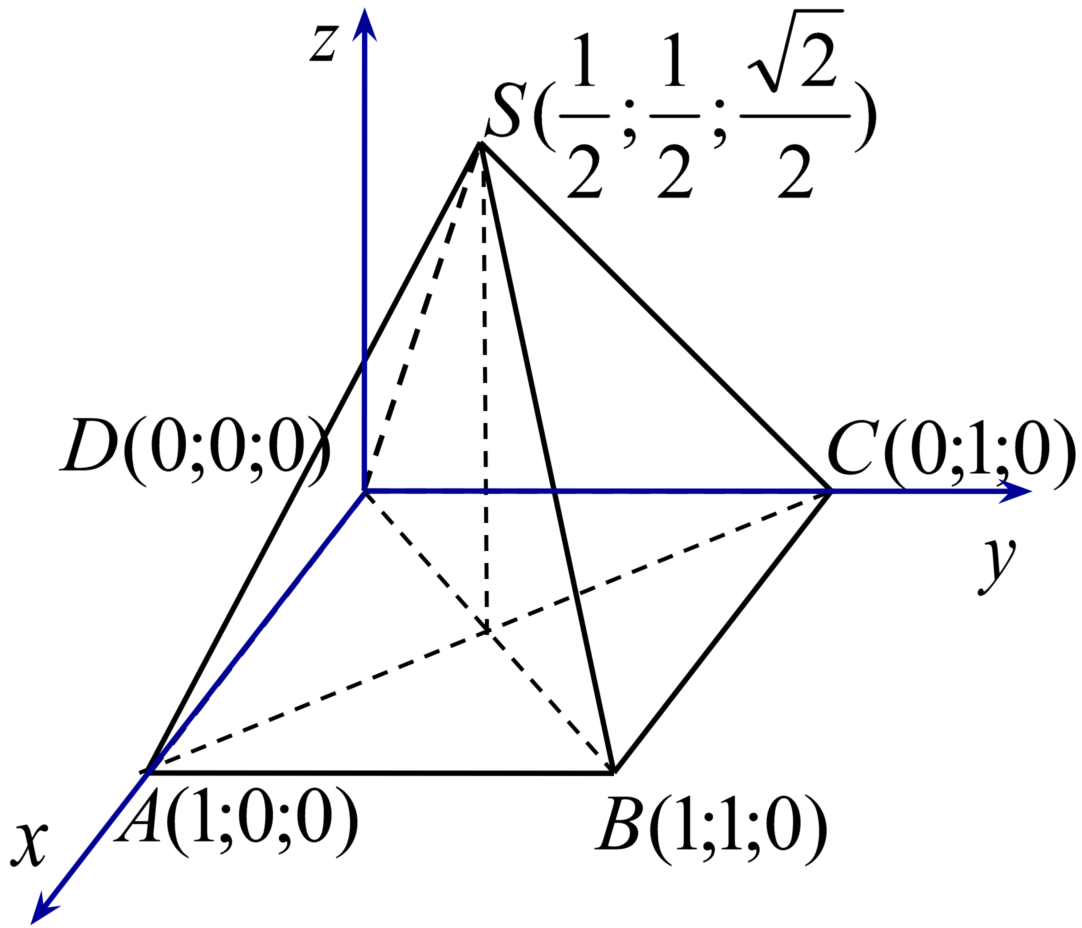
Решение.

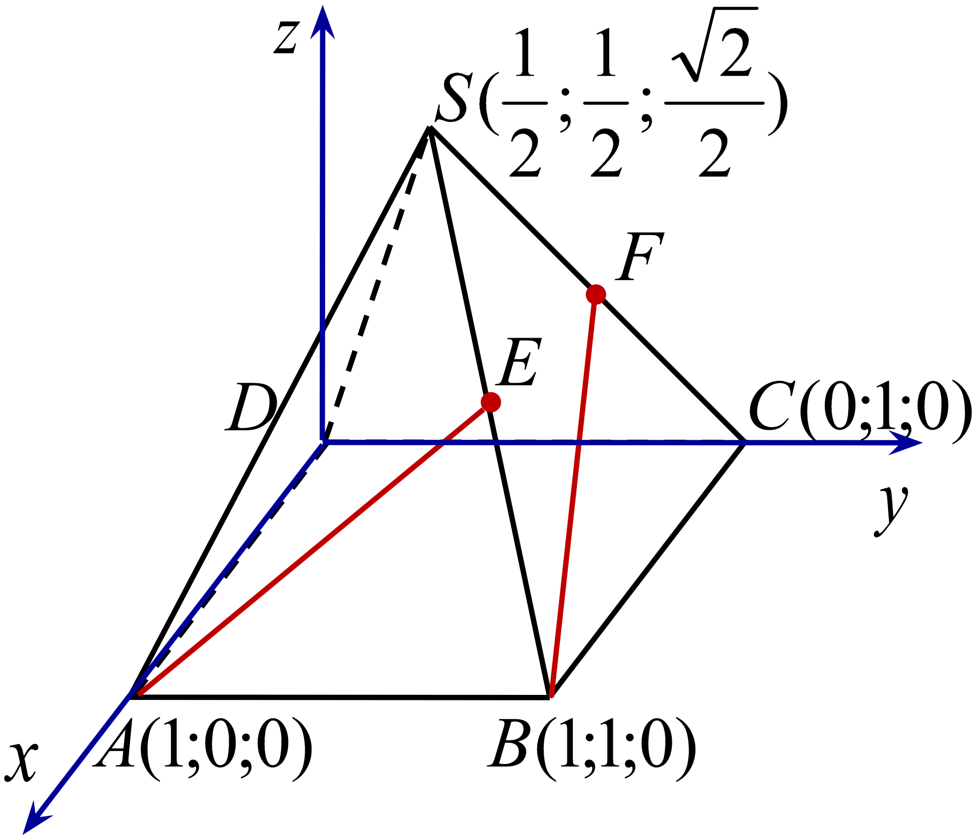
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$SO = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Координаты правильной четырехугольной пирамиды





