Выполнили студенты группы 38п-9
Алфёров Д.Д
Актиранов Д.В

# Метод математической индукции

# Содержание

- Введение
- Основная часть:

1) Полная индукция
2) Неполная индукция
3) Математическая индукция
4) Принцип Математической индукции

- Метод математической индукции в решении задач на делимость;
- Применение метода математической индукции к суммированию рядов;
- Примеры применения метода математической индукции к доказательству неравенств;
- Метод математической индукции в применение к другим задачам;

***Заключение***

*Список используемой литературы*

**Задания**

# Введение

Слово индукция по-русски означает наведение, а индуктивными называют выводы, на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

Например, мы каждый день наблюдаем, что Солнце восходит с востока. Поэтому можно быть уверенным, что и завтра оно появится на востоке, а не на западе. Этот вывод мы делаем, не прибегая ни к каким предположениям о причине движения Солнца по небу (более того, само это движение оказывается кажущимся, поскольку на самом деле движется земной шар). И, тем не менее, этот индуктивный вывод правильно описывает те наблюдения, которые мы проведем завтра.

Роль индуктивных выводов в экспериментальных науках очень велика. Они дают те положения, из которых потом путем дедукции делаются дальнейшие умозаключения. И хотя теоретическая механика основывается на трех законах движения Ньютона, сами эти законы явились результатом глубокого продумывания опытных данных, в частности законов Кеплера движения планет, выведенных им при обработке многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге. Наблюдение, индукция оказываются полезными и в дальнейшем для уточнения сделанных предположений. После опытов Майкельсона по измерению скорости света в движущейся среде оказалось необходимым уточнить законы физики, создать теорию относительности.

В математике роль индукции в значительной степени состоит в том, что она лежит в основе выбираемой аксиоматики. После того как длительная практика показала, что прямой путь всегда короче кривого или ломанного, естественно было сформулировать аксиому: для любых трех точек A, B и C выполняется неравенство

.

# Основная часть

## 1) Полная индукция

По своему первоначальному смыслу слово “индукция” применяется к рассуждениям, при помощи которых получают общие выводы, опираясь на ряд частных утверждений. Простейшим методом рассуждений такого рода является полная индукция. Вот пример подобного рассуждения.

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число n в пределах 4< n < 20 представим в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5;

14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.

Эти девять равенств показывают, что каждое из интересующих нас чисел действительно представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Таким образом, полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция).

Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи. Иными словами, неполная индукция в математике не считается законным методом строгого доказательства, но является мощным методом открытия новых истин.

Пусть, например, требуется найти сумму первых n последовательных нечётных чисел. Рассмотрим частные случаи:

1=1=1 2

1+3=4=2 2

1+3+5=9=3 2

1+3+5+7=16=4 2

1+3+5+7+9=25=5

После рассмотрения этих нескольких частных случаев напрашивается следующий общий вывод:

1+3+5+…+(2n-1)=n 2

т.е. сумма n первых последовательных нечётных чисел равна n 2

Разумеется, сделанное наблюдение ещё не может служить доказательством справедливости приведённой формулы.

Полная индукция имеет в математике лишь ограниченное применение. Многие интересные математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев, а провести проверку для бесконечного числа случаев мы не в состоянии. Неполная же индукция часто приводит к ошибочным результатам.

# ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

## 2) Неполная индукция

Во многих случаях выход из такого рода затруднений заключается в обращении к особому методу рассуждений, называемому методом математической индукции. Он заключается в следующем.

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа n (например нужно доказать, что сумма первых n нечётных чисел равна n 2 ). Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения n невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение, проверяют сначала его справедливость для n=1. Затем доказывают, что при любом натуральном значении k из справедливости рассматриваемого утверждения при n=k вытекает его справедливость и при n=k+1.

Тогда утверждение считается доказанным для всех n. В самом деле, утверждение справедливо при n=1. Но тогда оно справедливо и для следующего числа n=1+1=2. Из справедливости утверждения для n=2 вытекает его справедливость для n=2+1=3. Отсюда следует справедливость утверждения для n=4 и т.д. Ясно, что, в конце концов, мы дойдём до любого натурального числа n. Значит, утверждение верно для любого n.

