

# *Метод площадей при решении геометрических задач*

Выполнил: ученик 10 Б  
класса

МОУ «Лицей №15»

им. акад. Ю.Б. Харитона

Сулоев Илья

Руководитель: Теленгатор

Саров -

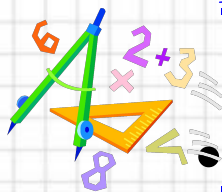
2011г.

С.В.

# Содержание



- Введение



- Свойства площадей



- Задачи

- Литература



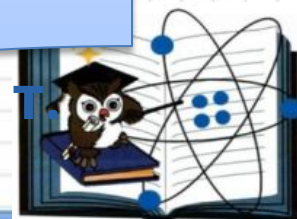


# Введение



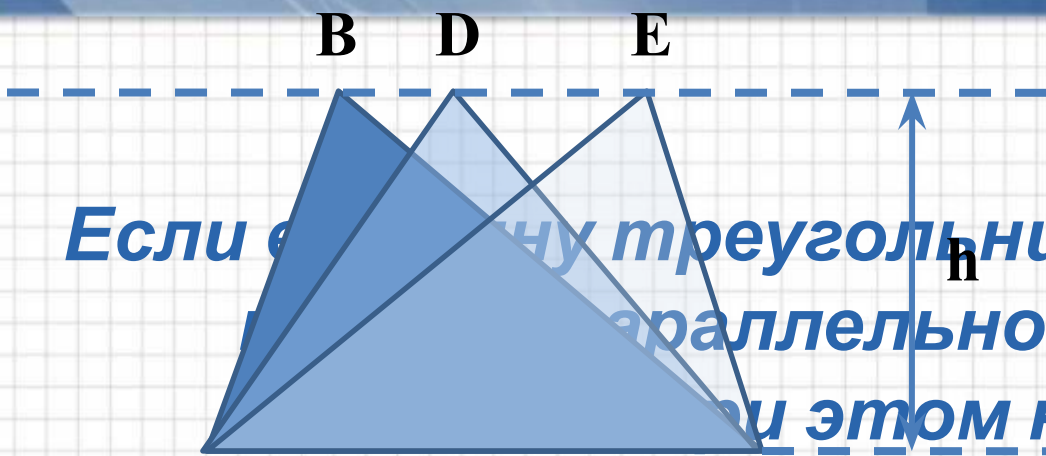
В элементарной математике, самыми трудными считаются геометрические задачи.

При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбирать наиболее подходящую к данному случаю теорему не просто. Поэтому, желательно в каждой теме выработать какие-то общие положения, которые полезно знать всякому решающему геометрические задачи. Один из алгоритмов решения многих геометрических задач – метод площадей, т. е. решение задач с использованием свойств площадей.



# Свойство

1



*Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь треугольника при этом не изменится.*

**Доказательство:** Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADC$ . Они имеют общее основание и равные высоты, так как прямые  $AC$  и  $BD$  параллельные, то расстояние между ними равно  $h$  - высоте  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADC$ . Если площадь треугольника находится по формуле  $S = 0,5 \cdot a \cdot h$ , то  $S_{ABC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$ ,  $S_{ADC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$ ,  $S_{AEC} = 0,5 \cdot AC \cdot h$ .