Решение.

E- середина SB

$E(\frac{3}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$

F- середина SC

$F(\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4})$

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

$$\overrightarrow{AE}\left\{-\frac{1}{4};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\} \qquad \overrightarrow{BF}\left\{-\frac{3}{4};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

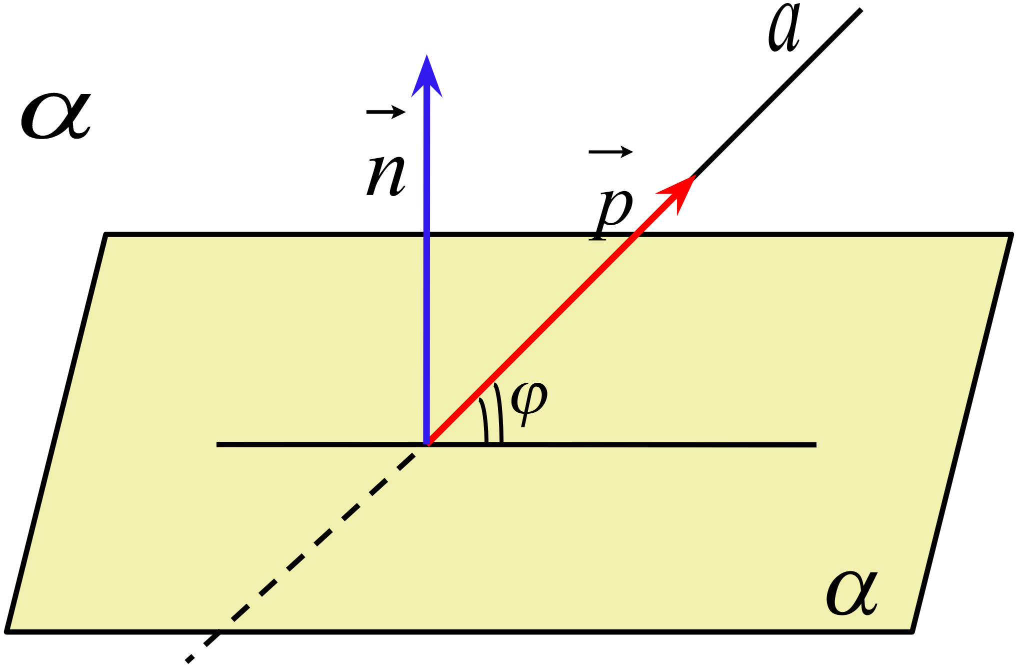
$$\cos\varphi=\frac{1}{6} \qquad \varphi=\arccos\frac{1}{6}$$

Угол между прямой и плоскостью

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ - *направляющий вектор прямой*

