Кафедра математики и моделирования
Старшие преподаватели Е.Д. Емцева и Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 16

Тема: Метод математической индукции.

Цель: Научиться применять ММИ при доказательстве утверждений, свойств.

Введение

- Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной.
- Один из наиболее распространенных методов доказательств истинности таких предложений является

метод математической индукции

Введение

- Вспомним знаменитого Шерлока Холмса. Какой метод рассуждения применялся им при расследовании дел?
- Правильно, метод дедукции – метод рассуждения, при котором новое положение выводится логическим путем от общих положений к частным выводам.
- А какой метод рассуждений является противоположным дедукции?
- Верно, индукция – способ рассуждения от частных положений к общим выводам.

«Это невозможно!»- скажешь ты, вспомнив тему сегодняшнего урока. Математикам не свойственно делать общие выводы на основании частных случаев. Не спеши огорчаться, математики придумали свою индукцию – математическую, которая не уступает в строгости другим математическим методам.

Метод математической индукции

- Метод математической индукции (ММИ)
- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной n, если выполняются следующие условия:
- Предложение $P(n)$ верно при $n = 1$;
- Для любого натурального числа k из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.

Схема доказательства ММИ

1. *база индукции* (проверка справедливости предложения $P(1)$);
2. *индуктивное предположение* (допущение, что предложение $P(k)$ верно для любого натурального k);
3. *индуктивный переход* (доказательство, что верно предложение $P(k+1)$ с помощью индуктивного предположения).

Пример 1

- Доказать ММИ, что сумма первых нечетных натуральных чисел равна n^2, т.е. доказать формулу

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2 \qquad (1)$$

Пример 1

- Доказательство.

1. **База индукции.** Доказжем, что формула верна при $n = 1$ Так как значение говорит о количестве слагаемых в левой частим равенства, то левая часть равенства представляет собой одно слагаемое, а именно первое, т.е. 1. Значение правой части равенства находится непосредственной подстановкой вместо n единицы, т.е. $1^2 = 1$. Сравнивая левую и правую части равенства, имеем $1 = 1$ (верно).

Пример 1

2. Индуктивное предположение.
Допустим, что равенство (1) верно при $n = k$, для любого натурального k т.е. верна формула

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

ВГУЭС

Пример 1

3. **Индуктивный переход.** Докажем, что равенство (1) верно при $n = k + 1$, т.е.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + \big(2(k + 1) - 1\big) = (k + 1)^2 \qquad (2)$$

Замечание. В левой части равенства мы написали предпоследнее слагаемое, что дает возможность использовать при доказательстве индуктивное предположение.

Используя пункт 2), заменим в левой части равенства (2) первые k слагаемых на выражение k^2, а последнее слагаемое упростим, раскрыв скобки. Тогда левая часть примет вид

$$\big(1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)\big) + \big(2(k + 1) - 1\big) = k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1$$

Свернем последнее выражение, используя формулу квадрата суммы:

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Итак, левая часть имеет вид $(k + 1)^2$, а, значит, равна правой.

Отсюда, формула (1) верна для любого натурального n.

Замечание

- Необходимо отметить, что важно соблюдать всю цепочку индуктивного доказательства. О чем свидетельствуют следующие примеры.

Пример 2

- Докажем ММИ, что каждое натуральное число равно следующему за ним , таким образом, доказывая, что все натуральные числа равны между собой.
- ***Доказательство.*** Пусть утверждение верно при некотором , т.е. k . Покажем, что $k = k+1$ тогда $k+1 = k+2$. Действительно, прибавим к обеим частям единицу $k = k+1 \Rightarrow k+1 = k+2$ Значит, все натуральные числа равны между собой.
- Абсурдное утверждение! Где допущена ошибка?

Пример 3

- Докажем, что все кошки на земле серые.
- Точнее покажем, что любое конечное общество кошек одного цвета.
- Доказательство поведем индукцией по - числу кошек в обществе.

n

Пример 3

1. **База индукции.** Очевидно, что $P(1)$ истинно.
2. **Индуктивное предположение.** Допустим, что утверждение $P(k)$ истинно для любого натурального k.
3. **Индуктивный переход.** Рассмотрим произвольный набор из $k+1$ кошки. Выведем из этого общества одну кошку, назовем ее Муркой. Оставшиеся k кошек по предположению индукции одного цвета. Вернем Мурку и заберем другую, которую назовем Нюркой. Опять по предположению индукции оставшиеся в обществе k кошек одного цвета, причем такого же, как Мурка и Нюрка.

- Вывод: любое конечное общество кошек одного цвета.
- **Найти ошибку в рассуждении.**

Другая формулировка ММИ

- Заметим, что индуктивный процесс не обязан начинаться с 1. В качестве базы индукции может выступать любое целое число a, и тогда формулировка метода математической индукции примет вид.
- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех целых значений переменной $n \geq a$, если выполняются следующие условия:

1. Предложение $P(n)$ верно при $n = a$;
2. Для любого целого числа $k \geq a$ из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.

- **Вопросы:**
- Перечислить основные этапы доказательства ММИ.
- Обобщить свое оригинальное решение, а именно найти сумму натуральных чисел

  $1+2+3+...+n$?

- Доказать свою формулу ММИ.