Обобщая сказанное, сформулируем следующий общий принцип.

# Основная часть

## 3) Математическая индукция

С помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.

Следующее утверждение можно сравнительно просто доказать. Покажем, как оно получается с помощью метода математической индукции.

Если n – натуральное число, то число четное.

При n=1 наше утверждение истинно: - четное число. Предположим, что - четное число. Так как , а 2k – четное число, то и четное. Итак, четность доказана при n=1, из четности выведена четность .Значит, четно при всех натуральных значениях n.

Доказать истинность предложения

A(n)={число 5 кратно 19}, n – натуральное число.

Решение.

Высказывание A(1)={число кратно 19} истинно.

Предположим, что для некоторого значения n=k

A(k)={число кратно 19} истинно. Тогда, так как

, очевидно, что и A(k+1) истинно. Действительно, первое слагаемое делится на 19 в силу предположения, что A(k) истинно; второе слагаемое тоже делится на 19, потому что содержит множитель 19. Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, предложение A(n) истинно при всех значениях n.

# Основная часть

## 4) Принцип математической индукции

Во многих разделах арифметики, алгебры, геометрии, анализа приходится доказывать истинность предложений A(n), зависящих от натуральной переменной. Доказательство истинности предложения A(n) для всех значений переменной часто удается провести методом математической индукции, который основан на следующем принципе.

Предложение A(n) считается истинным для всех натуральных значений переменной, если выполнены следующие два условия:

Предложение A(n) истинно для n=1.

Из предположения, что A(n) истинно для n=k (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего значения n=k+1.

Этот принцип называется принципом математической индукции. Обычно он выбирается в качестве одной из аксиом, определяющих натуральный ряд чисел, и, следовательно, принимается без доказательства.

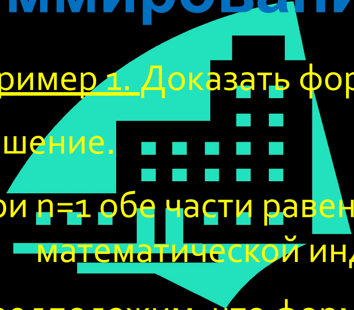
Под методом математической индукции понимают следующий способ доказательства. Если требуется доказать истинность предложения A(n) для всех натуральных n, то, во-первых, следует проверить истинность высказывания A(1) и, во-вторых, предположив истинность высказывания A(k), попытаться доказать, что высказывание A(k+1) истинно. Если это удается доказать, причем доказательство остается справедливым для каждого натурального значения k, то в соответствии с принципом математической индукции предложение A(n) признается истинным для всех значений n.

Метод математической индукции широко применяется при доказательстве теорем, тождеств, неравенств, при решении задач на делимость, при решении некоторых геометрических и многих других задач.

**Метод математической индукции в решении задач на делимость**

С помощью метода математической индукции можно доказывать различные утверждения, касающиеся делимости натуральных чисел.
Следующее утверждение можно сравнительно просто доказать. Покажем, как оно получается с помощью метода математической индукции.
Пример 1. Если n – натуральное число, то число  четное.
При n=1 наше утверждение истинно: - четное число. Предположим, что  - четное число. Так как , а 2k – четное число, то и четное. Итак, четность  доказана при n=1, из четности  выведена четность .Значит,  четно при всех натуральных значениях n.
Пример 2. Доказать истинность предложения
A(n)={число 5 кратно 19}, n – натуральное число.
Решение.
Высказывание A(1)={число кратно 19} истинно.
Предположим, что для некоторого значения n=k
A(k)={число  кратно 19} истинно. Тогда, так как
, очевидно, что и A(k+1) истинно. Действительно, первое слагаемое делится на 19 в силу предположения, что A(k) истинно; второе слагаемое тоже делится на 19, потому что содержит множитель 19. Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, предложение A(n) истинно при всех значениях n.

# Применение метода математической индукции к суммированию рядов



Пример 1. Доказать формулу, n – натуральное число.

Решение.

При n=1 обе части равенства обращаются в единицу и, следовательно, первое условие принципа математической индукции выполнено.