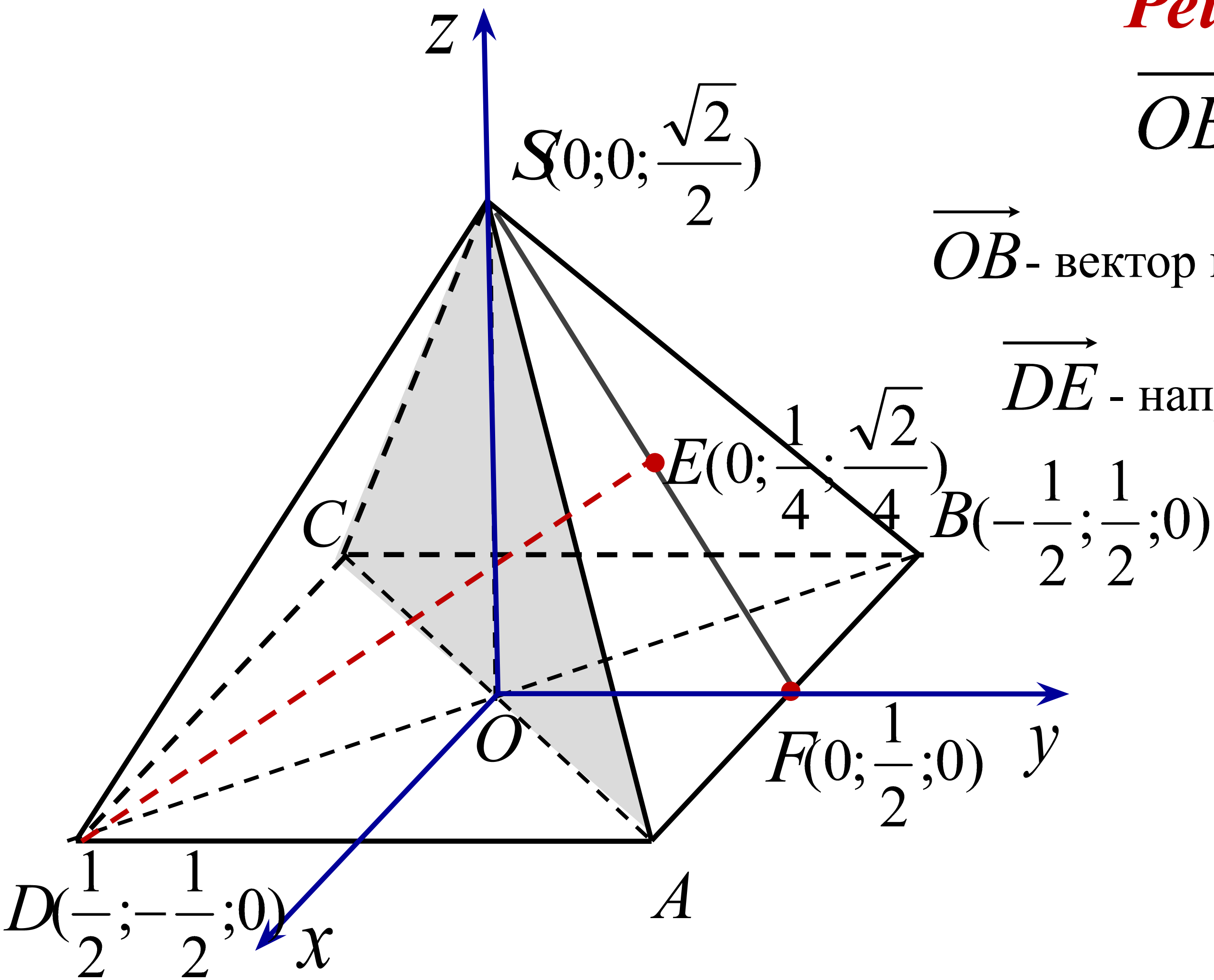
$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ - *нормальный вектор плоскости*

$\vec{n} \perp \alpha$



$$\sin\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 5 В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* , все ребра которой равны *1*, найдите угол между прямой *DE*, где *E*- середина апофемы *SF* грани *ASB* и плоскостью *ASC*



Решение.

