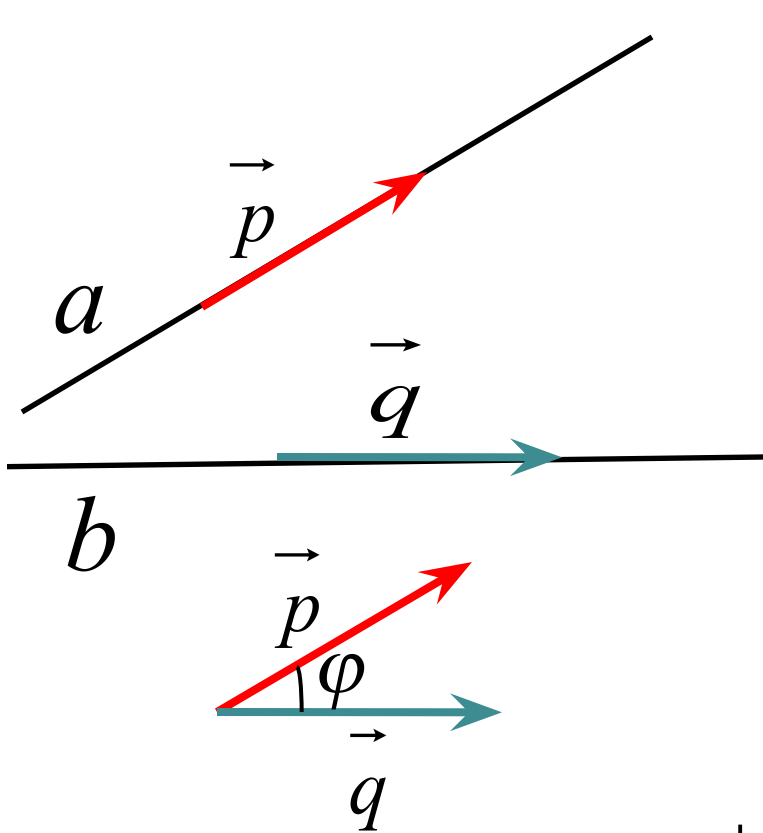


# Стереометрия

Метод координат в  
задачах С2

# Угол между прямыми



$\vec{p}$  - направляющий вектор прямой  $a$

$\vec{q}$  - направляющий вектор прямой  $b$

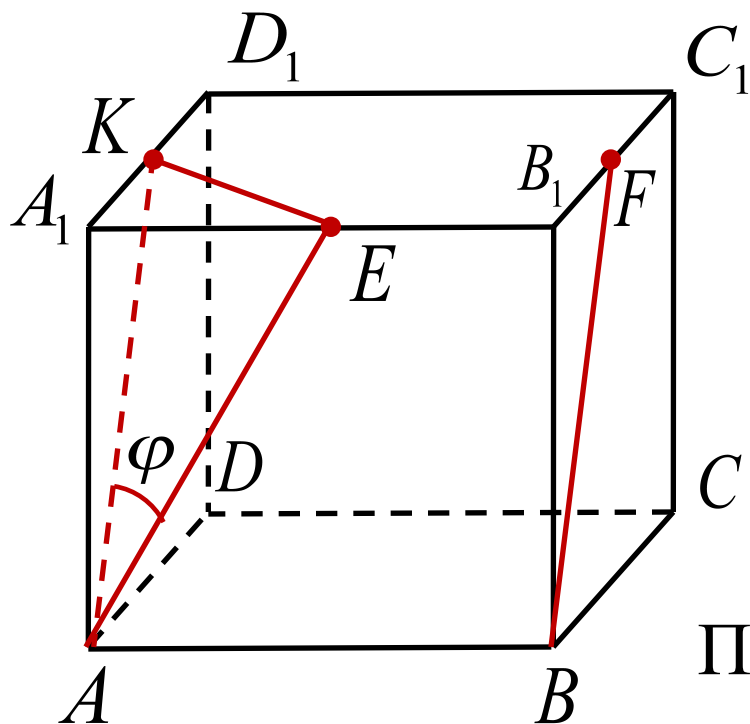
$\varphi$  - угол между прямыми

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

**Задача 1** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AE$  и  $BF$ , где  $E$  – середина ребра  $A_1B_1$ , а  $F$  – середина ребра  $B_1C_1$



**Решение (1 способ)**

$K$  - середина  $A_1D_1$

$AK \parallel BF$      $\angle KAE = \varphi$

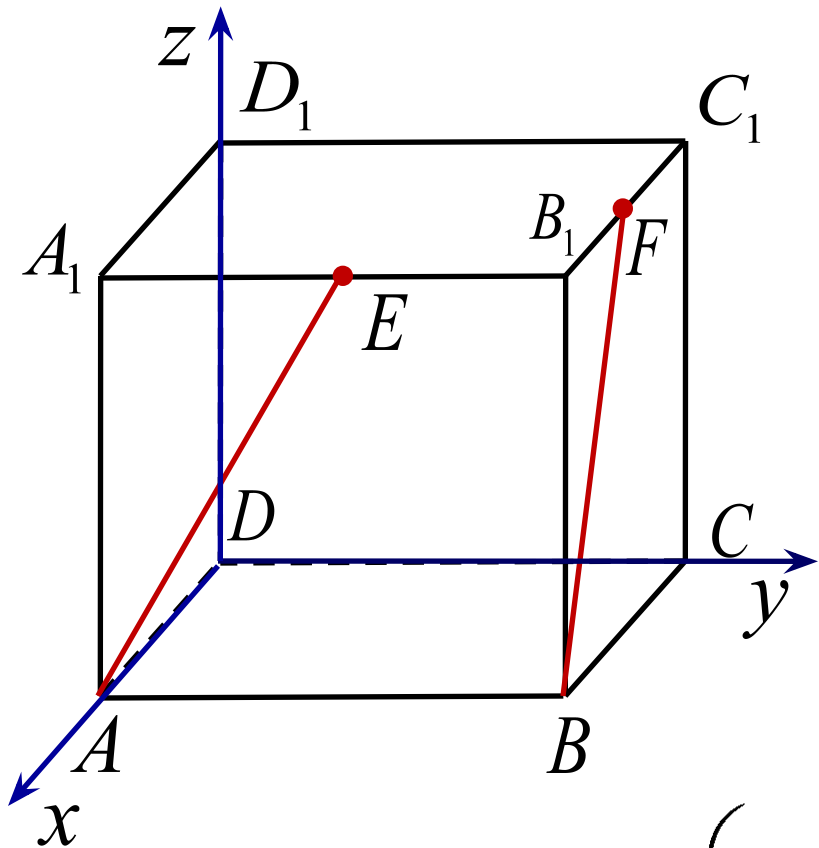
$$AE = AK = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

По теореме косинусов для  $\triangle AKE$

$$KE^2 = AE^2 + AK^2 - 2 \cdot AE \cdot AK \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 0,8 \quad \varphi = \arccos 0,8$$

*Решение (2 способ)*



$$A(1;0;0) \quad E\left(1;\frac{1}{2};1\right)$$

$$B(1;1;0) \quad F\left(\frac{1}{2};1;1\right)$$

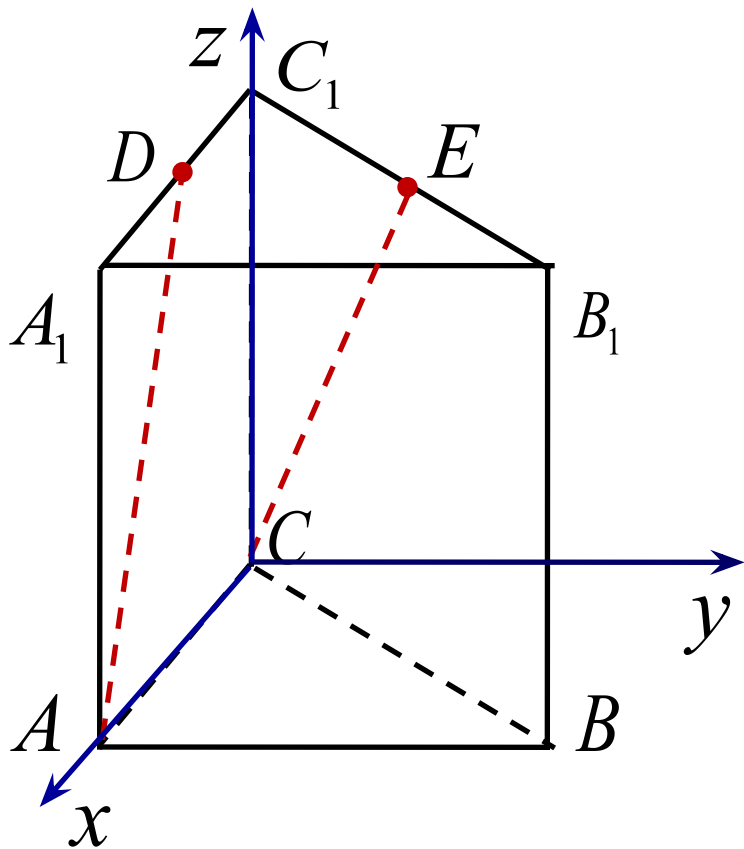
$$\overrightarrow{AE} \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