Предположим, что формула верна при n=k, т.е.

Прибавим к обеим частям этого равенства и преобразуем правую часть. Тогда получим Таким образом, из того, что формула верна при n=k, следует, что она верна и при n=k+1. Это утверждение справедливо при любом натуральном значении k. Итак, второе условие принципа математической индукции тоже выполнено. Формула доказана.

Пример 2. Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна .Решение .Обозначим искомую сумму , т.е. .При n=1 гипотеза верна.Пусть . Покажем, что .В самом деле ,Задача решена.

Пример 3. Доказать, что сумма квадратов n первых чисел натурального ряда равна .Решение. Пусть .. Предположим, что . Тогда

и окончательно .

Пример 4. Доказать, что .Решение.Если , то

Пример 5. Доказать, что Решение.При n=1 гипотеза очевидно верна. Пусть .Докажем, что . Действительно,

# Примеры применения метода математической индукции к доказательству неравенств

Пример 1. Доказать, что при любом натуральном n>1
Решение.
Обозначим левую часть неравенства через .
, следовательно, при n=2 неравенство справедливо.
Пусть при некотором k. Докажем, что тогда и . Имеем , .
Сравнивая и , имеем , т.е. .
При любом натуральном k правая часть последнего равенства положительна. Поэтому . Но , значит, и .
Пример 2. Найти ошибку в рассуждении.
Утверждение. При любом натуральном n справедливо неравенство .
Доказательство.
Пусть неравенство справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, т.е.
1)Докажем, что тогда неравенство справедливо и при n=k+1, т.е.
Действительно, не меньше 2 при любом натуральном k. Прибавим к левой части неравенства (1) , а к правой 2. Получим справедливое неравенство , или . Утверждение доказано.
Пример 3. Доказать, что , где >-1, , n – натуральное число, большее 1.
Решение.
При n=2 неравенство справедливо, так как .
Пусть неравенство справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, т.е.
(1)Покажем, что тогда неравенство справедливо и при n=k+1, т.е.
(2)Действительно, по условию, , поэтому справедливо неравенство
(3)полученное из неравенства (1) умножением каждой части его на . Перепишем неравенство (3) так: . Отбросив в правой части последнего неравенства положительное слагаемое , получим справедливое неравенство (2).
Пример 4. Доказать, что
1)де , , n – натуральное число, большее 1.
Решение.
При n=2 неравенство (1) принимает вид
(2)ак как , то справедливо неравенство
(3)Прибавив к каждой части неравенства (3) по , получим неравенство (2).Этим доказано, что при n=2 неравенство (1) справедливо.
Пусть неравенство (1) справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, т.е.
(4)Докажем, что тогда неравенство (1) должно быть справедливо и при n=k+1, т.е.
(5)Умножим обе части неравенства (4) на a+b. Так как, по условию, , то получаем следующее справедливое неравенство:
(6)Для того чтобы доказать справедливость неравенства (5), достаточно показать, что
(7)или, что то же самое,
(8)Неравенство (8) равносильно неравенству
(9)Если , то , и в левой части неравенства (9) имеем произведение двух положительных чисел. Если , то , и в левой части нераве
(9) имеем произведение двух отрицательных чисел. В обоих случаях неравенство (9) справедливо.
Этим доказано, что из справедливости неравенства (1) при n=k следует его справедливость при n=k+1.

# Метод математической индукции в применение к другим задачам

Наиболее естественное применение метода математической индукции в геометрии, близкое к использованию этого метода в теории чисел и в алгебре, - это применение к решению геометрических задач на вычисление. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вычислить сторону правильного - угольника, вписанного в круг радиуса R.

Решение.

При n=2 правильный $2^n$ – угольник есть квадрат; его сторона . Далее, согласно формуле удвоения

находим, что сторона правильного восьмиугольника , сторона правильного шестнадцатиугольника , сторона правильного тридцатидвухугольника . Можно предположить поэтому, что сторона правильного вписанного $2^n$ – угольника при любом равна

. (1)

Допустим, что сторона правильного вписанного - угольника выражается формулой (1). В таком случае по формуле удвоения

,

откуда следует, что формула (1) справедлива при всех n.