$$\overrightarrow{OB} \perp ASC$$

$\overrightarrow{OB}$ - вектор нормали плоскости ASC

$\overrightarrow{DE}$ - направляющий вектор прямой

$$\overrightarrow{OB}\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\}$$

$$\overrightarrow{DE}\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

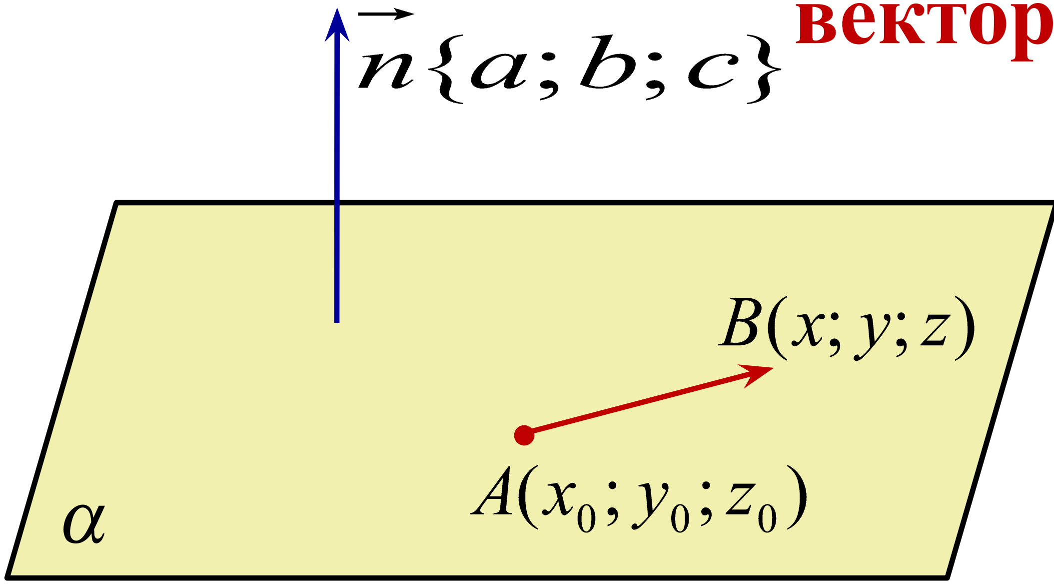
$\overrightarrow{OB}\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right\}$ - вектор нормали плоскости ASC

$\overrightarrow{DE}\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$ - направляющий вектор прямой DE

$$\sin\varphi=\frac{\left|\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

$$\sin\varphi=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{5}{\sqrt{30}} \qquad \varphi=\arcsin\frac{5}{\sqrt{30}}$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



$A(x_0;y_0;z_0) \in \alpha$

$\vec{n} \perp \alpha$

$\vec{n}\{a;b;c\}$-нормальный вектор плоскости

$B(x;y;z) \in \alpha$

$\Downarrow$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{AB}\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

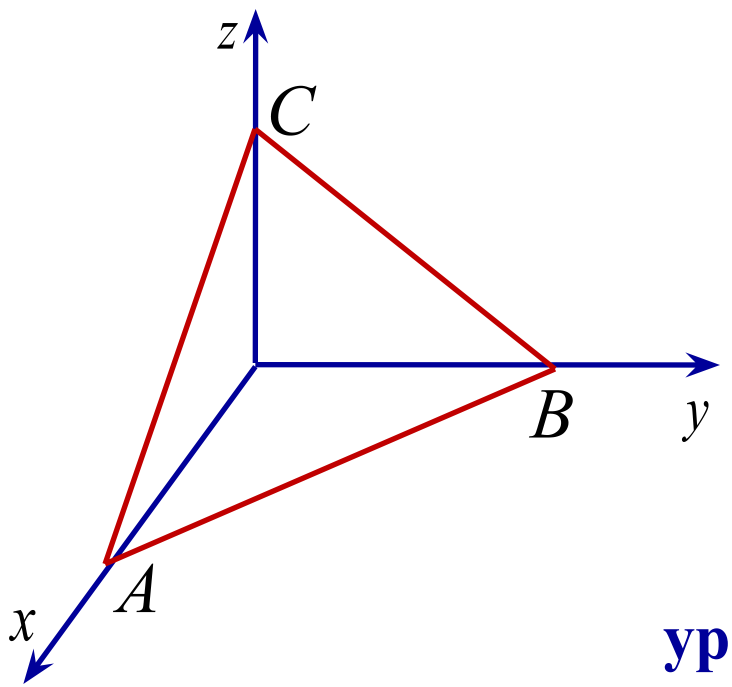
, где $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

Уравнение плоскости

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$, где $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

Если плоскость проходит через начало координат, то ***d=0***



Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\boxed{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1}$$

уравнение плоскости в отрезках

Задача 6 **Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(-2;3;5), B(4;-3;0), C(0;6;-5) и найти координаты вектора нормали.**

