

Лекция 16

Тема: Метод математической индукции.

Цель: Научиться применять ММИ при доказательстве утверждений, свойств.

Введение

- Во многих разделах математики приходится доказывать истинность предложений, зависящих от натуральной переменной, для всех значений этой переменной.
- Один из наиболее распространенных методов доказательств истинности таких предложений является *метод математической индукции*

Введение

- Вспомним знаменитого Шерлока Холмса. Какой метод рассуждения применялся им при расследовании дел?



Правильно, метод дедукции – метод рассуждения, при котором новое положение выводится логическим путем от общих положений к частным выводам.

- А какой метод рассуждений является противоположным дедукции?



Верно, индукция – способ рассуждения от частных положений к общим выводам.

«Это невозможно!»- скажешь ты, вспомнив тему сегодняшнего урока. Математикам не свойственно делать общие выводы на основании частных случаев. Не спеши огорчаться, математики придумали свою индукцию – математическую, которая не уступает в строгости другим математическим методам.

Метод математической индукции

- Метод математической индукции (ММИ)
- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех натуральных значений переменной n , если выполняются следующие условия:
- Предложение $P(n)$ верно при $n = 1$
- Для любого натурального числа k из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$, следует, что оно верно и для $n = k + 1$.

Схема доказательства ММИ

1. база индукции (проверка справедливости предложения $P(1)$);
2. индуктивное предположение (допущение, что предложение верно для любого натурального k);
3. индуктивный переход (доказательство, что верно предложение $P(k+1)$ помощью индуктивного предположения).

Пример 1

- Доказать ММИ, что сумма первых нечетных натуральных чисел равна n^2 , т.е. доказать формулу

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (1)$$

Пример 1

- Доказательство.

1. База индукции. Докажем, что формула верна при $n = 1$. Так как значение n говорит о количестве слагаемых в левой части равенства, то левая часть равенства представляет собой одно слагаемое, а именно первое, т.е. 1. Значение правой части равенства находится непосредственной подстановкой вместо n единицы, т.е. $n = 1$. Сравнивая левую и правую части равенства, имеем (верно).

$$1 = 1$$

Пример 1

2. Индуктивное предположение.

Допустим, что равенство (1) верно при $n = k$, для любого натурального k т.е. верна формула

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Пример 1

3. **Индуктивный переход.** Докажем, что равенство (1) верно при $n = k + 1$.
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Замечание. В левой части равенства мы написали предпоследнее слагаемое, что дает возможность использовать при доказательстве индуктивное предположение.

Используя пункт 2), заменим в левой части равенства (2) первые k слагаемых на выражение k^2 а последнее слагаемое упростим, раскрыв скобки. Тогда левая часть примет вид

$$(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1$$

Свернем последнее выражение, используя формулу квадрата суммы:

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Итак, левая часть имеет вид $(k + 1)^2$, а, значит, равна правой.

Отсюда, формула (1) верна для любого натурального n .

Замечание

- Необходимо отметить, что важно соблюдать всю цепочку индуктивного доказательства. О чем свидетельствуют следующие примеры.

Пример 2

- Докажем ММИ, что каждое натуральное число равно следующему за ним, таким образом, доказывая, что все натуральные числа равны между собой.
- **Доказательство.** Пусть утверждение верно при некотором k , т.е. $k = k + 1$. Покажем, что $k + 1 = k + 2$. Действительно, прибавим к обеим частям единицу $k = k + 1 \Rightarrow k + 1 = k + 2$.
Значит, все натуральные числа равны между собой.
- Абсурдное утверждение! Где допущена ошибка?

Пример 3

- Докажем, что все кошки на земле серые.
- Точнее покажем, что любое конечное общество кошек одного цвета.
- Доказательство поведем индукцией по - числу кошек в обществе.

n

Пример 3

1. **База индукции.** Очевидно, что $P(1)$ истинно.
2. **Индуктивное предположение.** Допустим, что утверждение истинно для любого натурального k .
3. **Индуктивный переход.** Рассмотрим произвольный набор из k кошки. Выведем из этого общества одну кошку, назовем ее Муркой. Оставшиеся $k-1$ кошек по предположению индукции одного цвета. Вернем Мурку и заберем другую, которую назовем Нюркой. Опять по предположению индукции оставшиеся в обществе $k-1$ кошек одного цвета, причем такого же, как Мурка и Нюрка.
 - Вывод: любое конечное общество кошек одного цвета.
 - **Найти ошибку в рассуждении.**

Другая формулировка ММИ

- Заметим, что индуктивный процесс не обязан начинаться с 1. В качестве базы индукции может выступать любое целое число a и тогда формулировка метода математической индукции примет вид.
- Предложение $P(n)$ считается истинным для всех целых значений переменной $n \geq a$, если выполняются следующие условия:
 1. Предложение $P(n)$ верно при $n = a$
 2. Для любого целого числа $k \geq a$ из предположения, что $P(n)$ верно для $n = k$ следует, что оно верно и для $n = k + 1$

- **Вопросы:**
- Перечислить основные этапы доказательства ММИ.
- Обобщить свое оригинальное решение, а именно найти сумму натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \quad ?$$

- Доказать свою формулу ММИ.