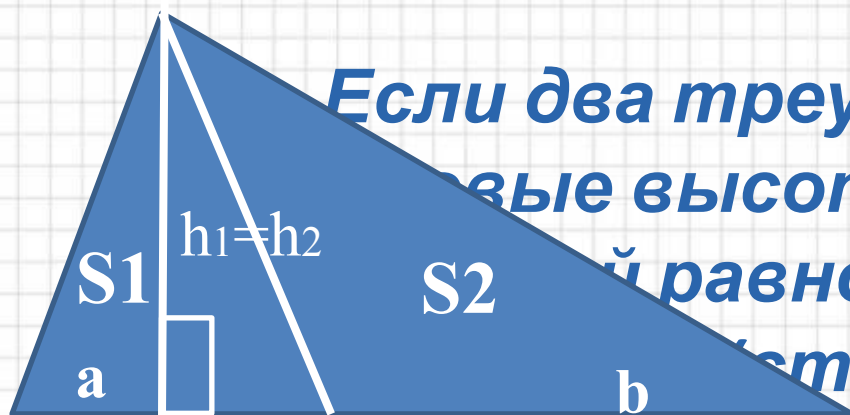
Значит,

$$S_{ABC} = S_{ADC} = S_{AEC}$$

# Свойст

2

во



**Если два треугольника имеют равные высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований, на которые опущены эти высоты).**

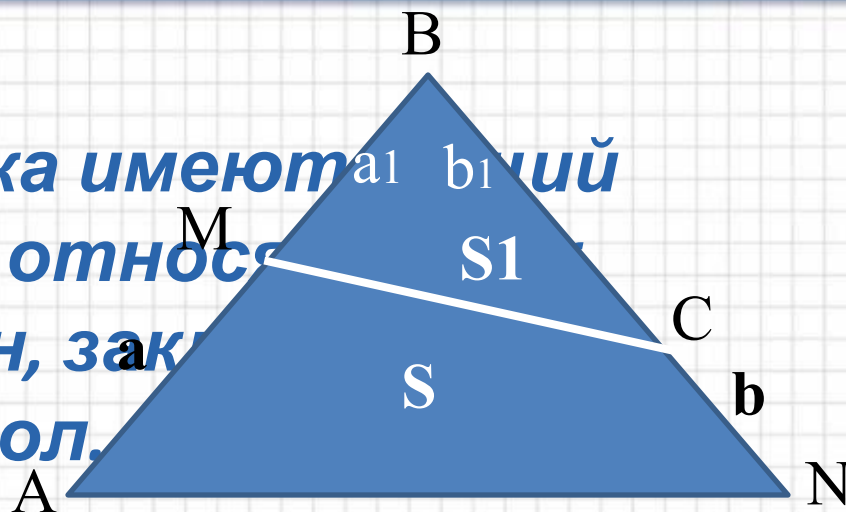
**Доказательство:** Пусть  $h_1 = h_2$  в двух треугольниках с основаниями  $a$  и  $b$ . Рассмотрим отношение площадей этих треугольников  $S_1:S_2=(0,5 \cdot a \cdot h_1):(0,5 \cdot b \cdot h_2)$ . Упростив, получим  $S_1:S_2=a:b$ .



# Свойств

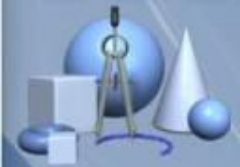
3

**Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключенных в этот угол.**



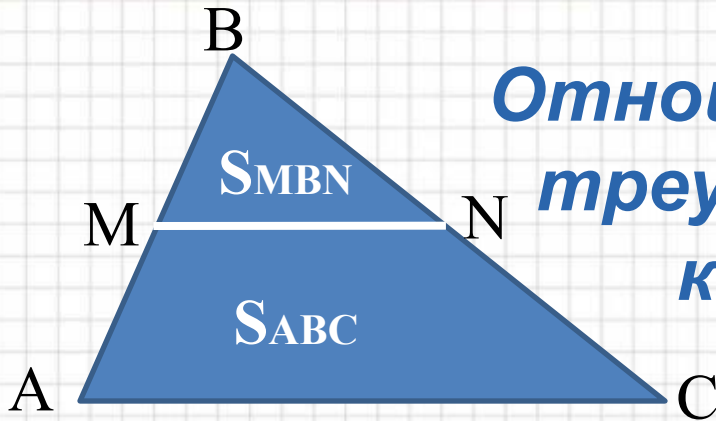
**Доказательство:** Рассмотрим  $\triangle ABN$  и  $\triangle MBC$  с общим углом  $B$ , где  $AB = a$ ,  $BN = b$ ,  $MB = a_1$  и  $BC = b_1$ . Пусть  $S_1 = S_{MBC}$  и  $S = S_{ABN}$ . Используя формулу площади треугольника вида  $S = 0,5ab \sin \gamma$ , рассмотрим отношение площадей  $\triangle ABN$  и  $\triangle MBC$ . Тогда  $S_1:S = (0,5 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \sin \angle B) : (0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \angle B)$ . Упростив, получим  $S_1:S = (a_1 \cdot b_1) : (a \cdot b)$ .