Решение.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

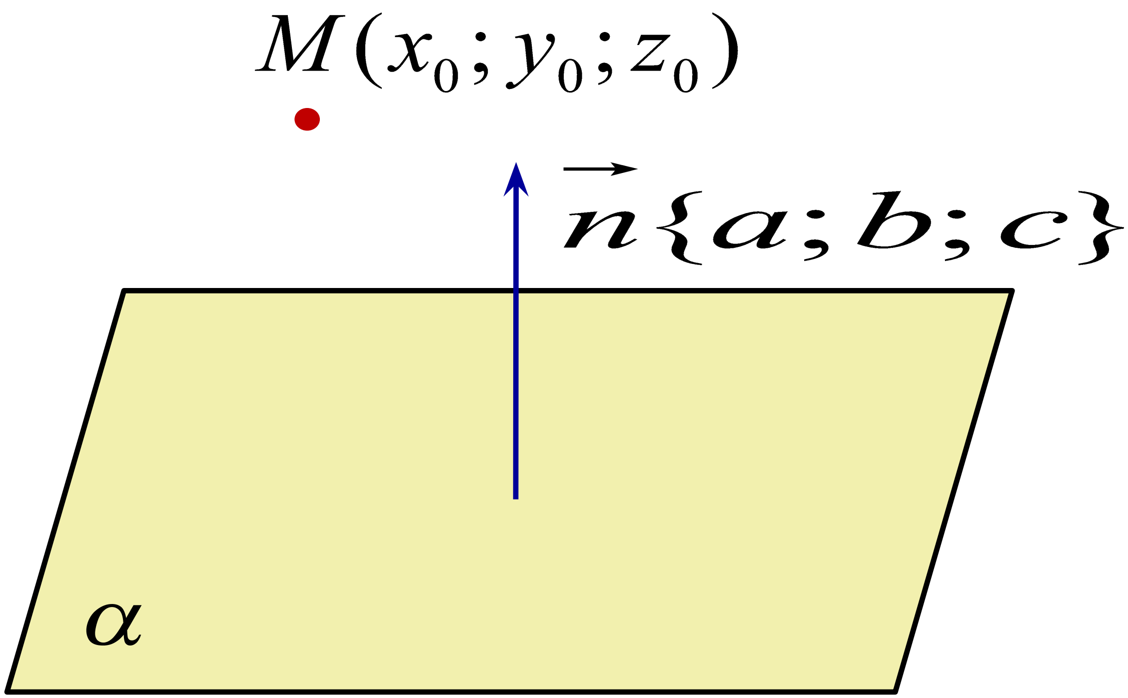
$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

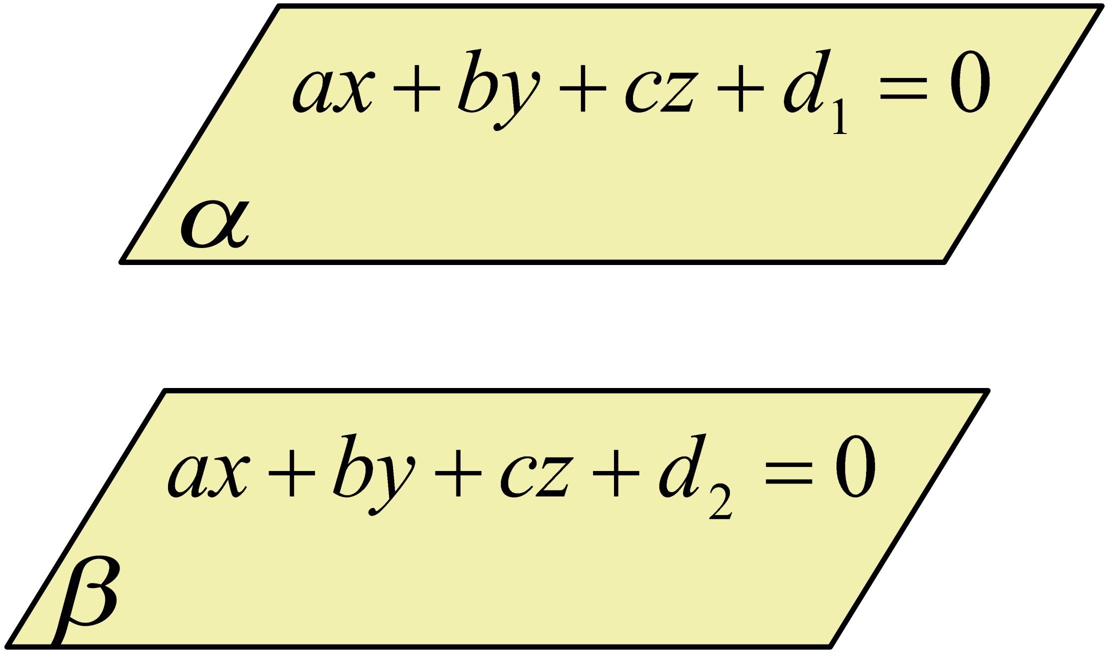
$$\vec{n}\{15;10;6\}$$

Расстояние от точки до плоскости



$$\rho(M,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Расстояние между параллельными плоскостями



