

## Лекция 16



Тема: Метод математической индукции.

**Цель:** Научиться применять ММИ при доказательстве утверждений, свойств.

# Введение

- Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной.
- Один из наиболее распространенных методов доказательств истинности таких предложений является *метод математической индукции*

# Введение

- Вспомним знаменитого Шерлока Холмса. Какой метод рассуждения применялся им при расследовании дел?  
 Правильно, метод дедукции – метод рассуждения, при котором новое положение выводится логическим путем от общих положений к частным выводам.
- А какой метод рассуждений является противоположным дедукции?  
 Верно, индукция – способ рассуждения от частных положений к общим выводам.  
«Это невозможно!»- скажешь ты, вспомнив тему сегодняшнего урока. Математикам не свойственно делать общие выводы на основании частных случаев. Не спеши огорчаться, математики придумали свою индукцию – математическую, которая не уступает в строгости другим математическим методам.

# Метод математической индукции

- Метод математической индукции (ММИ)
- Предложение  $P(n)$  считается истинным для всех натуральных значений переменной  $n$ , если выполняются следующие условия:
- Предложение  $P(n)$  верно при  $n = 1$
- Для любого натурального числа  $k$  из предположения, что  $P(n)$  верно для  $n = k$ , следует, что оно верно и для  $n = k + 1$ .

# Схема доказательства ММИ

1. база индукции (проверка справедливости предложения  $P(1)$ );
2. индуктивное предположение (допущение, что предложение верно для любого натурального  $k$ );
3. индуктивный переход (доказательство, что верно предложение  $P(k+1)$  помощью индуктивного предположения).

# Пример 1

- Доказать ММИ, что сумма первых нечетных натуральных чисел равна  $n^2$ , т.е. доказать формулу

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

# Пример 1

- Доказательство.

**1. База индукции.** Докажем, что формула верна при  $n = 1$ . Так как значение  $n$  говорит о количестве слагаемых в левой части равенства, то левая часть равенства представляет собой одно слагаемое, а именно первое, т.е. 1. Значение правой части равенства находится непосредственной подстановкой вместо  $n$  единицы, т.е.  $n = 1$ . Сравнивая левую и правую части равенства, имеем (верно).

$$1 = 1$$

# Пример 1

## 2. Индуктивное предположение.

Допустим, что равенство (1) верно при  $n = k$ , для любого натурального  $k$  т.е. верна формула

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$



# Пример 1

3. **Индуктивный переход.** Докажем, что равенство (1) верно при  $n = k + 1$ .  
 $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$

**Замечание.** В левой части равенства мы написали предпоследнее слагаемое, что дает возможность использовать при доказательстве индуктивное предположение.

Используя пункт 2), заменим в левой части равенства (2) первые  $k$  слагаемых на выражение  $k^2$  а последнее слагаемое упростим, раскрыв скобки. Тогда левая часть примет вид

$$(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1$$

Свернем последнее выражение, используя формулу квадрата суммы:

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Итак, левая часть имеет вид  $(k + 1)^2$ , а, значит, равна правой.

Отсюда, формула (1) верна для любого натурального  $n$ .

# Замечание

- Необходимо отметить, что важно соблюдать всю цепочку индуктивного доказательства. О чем свидетельствуют следующие примеры.

# Пример 2

- Докажем ММИ, что каждое натуральное число равно следующему за ним, таким образом, доказывая, что все натуральные числа равны между собой.
- **Доказательство.** Пусть утверждение верно при некотором  $k$ , т.е.  $k = k + 1$ . Покажем, что  $k + 1 = k + 2$ . Действительно, прибавим к обеим частям единицу  $k = k + 1 \Rightarrow k + 1 = k + 2$ .  
Значит, все натуральные числа равны между собой.
- Абсурдное утверждение! Где допущена ошибка?

# Пример 3

- Докажем, что все кошки на земле серые.
- Точнее покажем, что любое конечное общество кошек одного цвета.
- Доказательство поведем индукцией по - числу кошек в обществе.

*n*

# Пример 3

1. **База индукции.** Очевидно, что  $P(1)$  истинно.
2. **Индуктивное предположение.** Допустим, что утверждение истинно для любого натурального  $k$ .
3. **Индуктивный переход.** Рассмотрим произвольный набор из  $k$  кошки. Выведем из этого общества одну кошку, назовем ее Муркой. Оставшиеся  $k-1$  кошек по предположению индукции одного цвета. Вернем Мурку и заберем другую, которую назовем Нюркой. Опять по предположению индукции оставшиеся в обществе  $k-1$  кошек одного цвета, причем такого же, как Мурка и Нюрка.
  - Вывод: любое конечное общество кошек одного цвета.
  - Найти ошибку в рассуждении.

# Другая формулировка ММИ

- Заметим, что индуктивный процесс не обязан начинаться с 1. В качестве базы индукции может выступать любое целое число  $a$  и тогда формулировка метода математической индукции примет вид.
- Предложение  $P(n)$  считается истинным для всех целых значений переменной  $n \geq a$ , если выполняются следующие условия:
  1. Предложение  $P(n)$  верно при  $n = a$
  2. Для любого целого числа  $k \geq a$  из предположения, что  $P(n)$  верно для  $n = k$  следует, что оно верно и для  $n = k + 1$

- **Вопросы:**
- Перечислить основные этапы доказательства ММИ.
- Обобщить свое оригинальное решение, а именно найти сумму натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \quad ?$$

- Доказать свою формулу ММИ.