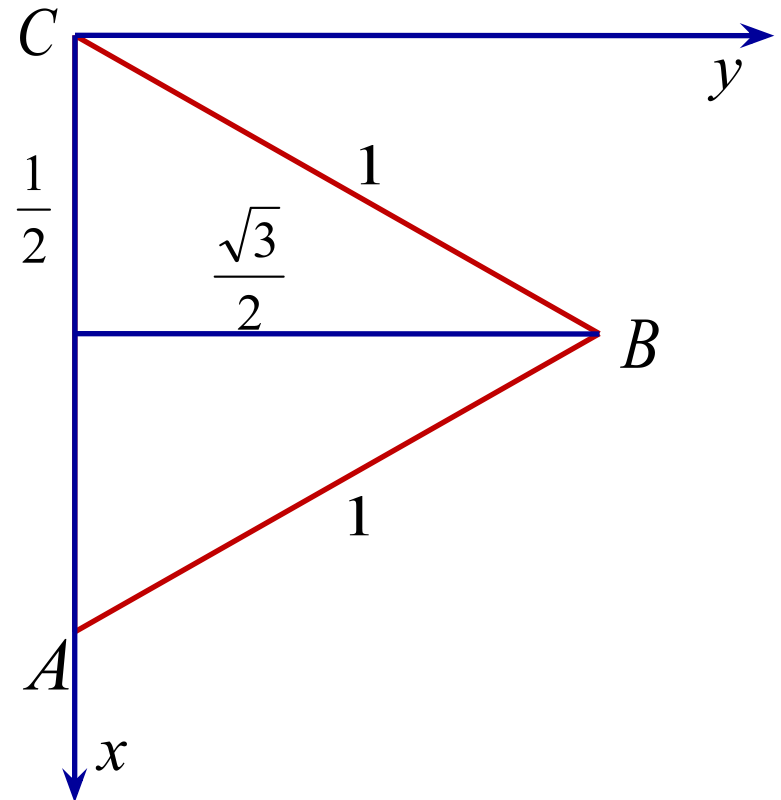
$$\left| 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 \right|$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}} = 0,8$$

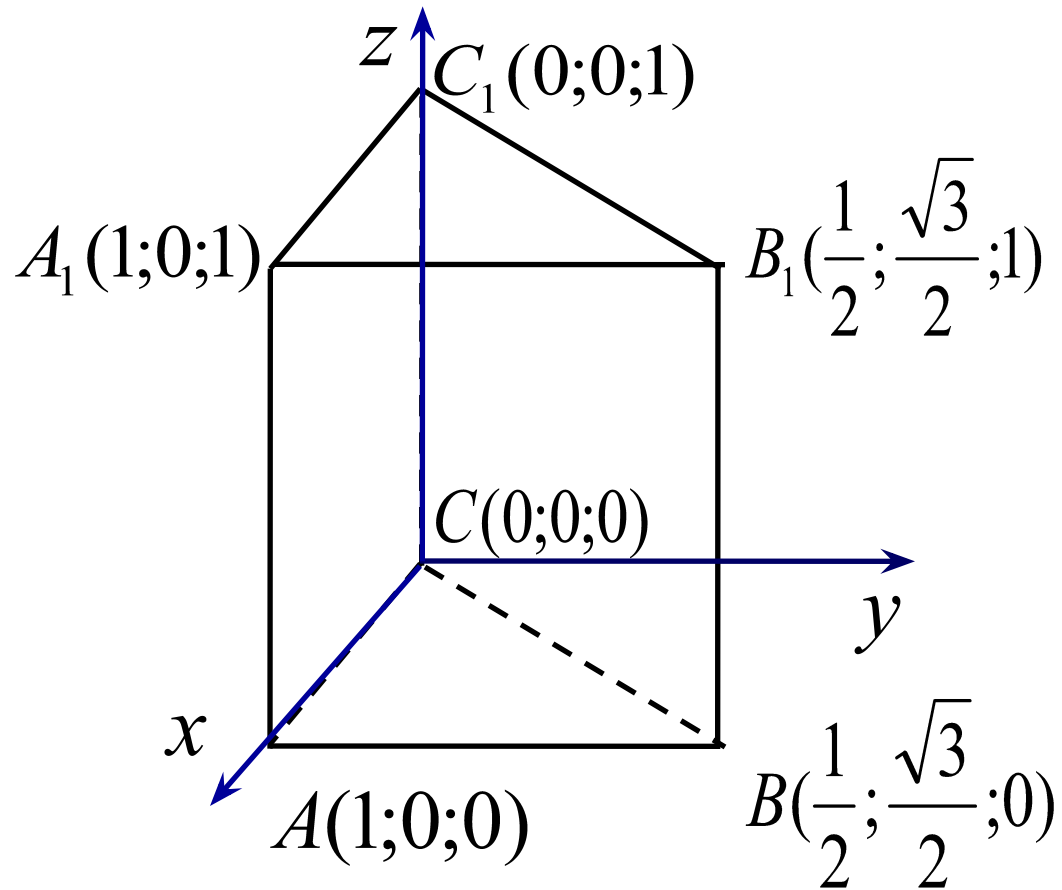
**Задача 2** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AD$  и  $CE$ , где  $D$  и  $E$  - соответственно середины ребер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$



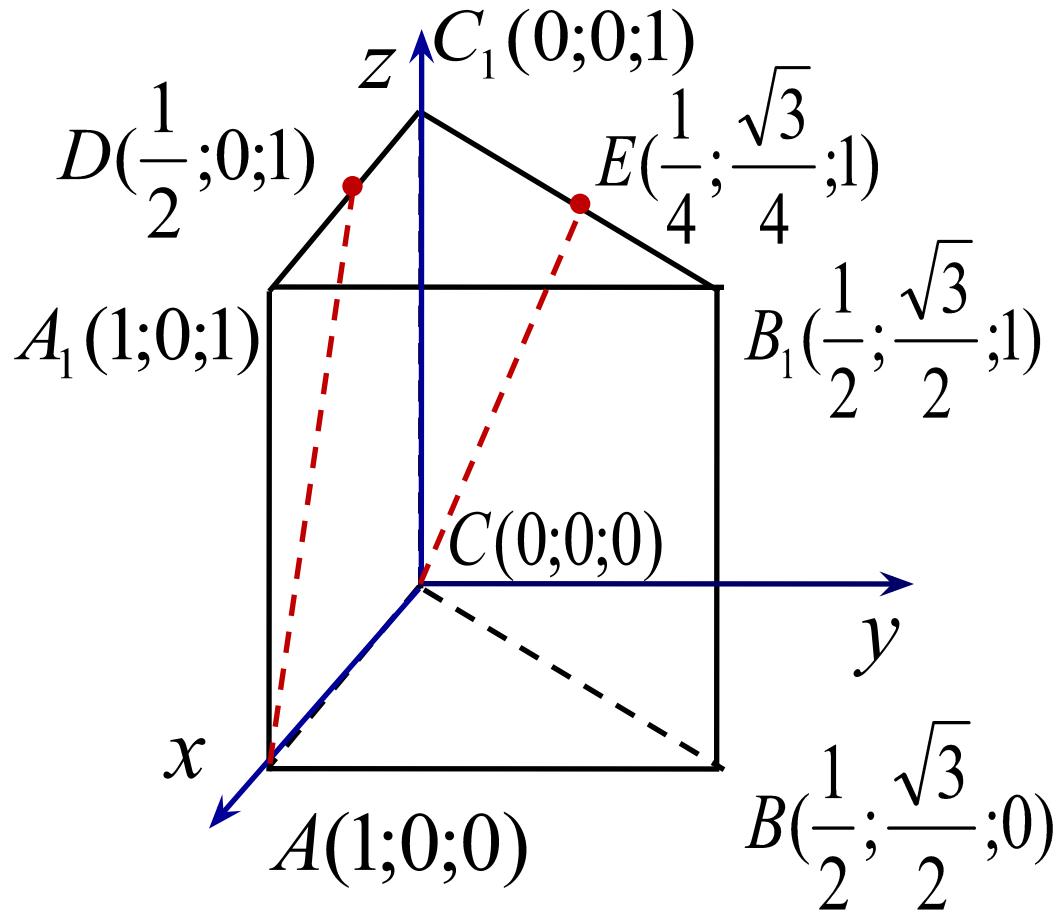
**Решение.**



# *Координаты правильной треугольной призмы*



*Решение.*



$$\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{CE} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \right\}$$