# Свойств

4



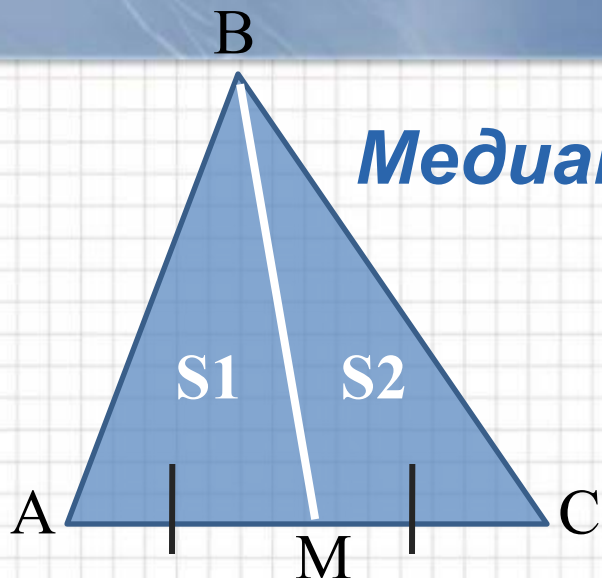
*Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

**Доказательство:** Рассмотрим  $\triangle ABC$  и  $\triangle MBN$ . Пусть  $AB = k \cdot MB$ ,  $BC = k \cdot NB$  и  $\angle ABC = \angle MBN$ . Используя формулу площади треугольника вида  $S = 0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin \angle \gamma$ , рассмотрим отношение площадей  $\triangle ABC$  и  $\triangle MBN$ . Тогда  $S_{ABC} : S_{MBN} = (0,5 \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B) : (0,5 \cdot MB \cdot NB \cdot \sin \angle B) = (k \cdot NB \cdot k \cdot MB) : (MB \cdot NB) = k^2$ .



# Свойство

5



*Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.*

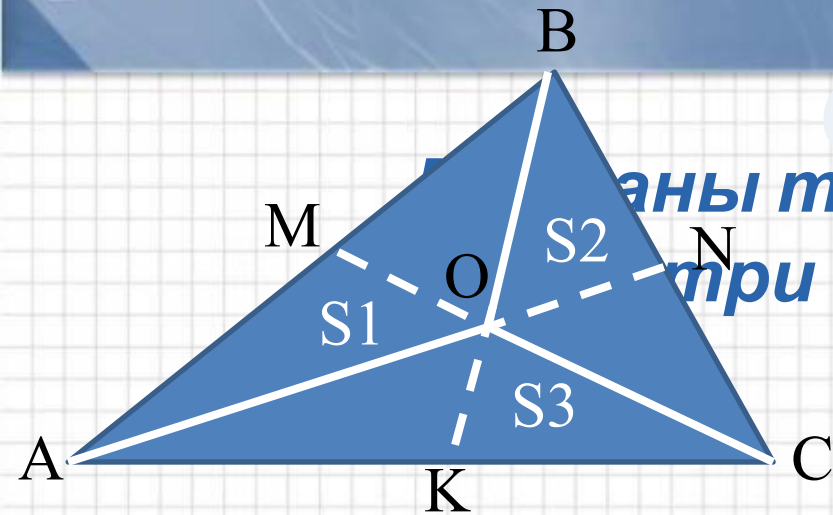
**Доказательство:** Рассмотрим  $\triangle ABC$ , где  $BM$  – медиана, тогда  $AM=MC=0,5 \cdot AC$ . Медиана делит треугольник на два равновеликих. Найдем площади треугольников  $\triangle ABM$  и  $\triangle BMC$  по формуле  $S=0,5 \cdot a \cdot h$ . Получим,  $S_{ABM}=0,5 \cdot AM \cdot h$  и  $S_{MBC}=0,5 \cdot MC \cdot h$ . Значит,  $S_{ABM}=S_{MBC}$ .