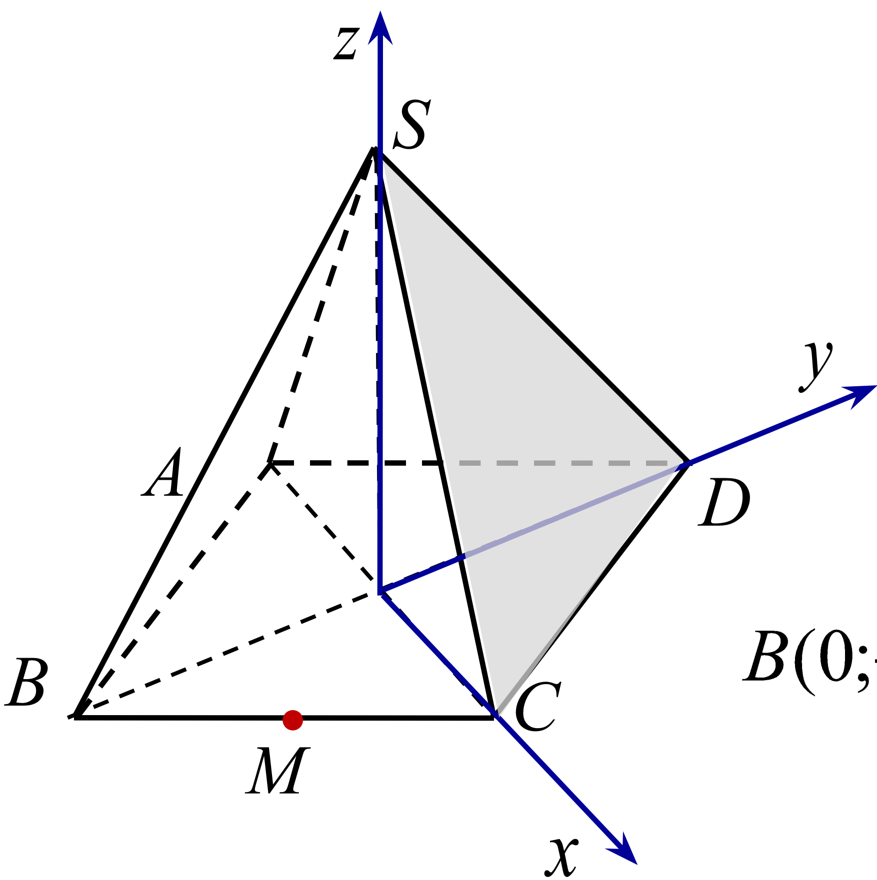
$$\alpha: \quad ax + by + cz + d_1 = 0$$

