Метод поиска в глубину

Лекция 5

Поиск в глубину (***Depth-first search, DFS***)

Пусть задан граф $G = (V, E)$.

Алгоритм поиска описывается следующим образом:

для каждой непройденной вершины необходимо найти все непройденные смежные вершины и повторить поиск для них.

Пусть в начальный момент времени все вершины окрашены в *белый* цвет.

1. Из множества всех *белых* вершин выберем любую вершину: $v1$.
2. Выполним для нее процедуру Поиск($v1$).
3. Перекрасим ее в *черный* цвет.

Повторяем шаги 1-3 до тех пор, пока множество *белых* вершин не пусто.

Процедура Поиск(u)

```
Поиск (u)
{
   цвет [u] ← серый;
   d[u] = time++; // время входа в вершину,
               // порядковый глубинный номер вершины
    для ∀ v ∈ смежные(u)  выполнить
    {
      если (цвет[v] = белый) то
      {
         отец [v] ← u;
         Поиск(v);
       }
    }
    цвет[u] ← чёрный;
    f [u] ← time++;  // время выхода из вершины
}
```

Процедура Поиск_в_графе

```
Поиск_в_графе()
{
  для ∀u ∈ V выполнить
 {
     цвет [u] ← белый;
     отец [u] ← NULL;
   }
 time ← 0;
 для ∀u ∈ V выполнить
     если (цвет [u] = белый) то
        Поиск(u);
}
```

Анализ

Общее число операций при выполнении *Поиск_в_графе*:

$O(|V|)$

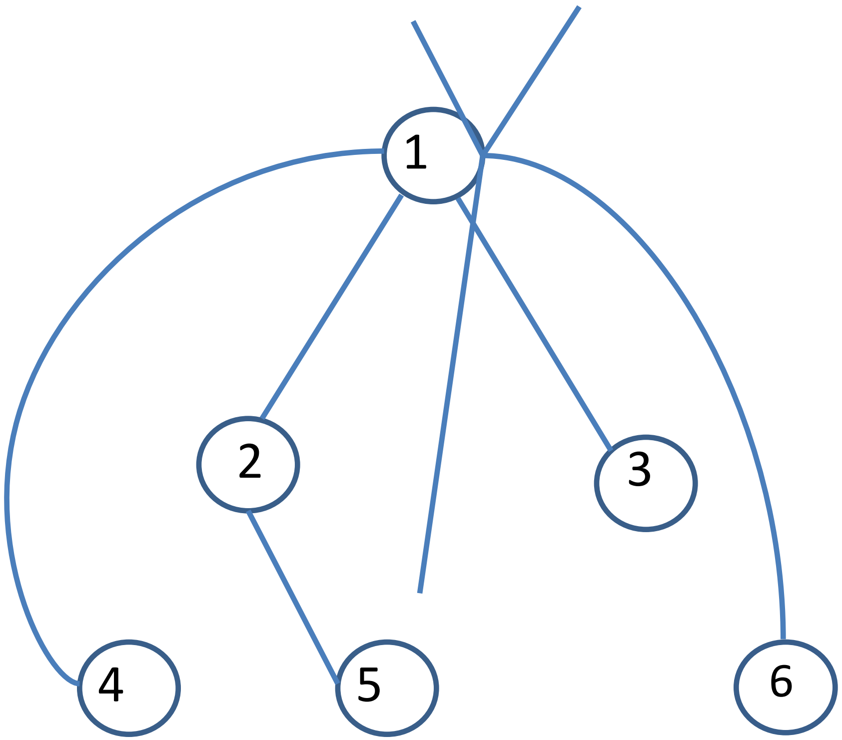
Общее число операций при выполнении *Поиск(u):*

Цикл выполняется |смежные[v]| раз.

$\sum |смежные[v]| = O(|E|)$

Общее число операций: **$O(|V|+|E|)$**

Поиск в глубину в неориентированном графе



Глубинный остовный лес

Поиск в глубину на неориентированном графе *G*= (*V, E*) разбивает ребра, составляющие *E,* на два множества *T* и *B.*

Ребро *(v, w)* помещается в множество *T,* если узел *w* не посещался до того момента, когда мы, рассматривая ребро *(u, w),* оказались в узле *v.* В противном случае ребро (*v*, *w*) помещается в множество *B.*

Ребра из *T* будем называть *древесными,* а из В — *обратными.*

Подграф *(V, T)* представляет собой неориентированный лес, называемый *остовным лесом для G, построенным поиском в глубину,* или, короче, *глубинным остовным лесом для G.*