Пример 2. На сколько треугольников n-угольник (не обязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

Решение.

Для треугольника это число равно единице (в треугольнике нельзя провести ни одной диагонали); для четырехугольника это число равно, очевидно, двум.

Предположим, что мы уже знаем, что каждый k-угольник, где k<n, разбивается непересекающимися диагоналями на k-2 треугольника (независимо от способа разбиения). Рассмотрим одно из разбиений n-угольника $A_1A_2…A_n$ на треугольники.

# Заключение

В частности изучив метод математической индукции, я повысила свои знания в этой области математики, а также научилась решать задачи, которые раньше были мне не под силу.

В основном это были логические и занимательные задачи, т.е. как раз те, которые повышают интерес к самой математике как к науке. Решение таких задач становится занимательным занятием и может привлечь в математические лабиринты всё новых любознательных. По-моему, это является основой любой науки.

Продолжая изучать метод математической индукции, я постараюсь научиться применять его не только в математике, но и в решении проблем

# Список используемой литературы


1. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. - М.: Наука. - 1987. - С.396.
2. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика/ Пособие для учителей. - М.: Просвещение. – 1976. - С.4 - 18.
3. Головина Л.И., Яглом И.М. Индукция в геометрии. - М.: Госуд. издат. т-теор литер. - 1956 - С.100.
4. Пособие по математике для поступающих в вузы/ Под ред. Яковлева Г.Н. - М.: Наука. – 1981. - С.47-51.
5. Рубанов И.С. Как обучать методу математической индукции/ Математика в школе. - N1. – 1996. - С. 14-20.
6. Соломинский И.С. Метод математической индукции. - М.: Наука. - 1974. - 63с.
7. Соломинский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. - М.:Наука. – 1967. - С.7-59.
8. Зорин В.В. , Фискович Т.Т. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы / Москва : Высшая школа – 1980

# Задания

1. По мишени произведено три выстрела. Пусть
Аь = {мишень поражена при k-u выстреле}, ft=»l, 2, 3.
Что означают следующие высказывания:
а) Аг + А2 + Аз, б) АхАъА3; в) А^А^ + А^Аа + А^к^
2. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил пре-
ступление.
На следствии каждый из них сделал два заявления.
Браун. Я не делал этого.
Смит сделал это.
Джонс. Смит не виновен.
Браун сделал это.
Смит. Я не делал этого.
Джонс не делал этого.
Суд установил, что один из них дважды солгал, другой—дважды скгзал
правду, третий —один раз солгал, один раз сказал правду. Кто совершил пре-
ступление?
3. Для полярной экспедиции из восьми претендентов А, В, С, D, Е, F,
G и Н надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика,
радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять Е и G, гид-
ролога В и F, синоптика F и G, радиста С и D, механика С и Я, врача А
и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспе-
диции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем сле-
дует взять в экспедицию, если F не может ехать без В, D —без Н и без С,
С не может ехать одновременно с G, а А не может ехать вместе с В?
4. Рассмотрим два определения легкой контрольной:
1. Контрольная работа называется легко, если каждую задачу решил хотя
бы один ученик.
2. Контрольная работа называется легкой, если хотя бы один ученик
решил все задачи.
а) Может ли контрольная быть легкой в смысле первого определения и
трудной (не легкой) в смысле второго?
б) Может ли работа быть легкой в смысле второго определения и трудной
в смысле первого?
5. Ученики 10 В класса хвастались тем, что онн выше ростом учеников
10 А. На вопрос учителя математики: «Что, собственно, означает, что вы выше
ростом?» — ученики 10 В дали следующие ответы:
1. Любой из нас выше любого из них.
2. Самый высокий нз нас выше самого высокого нз них.
3. Для любого ученика нашего класса найдется ученик класса А меньшего
роста.
4. Каждый ученик класса А ниже хотя бы одного ученика нашего класса.
5. Средний рост учеников нашего класса больше среднего роста учеников
класса А.
Есть ли среди этих ответов равносильные? Если есть, то какие?