$$\overrightarrow{AD} \left\{ -\frac{1}{2}; 0; 1 \right\} \quad \overrightarrow{CE} \left\{ \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1 \right\}$$

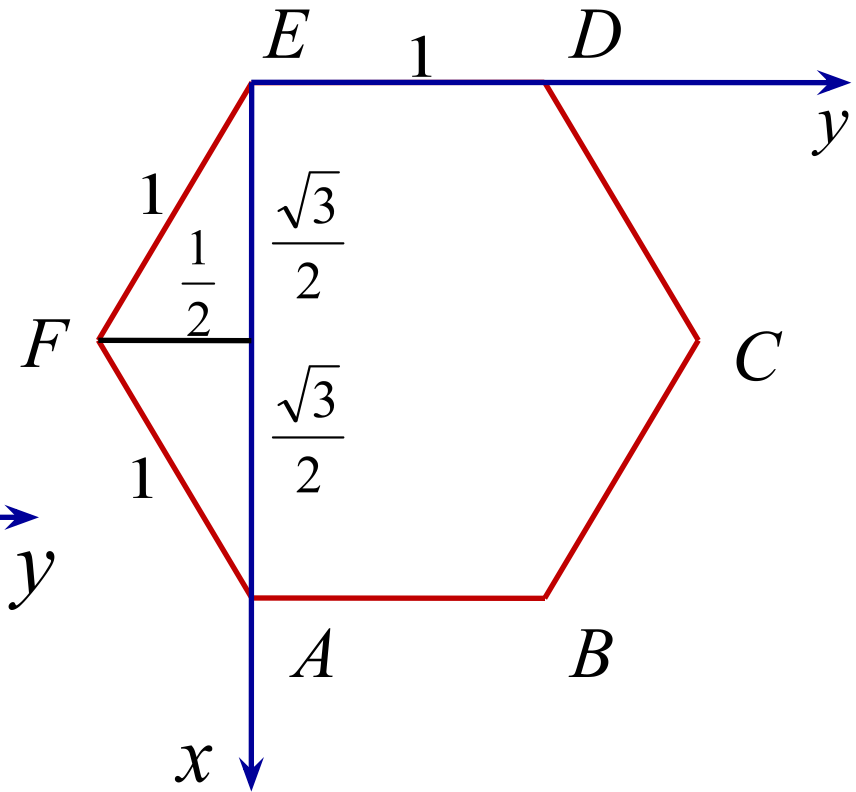
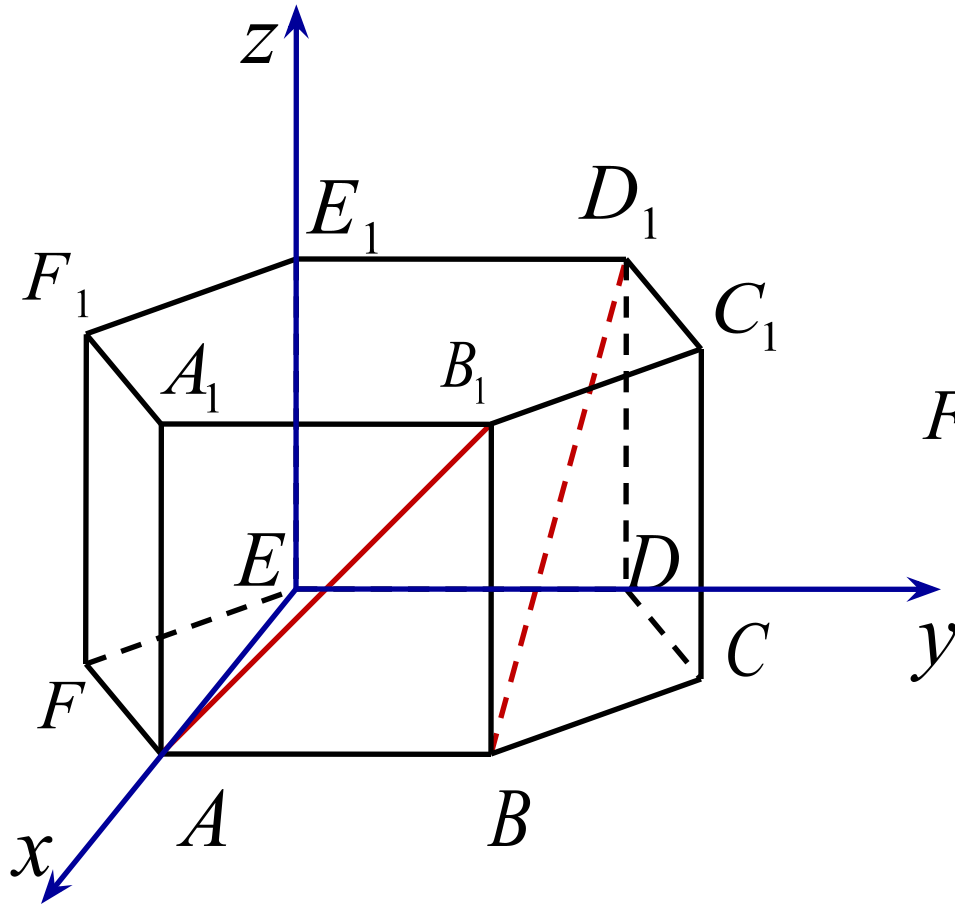
$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = 0,7$$

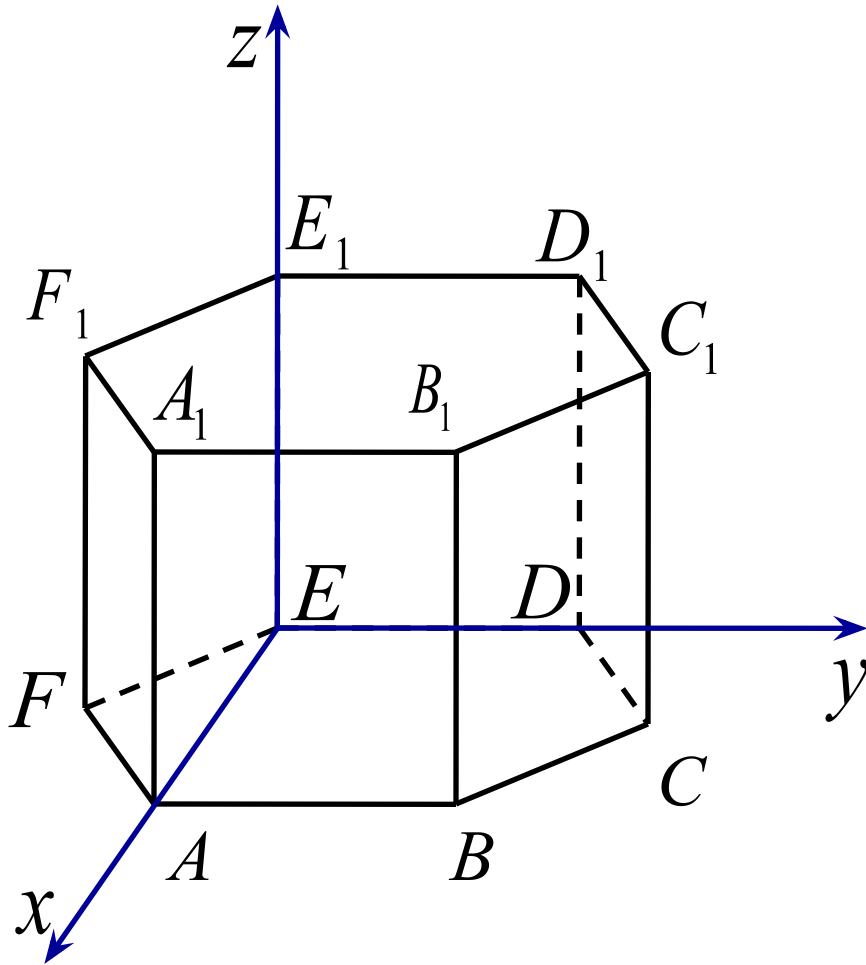


**Задача 3** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$  все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$