# Свойст

6



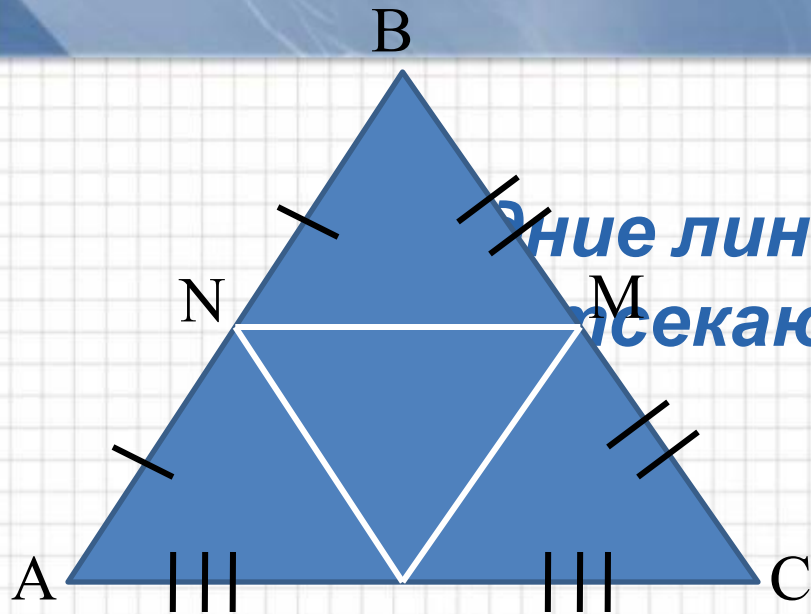
Медианы треугольника делят его на три равновеликие части.



**Доказательство:** Рассмотрим  $\triangle ABC$ . Проведем медианы из всех вершин, которые пересекаются в точке  $O$ . Получим треугольники  $\triangle AOB$ ,  $\triangle BOC$ ,  $\triangle AOC$ . Пусть их площади равны соответственно  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . А площадь  $\triangle ABC$  равна  $S$ . Рассмотрим  $\triangle ABK$  и  $\triangle CBK$ , они равной площади, т.к.  $BK$  медиана. В треугольнике  $\triangle AOC$   $OK$  - медиана, значит, площади треугольников  $\triangle AOK$  и  $\triangle COK$  равны. Отсюда следует, что  $S_1 = S_2$ . Аналогично можно доказать, что  $S_2 = S_3$  и  $S_3 = S_1$ .

# Свойство

7



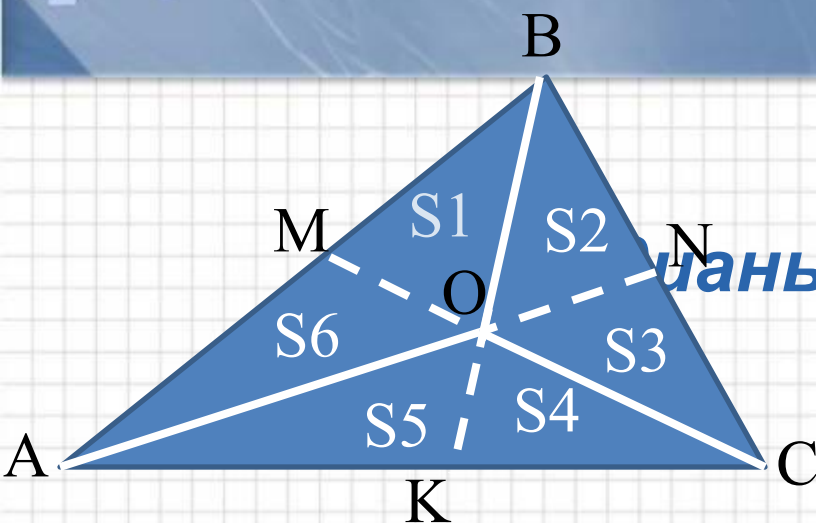
*Средняя линия треугольника площади  $S$  отсекает от него треугольники площади  $\frac{1}{4} \cdot S$ .*