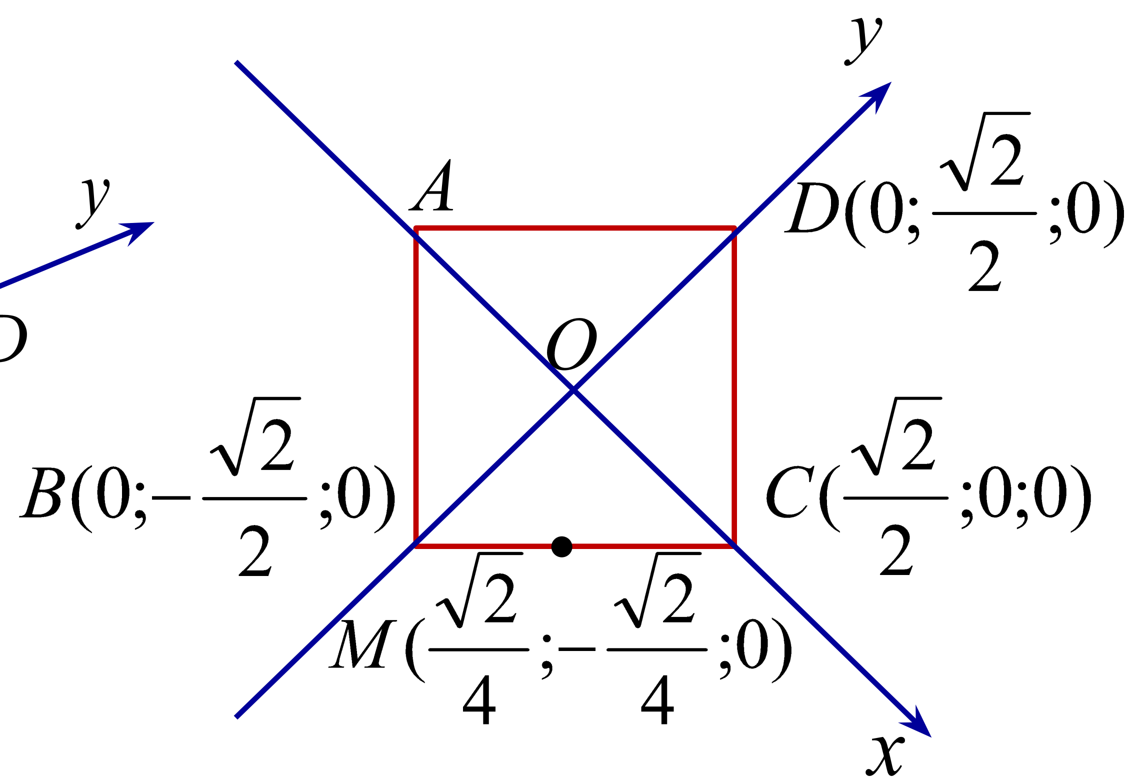
$$\beta: \quad ax + by + cz + d_2 = 0$$

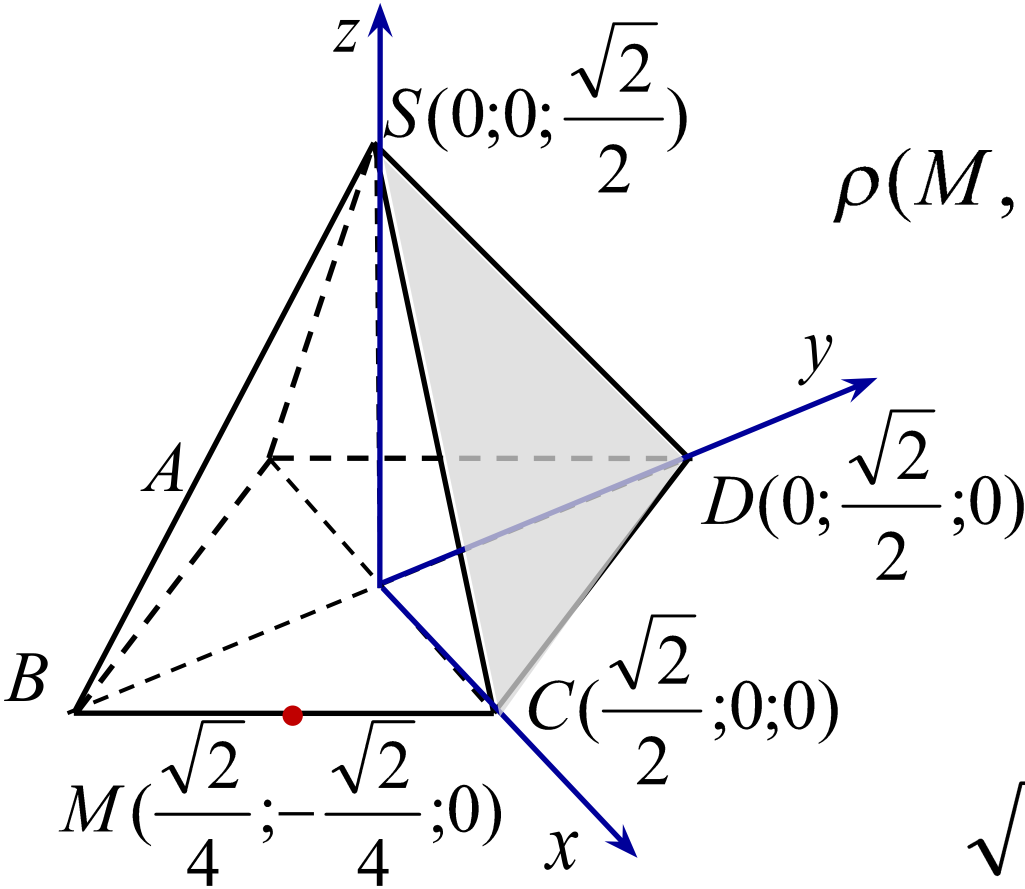
$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Задача 7 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от середины ребра BC до плоскости SCD

Решение.







Решение.

$$\rho(M,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}z-1=0$$

$$\rho(M,SCD)=\frac{\left|\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\sqrt{2}\cdot 0-1\right|}{\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Угол между плоскостями