*Решение.*

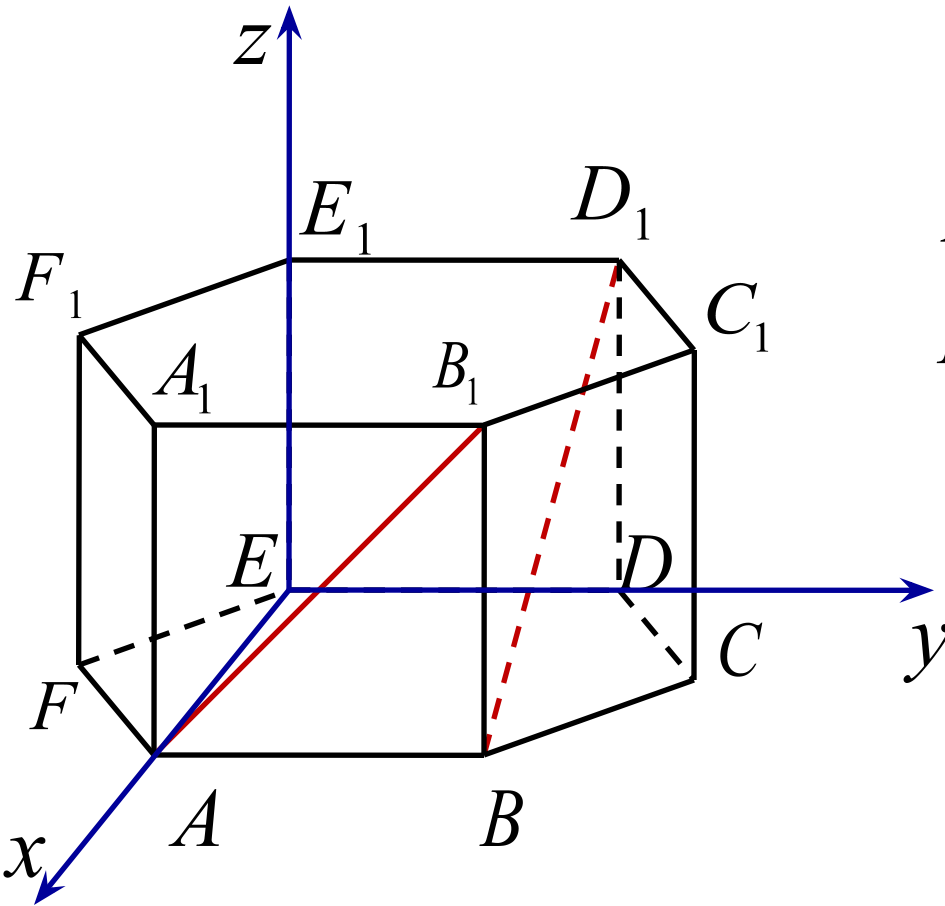


# Координаты правильной шестиугольной призмы



$E_1(0;0;1)$	$D_1(0;1;1)$
$F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right)$	$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1\right)$
$A_1(\sqrt{3};0;1)$	$B_1(\sqrt{3};1;1)$
$E(0;0;0)$	$D(0;1;0)$
$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$	$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};0\right)$
$A(\sqrt{3};0;0)$	$B(\sqrt{3};1;0)$

*Решение.*



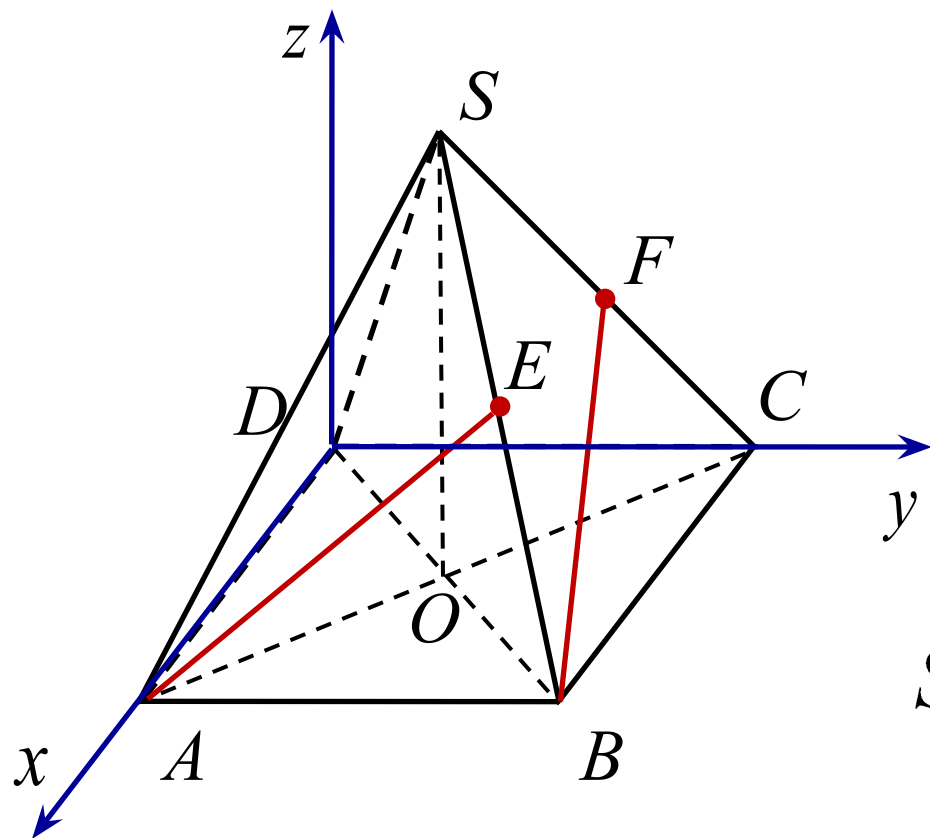
$$\begin{array}{ll} A(\sqrt{3};0;0) & B_1(\sqrt{3};1;1) \\ B(\sqrt{3};1;0) & D_1(0;1;1) \end{array}$$

$$\overrightarrow{AB_1} \{0;1;1\}$$

$$\overrightarrow{BD_1} \{-\sqrt{3};0;1\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Задача 4** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны  $1$ , отмечены точки  $E$  и  $F$  – середины сторон  $SB$  и  $SC$  соответственно. Найдите угол между прямыми  $AE$  и  $BF$ .