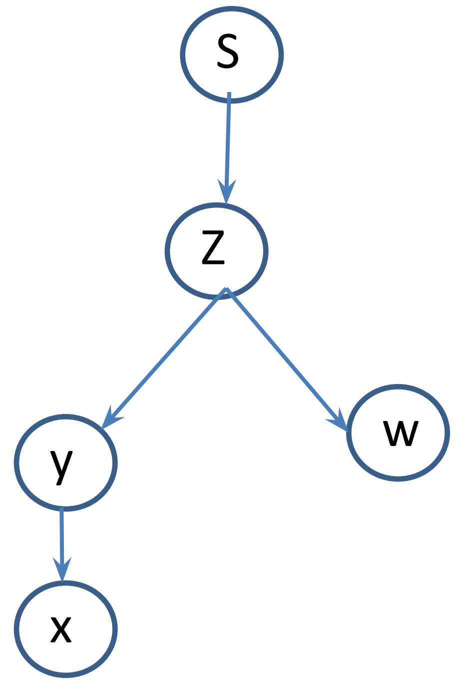
Если этот лес состоит из единственного дерева, *(V, T)* будем называть по аналогии *глубинным остовным деревом.*

Заметим, что если граф связен, то глубинный остовный лес будет деревом.

Узел, с которого начинался поиск, считается корнем соответствующего дерева.

Свойства поиска в глубину

Времена обнаружения и окончания обработки вершин образуют правильную скобочную структуру.




```
 1  2  3   4  5  6   7   8   9   10
(s (z (y (x  x) y) (w  w)  z)  s)
```

Теорема

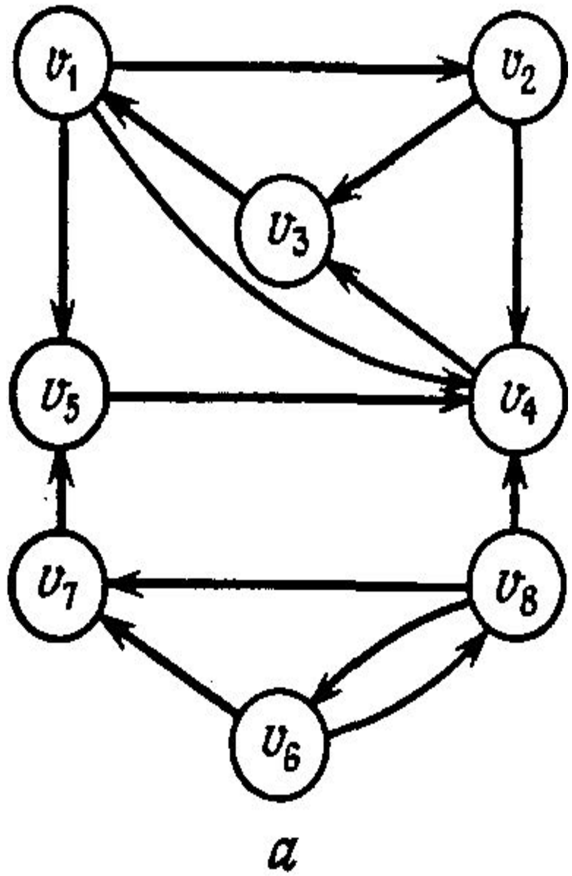
При поиске в глубину в графе $G = (V, E)$ для любых двух вершин u и v выполняется одно из следующих утверждений:

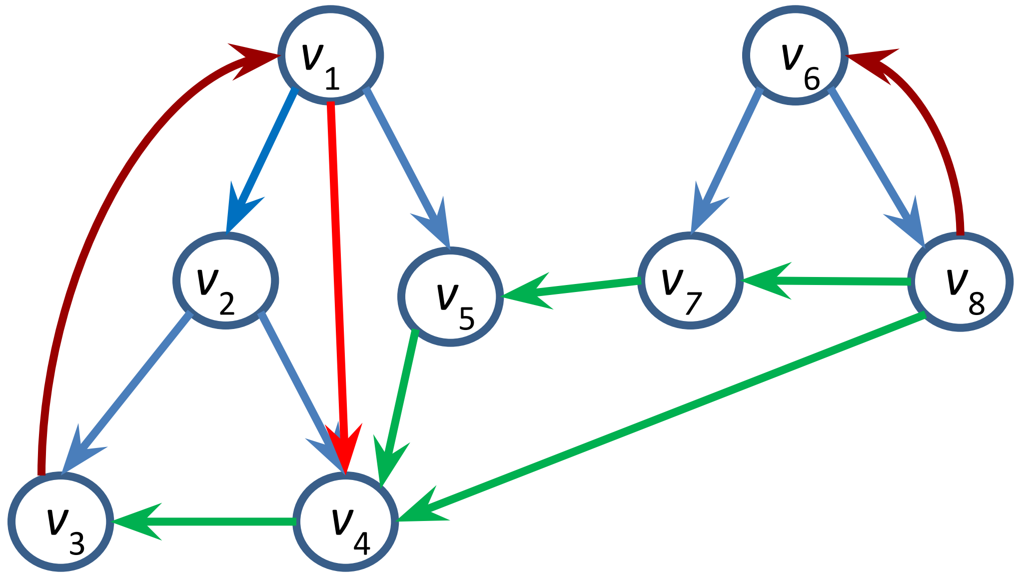
1) Отрезки [d[u],f[u]] и [d[v],f[v]] не пересекаются.