**Доказательство:** Рассмотрим  $\triangle ABC$ .  $NM$  - средняя линия в треугольнике и она равна половине основания  $AC$ . Если  $S_{ABC} = S$ , то  $S_{NBM} = 0,5 \cdot NM \cdot h_1 = 0,5 \cdot (0,5 \cdot AC) \cdot (0,5 \cdot h) = 0,25 \cdot S$ . Аналогично, можно доказать, что площади всех треугольников равны одной четвертой части площади  $\triangle ABC$ .



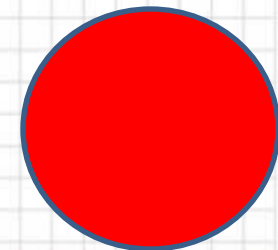
# Свойств

8



*Медианы треугольника делят его на равновеликих частей.*

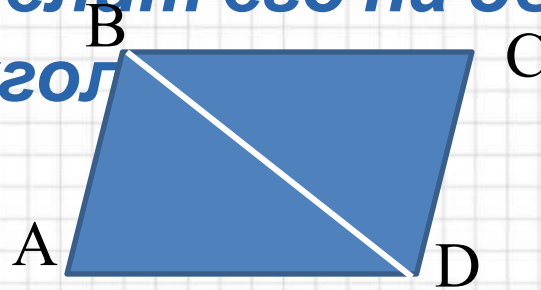
**Доказательство:** По свойству №7 площади  $\triangle AOB$ ,  $\triangle BOC$ ,  $\triangle AOC$  равны. По свойству №5 площади  $\triangle AOM$ ,  $\triangle BOM$  равны. Значит  $S_1 = S_6$ . Аналогично  $S_2 = S_3$ . Если  $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$  и  $2S_1 = 2S_2$  значит  $S_1 = S_2$ . И так далее. Получим, что все шесть треугольников имеют равные площади и они составляют шестую часть от площади  $\triangle ABC$ .



# Утверждение 1


Два треугольника являются равновеликими, если равны их высоты и основания.

**Задача 1.** Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.

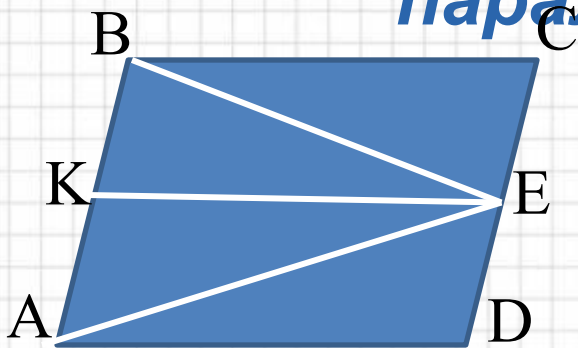


**Решение.** Высоты треугольников ABD и BCD равны.  $AD = BC$  (по свойству параллелограмма). Тогда в силу утверждения 1  $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD}$



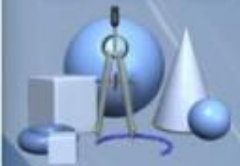


**Задача 2.** На стороне  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  взята произвольная точка  $E$ . Зная, что  $S_{\triangle ABE} = S$ , найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ .

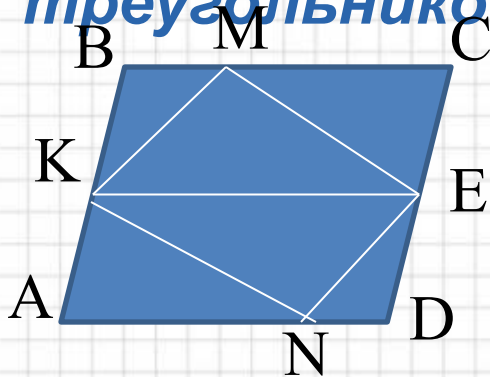


**Решение.** Проведем дополнительное построение:  $KE \parallel AD$ . Тогда из задачи 1 следует, что  $S_{\triangle KBE} = S_{\triangle CBE}$ , а  $S_{\triangle AKE} = S_{\triangle ADE}$ . Отсюда,  $S_{ABCD} = 2S$ .





**Задача 3.** В параллелограмме  $ABCD$  на сторонах  $AB$  и  $CD$  взяты произвольные точки  $M$  и  $N$ . Докажите, что площадь четырехугольника  $KMEN$  равна площади четырех образовавшихся треугольников.



**Решение.** Проведем отрезок  $KE$ . Тогда в силу задачи 2  $S_{\Delta KME} = S_{\Delta KMB} + S_{\Delta MEC}$ , а  $S_{\Delta KNE} = S_{\Delta KAN} + S_{\Delta EDN}$ .

Отсюда,  $S_{\Delta KMEN} = S_{\Delta KMB} + S_{\Delta MEC} + S_{\Delta KNE} + S_{\Delta EDN}$ .

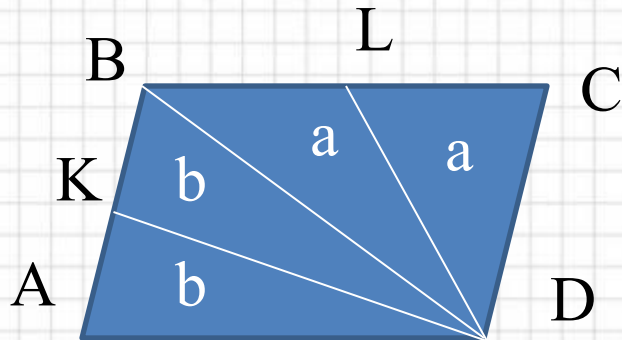




## Утверждение 2.

Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

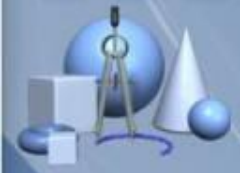
**Задача 4.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $K$  – середина  $AB$ , а  $L$  – середина  $BC$ . Зная, что  $S_{KBLD} = S$ , найдите  $S_{ABCD}$ .



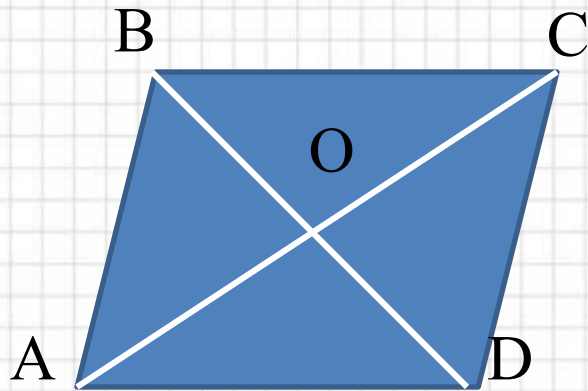
**Решение.**

Проведем диагональ  $BD$ . Тогда, исходя из утверждения 2, получим, что  $S_{ABCD} = S$ .