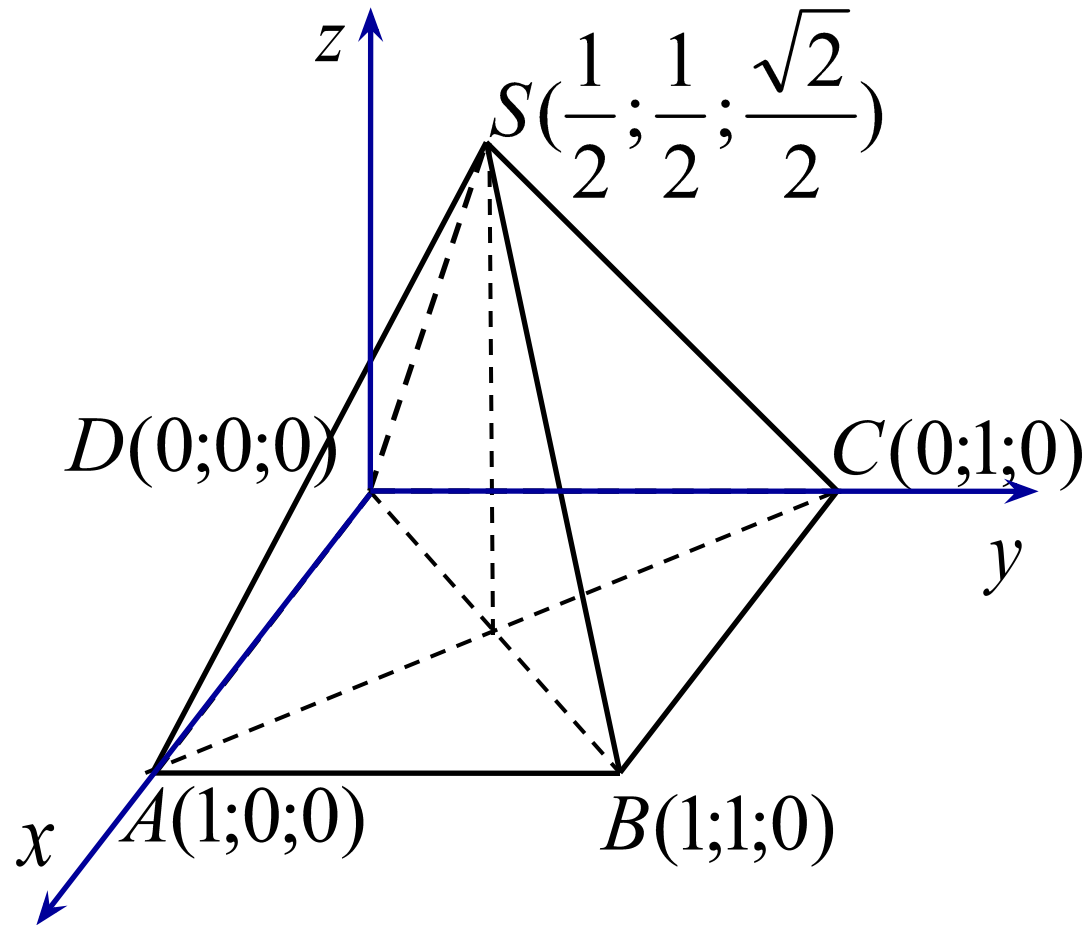
**Решение.**

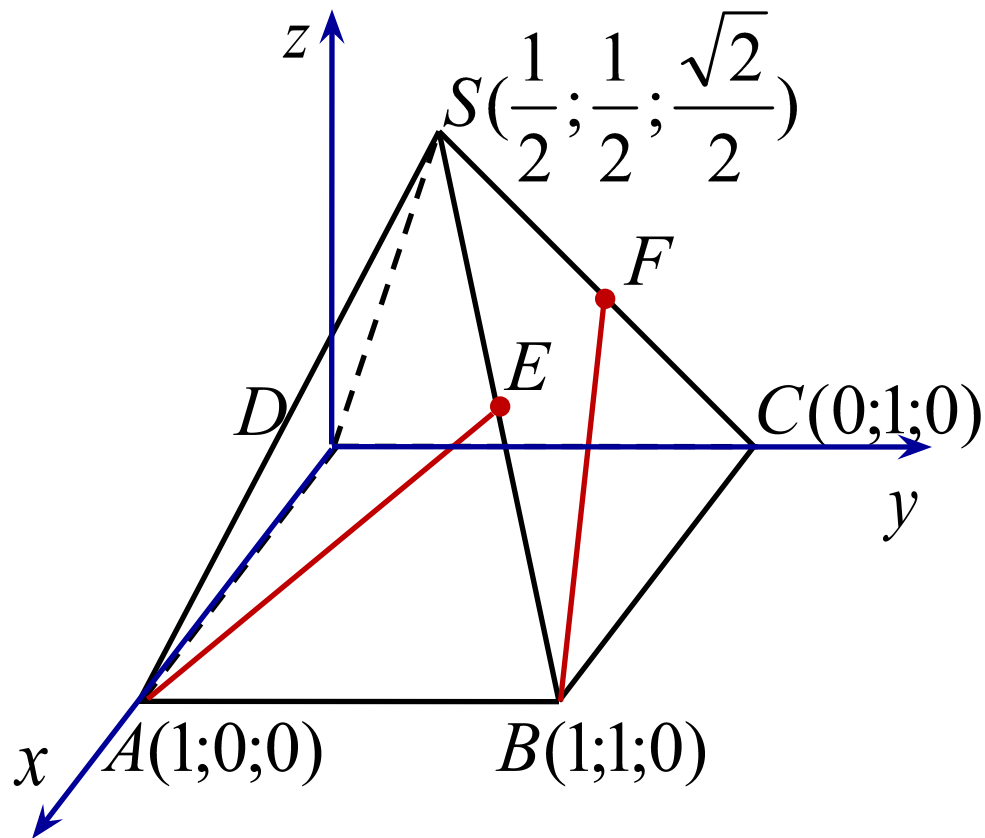
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$SO = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

# Координаты правильной четырехугольной пирамиды





***Решение.***

$E$ - середина  $SB$

$$E(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

$F$ - середина  $SC$

$$F(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\overrightarrow{AE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} \quad \overrightarrow{BF} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{6}$$

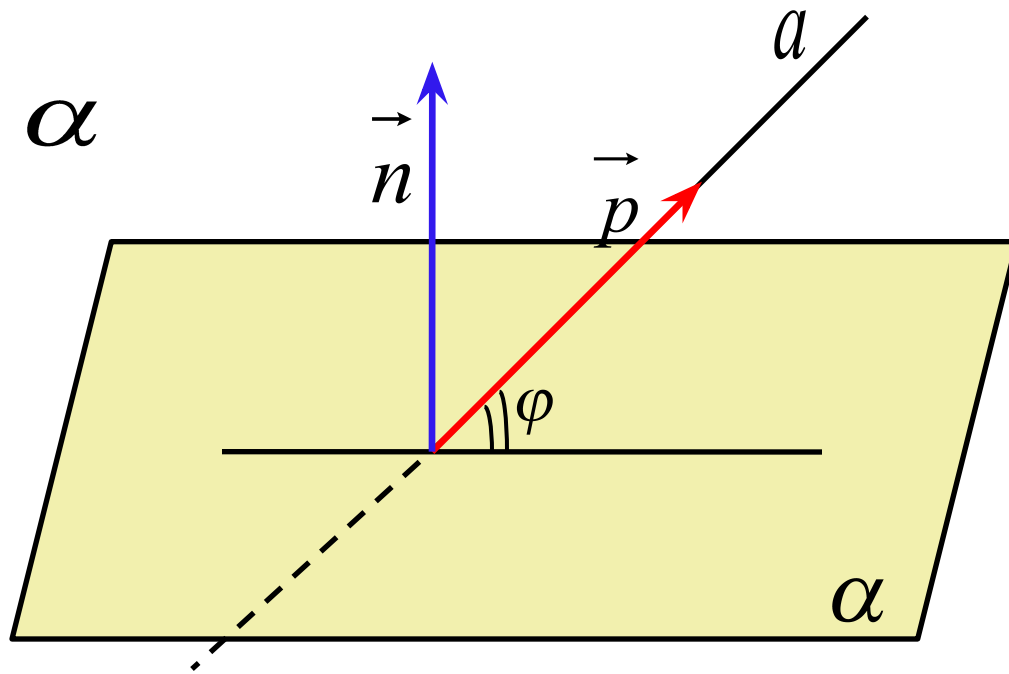
$$\varphi = \arccos \frac{1}{6}$$

# Угол между прямой и плоскостью

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$  - направляющий вектор прямой

$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$  - нормальный вектор плоскости