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

Вектор нормали плоскости $\alpha : \overrightarrow{n_1}\{a_1; b_1; c_1\}$

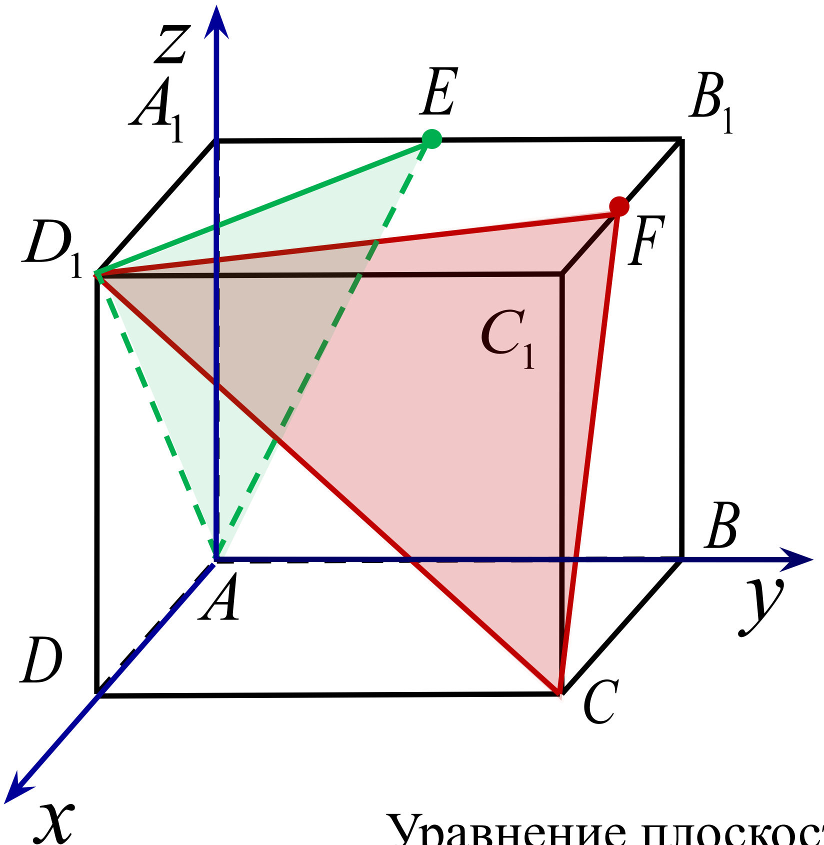
$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Вектор нормали плоскости $\beta : \overrightarrow{n_2}\{a_2; b_2; c_2\}$

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}}$$

Задача 8 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где E – середина ребра A_1B_1, а F – середина ребра B_1C_1

Решение.



$A(0;0;0)$ $D_1(1;0;1)$ $E(0;\frac{1}{2};1)$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}b + c + d = 0 \end{cases}$$

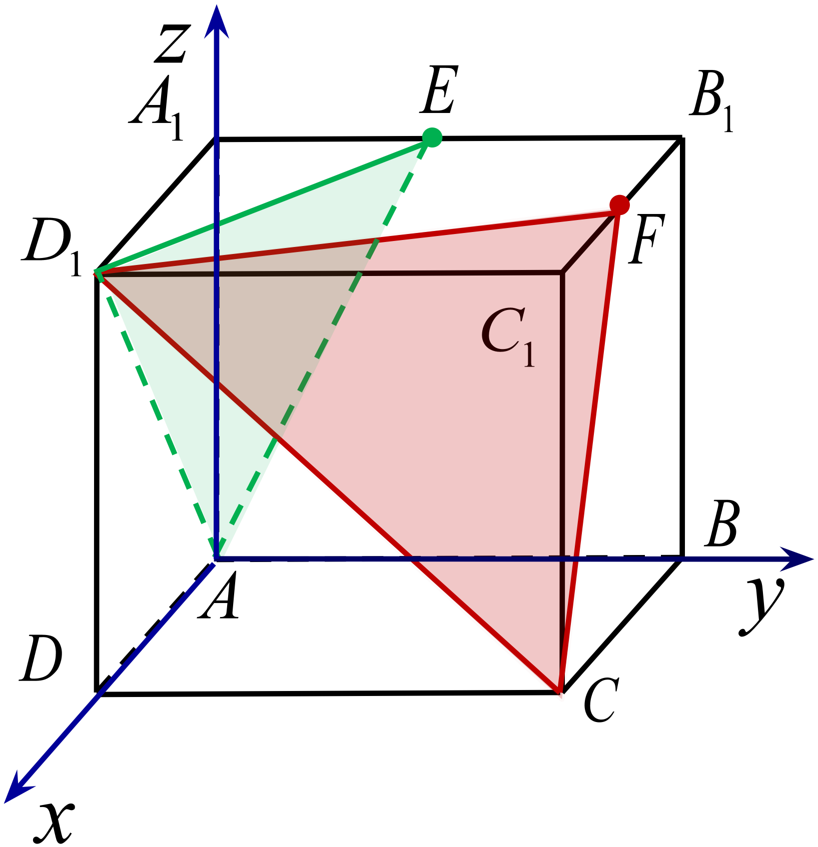
$c = -a$

$b = 2a$

$ax + 2ay - az = 0$

Уравнение плоскости AD_1E: $x + 2y - z = 0$

Вектор нормали плоскости AD_1E: $\overrightarrow{n_1}\{1;2;-1\}$



$$D_1(1;0;1) \qquad F(\frac{1}{2};1;1) \qquad C(1;1;0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

$$a = 2c \qquad b = c \qquad d = -3c$$

$$2cx + cy + cz - 3c = 0$$

Уравнение плоскости $D_1FC: \quad 2x + y + z - 3 = 0$

Вектор нормали плоскости $D_1FC: \quad \overrightarrow{n_2}\{2;1;1\}$

$$\cos\varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}}$$

$$\overrightarrow{n_1}\{1;2;-1\} \qquad \overrightarrow{n_2}\{2;1;1\}$$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$