**Задача 5.** Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.



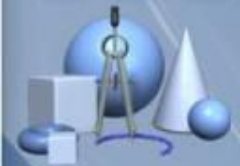
**Решение.**

В силу задачи 1 и утверждения 2  
будем иметь

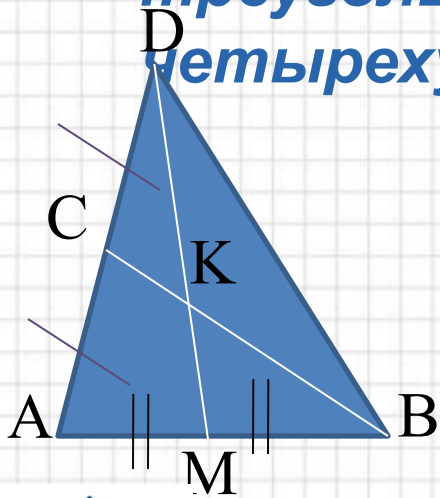
$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle COD} = S_{\triangle DOA}$$







**Задача 6.** На продолжении стороны треугольника  $ABC$  взята точка  $D$  так, что  $AC = CD$ . Пусть  $M$  – середина стороны  $AB$ , а  $K$  – точка пересечения отрезков  $BC$  и  $MD$ . Докажите, что площадь треугольника  $BKD$  равна площади четырехугольника  $AMKC$ .



В треугольнике  $ABD$   $DM$  и  $BC$  – медианы. Поэтому  $S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMD}$  и  $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle CDB}$ .

Эти равенства можно записать так:  $S_{AMKC} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle CDK} + S_{\triangle BKD}$ ,  $S_{AMKC} + S_{\triangle MBK} = S_{\triangle CKD} + S_{\triangle BKD}$

Сложив эти равенства и упростив выражение, получим  $S_{AMKC} = S_{\triangle BKD}$ .



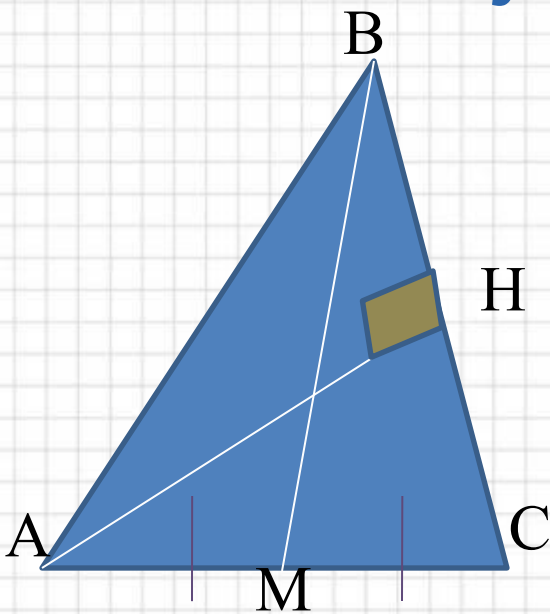


## Задача типа С4 на ЕГЭ



**Медиана  $BM$   $\triangle ABC$  равна его высоте  $АН$ .**

**Найдите угол  $MBC$ .**



**Решение.** Пусть  $\angle MBC = \alpha$ . Найдем площадь треугольника  $ABC$  двумя способами. Так как медиана  $BM$  треугольника  $ABC$  разбивает его на два равновеликих треугольника, то  $S_{ABC} = 2S_{CBM} = 2 \cdot 0,5 \cdot BC \cdot BM \cdot \sin \alpha = BC \cdot BM \cdot \sin \alpha$ . С другой стороны,  $S_{ABC} = 0,5 \cdot BC \cdot AH$ . Учитывая, что  $AH = BM$ , приравняем площади  $BC \cdot BM \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot BC \cdot AH$ . Получаем, что  $\sin \alpha = 0,5$ . Отсюда  $\alpha = 30^\circ$  или  $\alpha = 150^\circ$ .





# Список литературы.

- <http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=440813>
- <http://artgrafica.net/2010/05/14/free-power-point-templates.html>
- <http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=814114>
- <http://www.etudes.ru/>