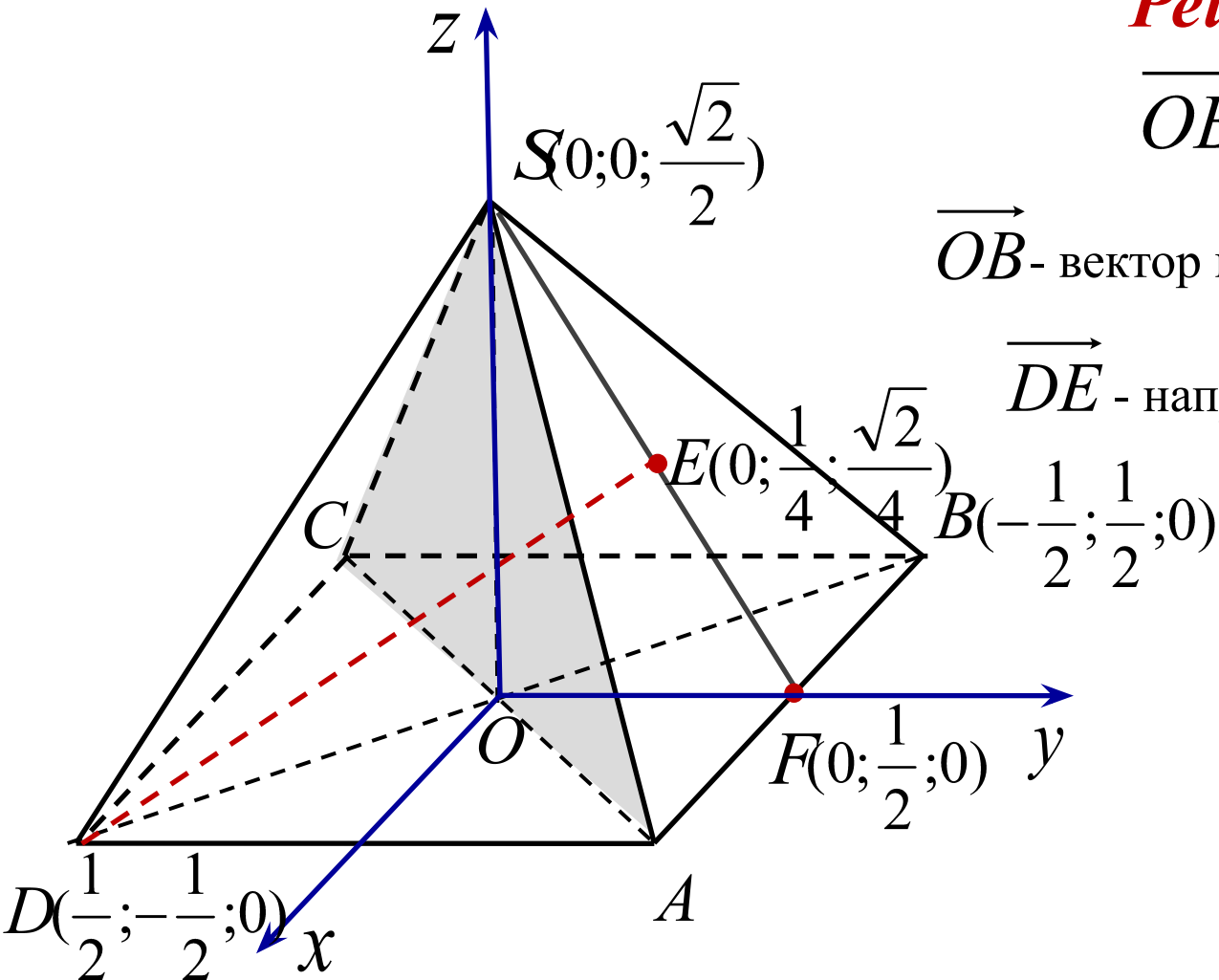
$$\vec{n} \perp \alpha$$



$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



**Задача 5** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны  $1$ , найдите угол между прямой  $DE$ , где  $E$  - середина апофемы  $SF$  грани  $ASB$  и плоскостью  $ASC$



**Решение.**

$$\vec{OB} \perp ASC$$

$\vec{OB}$  - вектор нормали плоскости  $ASC$

$\vec{DE}$  - направляющий вектор прямой

$$\vec{OB} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$\vec{DE} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

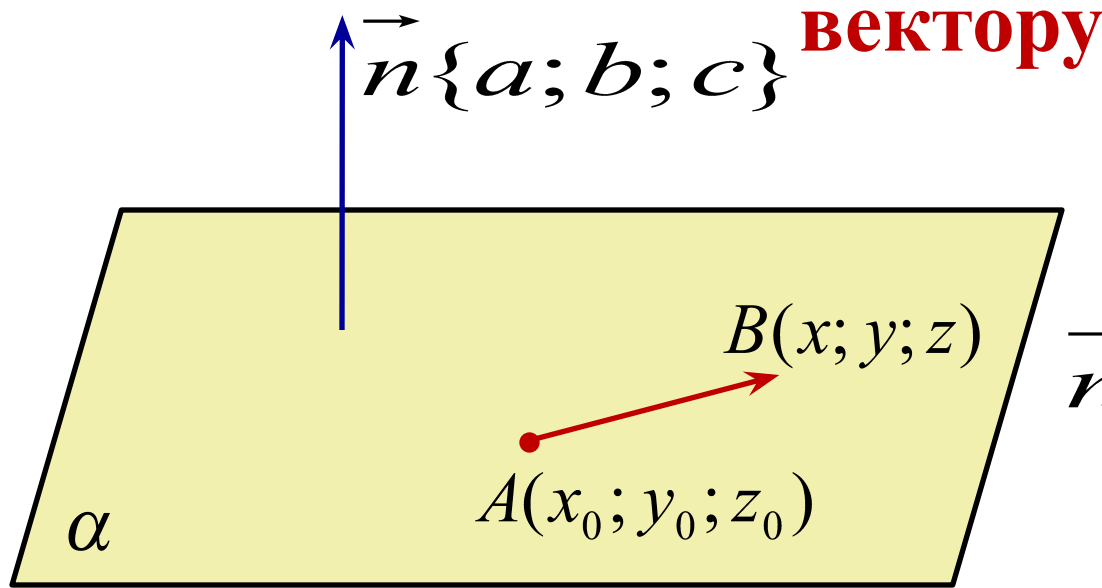
$\overrightarrow{OB} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\}$  - вектор нормали плоскости  $ASC$

$\overrightarrow{DE} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$  - направляющий вектор прямой  $DE$

$$\sin \varphi = \frac{\left| \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left( -\frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left( -\frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{3}{4} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{5}{\sqrt{30}} \quad \varphi = \arcsin \frac{5}{\sqrt{30}}$$

# Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному



$$A(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$$

$$\vec{n} \perp \alpha$$

$\vec{n}\{a; b; c\}$  нормальный  
вектор плоскости

$$B(x; y; z) \in \alpha$$

$$\vec{AB}\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

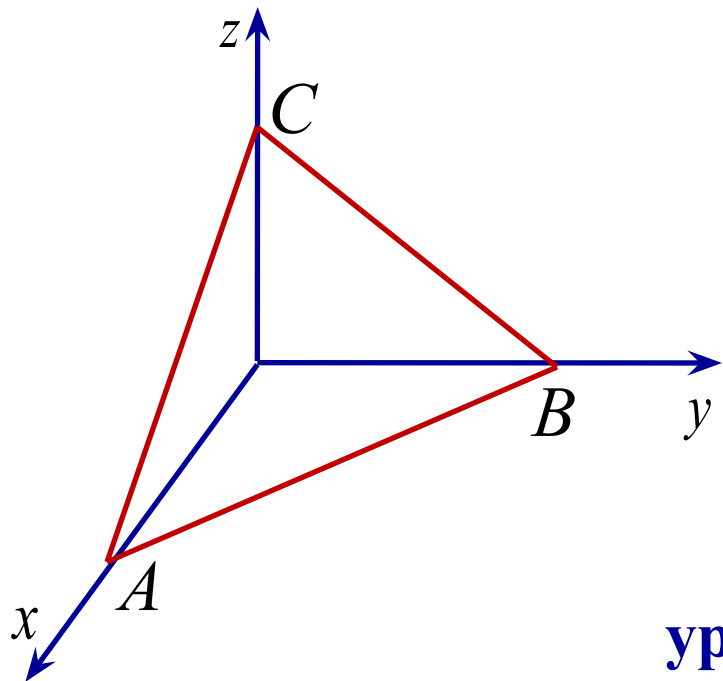
, где  $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

# Уравнение плоскости

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ где } d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Если плоскость проходит через начало координат, то  $d=0$



Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

**уравнение плоскости в отрезках**

**Задача 6** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-2;3;5)$ ,  $B(4;-3;0)$ ,  $C(0;6;-5)$  и найти координаты вектора нормали.

*Решение.*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

$$d = 5c - 6b$$

$$\begin{cases} -2a - 3b + 10c = 0 \\ 4a - 9b + 5c = 0 \end{cases}$$

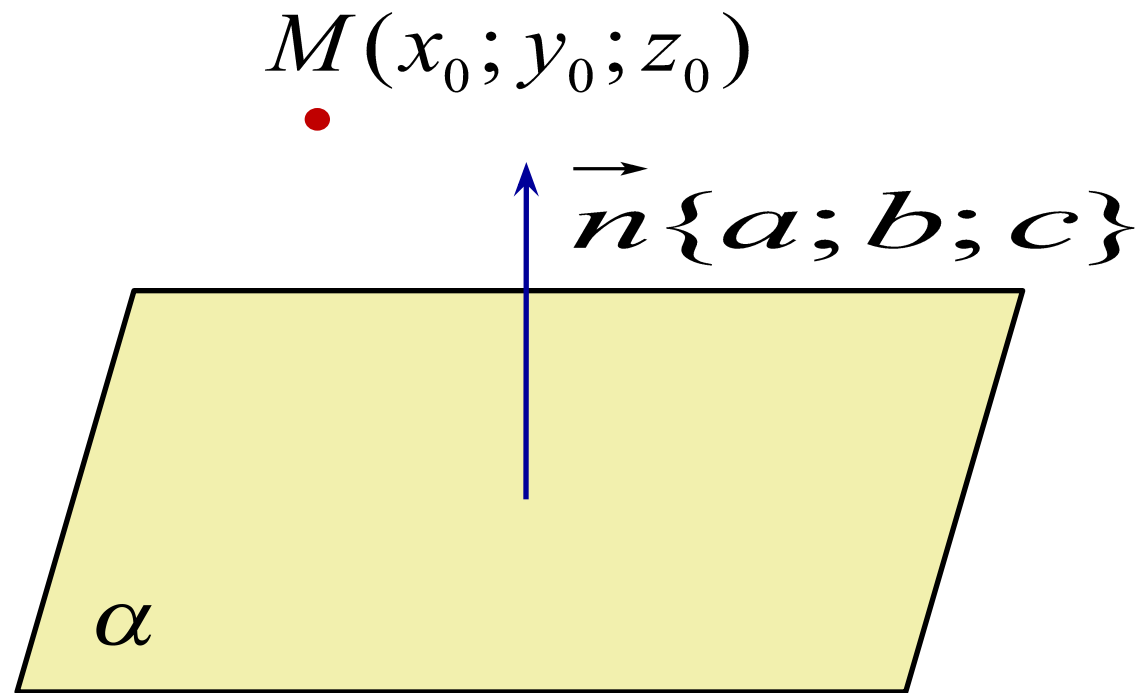
$$a = \frac{5}{2}c, b = \frac{5}{3}c, d = -5c$$

$$\frac{5}{2}cx + \frac{5}{3}cy + cz - 5c = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

$$\vec{n} \{15; 10; 6\}$$

# Расстояние от точки до плоскости



$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

# Расстояние между параллельными плоскостями

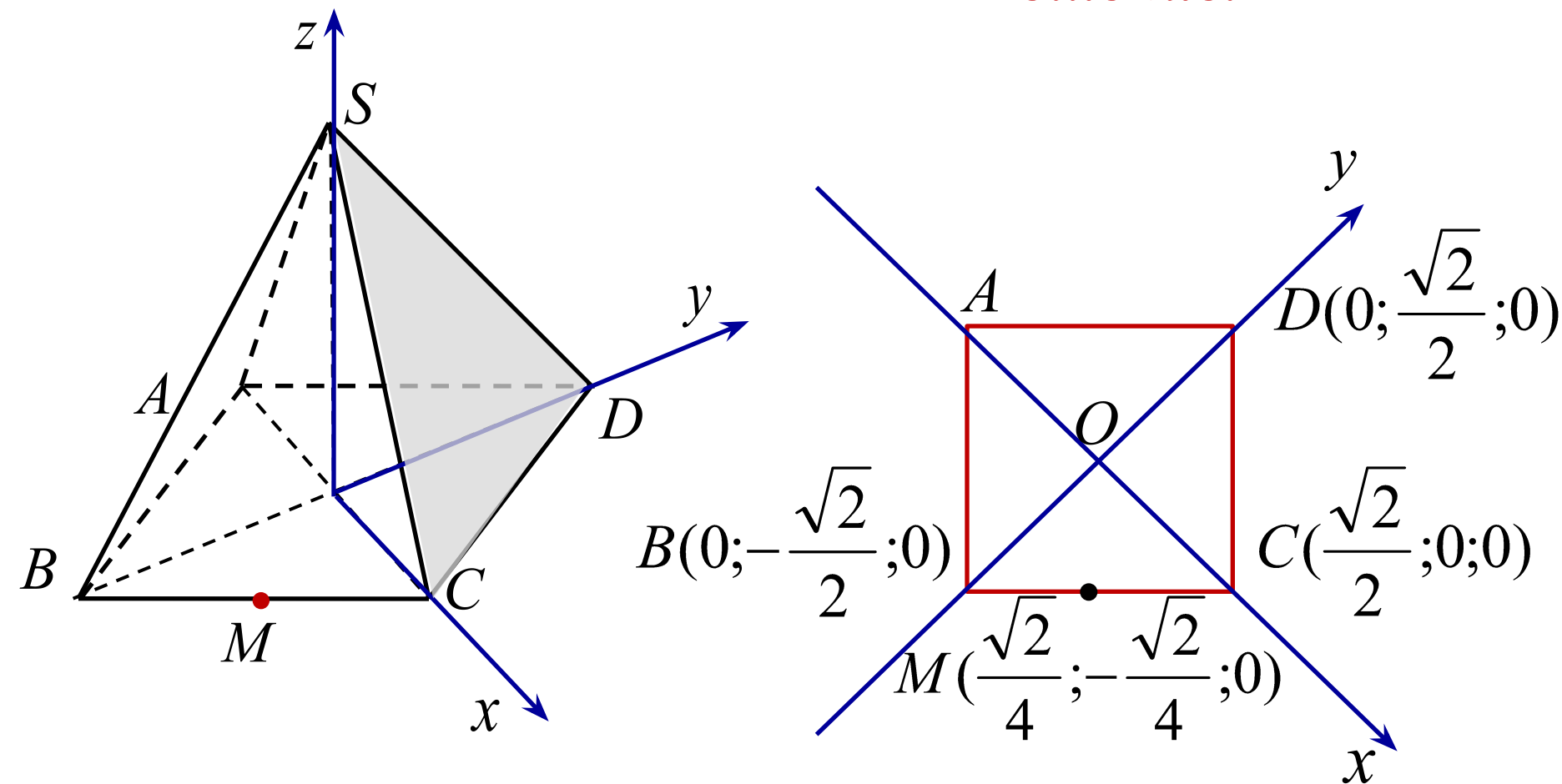
$$\alpha \quad ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$\beta \quad ax + by + cz + d_2 = 0$$

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

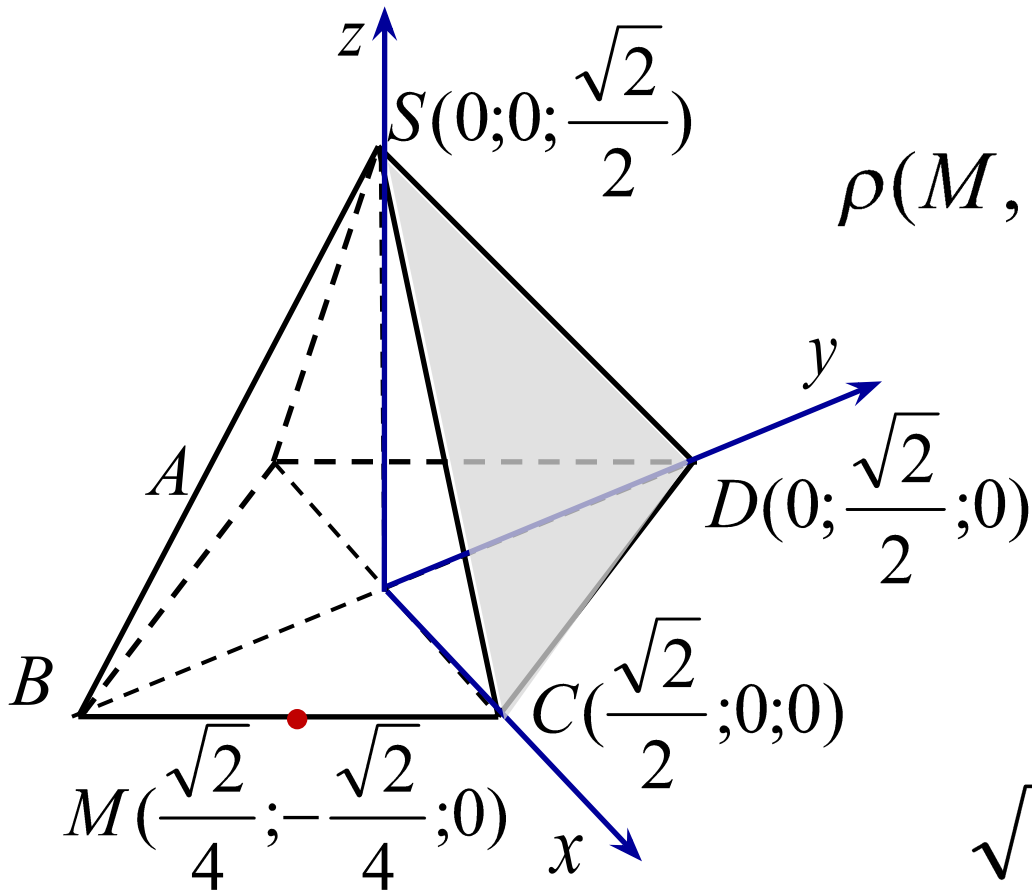
**Задача 7** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны  $1$ , найдите расстояние от середины ребра  $BC$  до плоскости  $SCD$

**Решение.**





**Решение.**



$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 1 = 0$$

$$\rho(M, SCD) = \frac{|\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \sqrt{2} \cdot 0 - 1|}{\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

# Угол между плоскостями

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

Вектор нормали плоскости  $\alpha$  :  $\vec{n}_1 \{a_1; b_1; c_1\}$

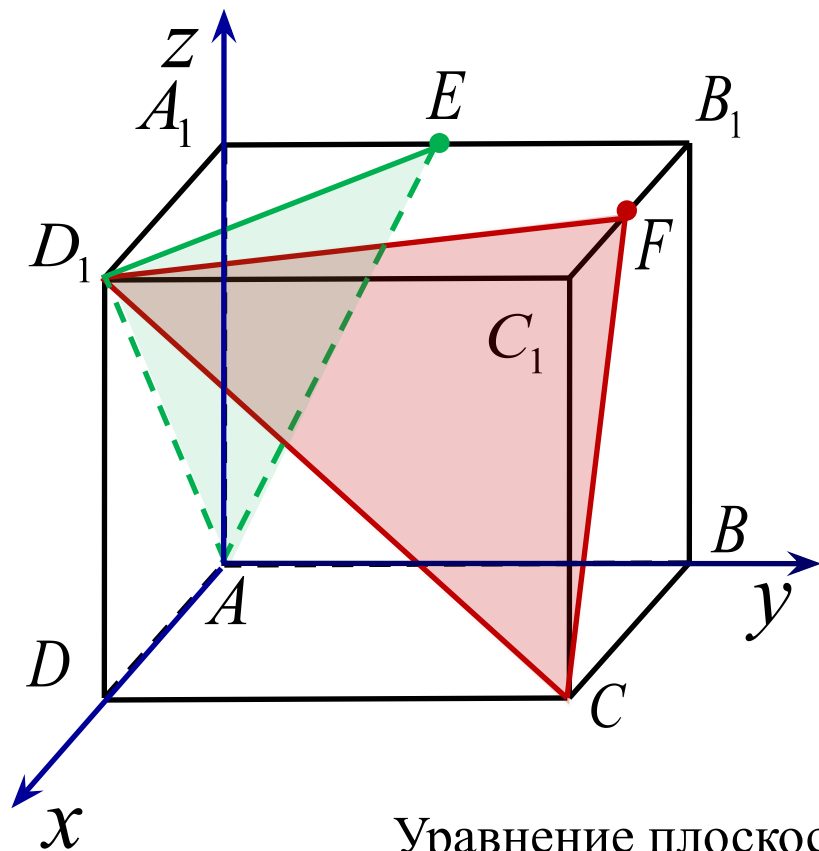
$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Вектор нормали плоскости  $\beta$  :  $\vec{n}_2 \{a_2; b_2; c_2\}$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

**Задача 8** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $AD_1E$  и  $D_1FC$ , где  $E$  – середина ребра  $A_1B_1$ , а  $F$  – середина ребра  $B_1C_1$

**Решение.**



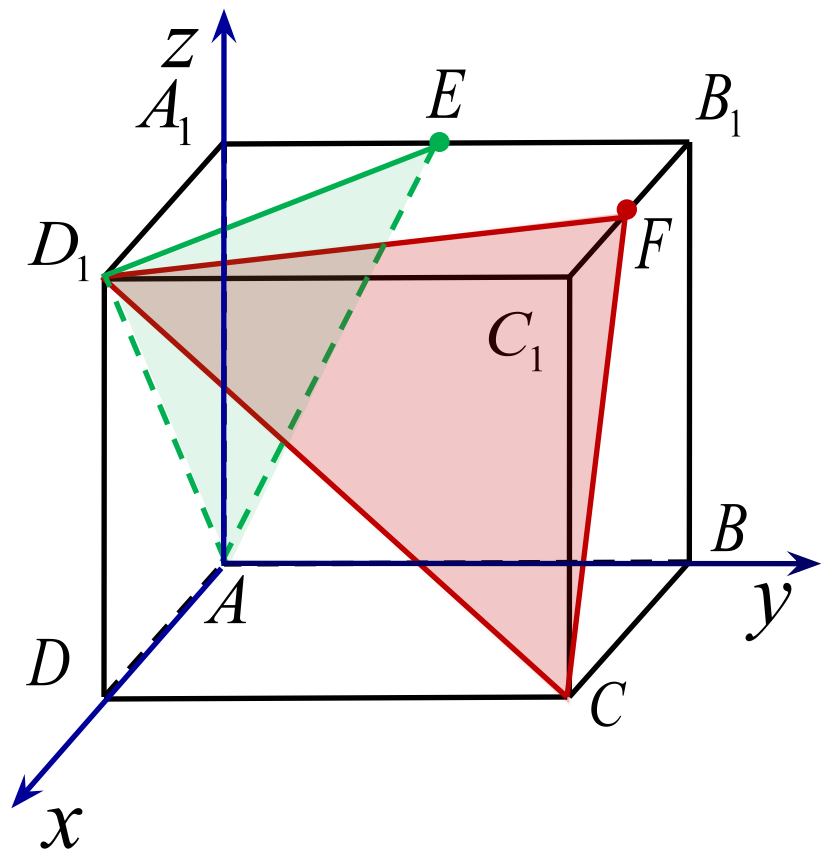
$$A(0;0;0) \quad D_1(1;0;1) \quad E\left(0;\frac{1}{2};1\right)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} d = 0 & c = -a \\ a + c + d = 0 & b = 2a \\ \frac{1}{2}b + c + d = 0 & ax + 2ay - az = 0 \end{cases}$$

Уравнение плоскости  $AD_1E$ :  $x + 2y - z = 0$

Вектор нормали плоскости  $AD_1E$ :  $\vec{n}_1 \{1; 2; -1\}$



$$D_1(1;0;1) \quad F\left(\frac{1}{2};1;1\right) \quad C(1;1;0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$$

$$a = 2c \quad b = c \quad d = -3c$$

$$2cx + cy + cz - 3c = 0$$

Уравнение плоскости  $D_1FC$ :  $2x + y + z - 3 = 0$

Вектор нормали плоскости  $D_1FC$ :  $\vec{n}_2 \{2;1;1\}$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\vec{n}_1 \{1; 2; -1\} \quad \vec{n}_2 \{2; 1; 1\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$