1) Отрезок [d[u],f[u]] целиком содержится внутри отрезка [d[v],f[v]] и u есть потомок v в дереве поиска в глубину.

1) Отрезок [d[v],f[v]] целиком содержится внутри отрезка [d[u],f[u]] и v есть потомок u в дереве поиска в глубину.

Поиск в глубину в ориентированном графе





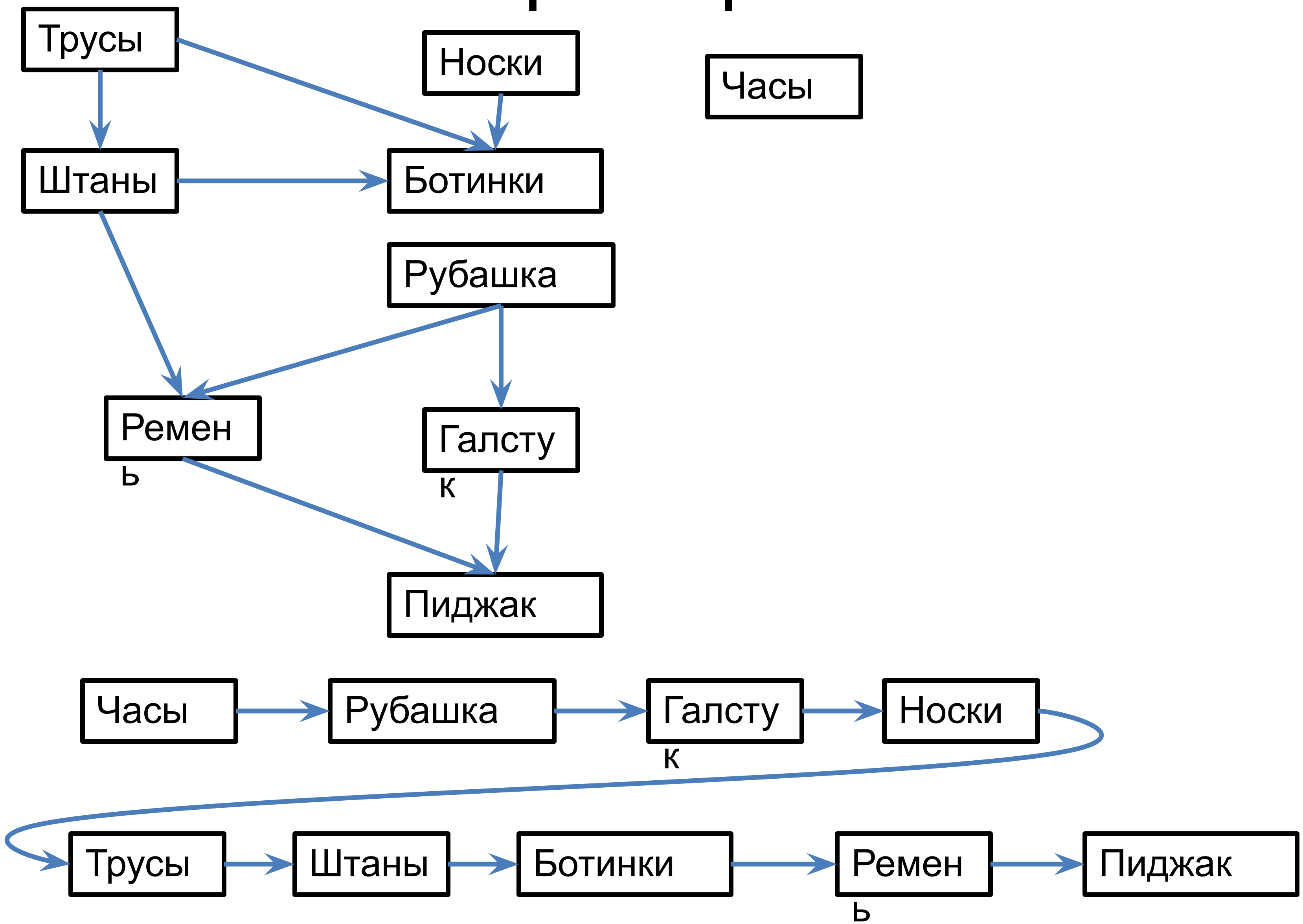
Поиск в глубину в ориентированном графе G разбивает множество его ребер на четыре класса.

1) *Древесные ребра*, идущие к новым узлам в процессе поиска.
2) *Прямые ребра*, идущие от предков к подлинным потомкам, но не являющиеся древесными ребрами.
3) *Обратные ребра*, идущие от потомков к предкам (возможно, из узла в себя).
4) *Поперечные ребра*, соединяющие узлы, которые не являются ни предками, ни потомками друг друга.

Решение задачи топологической сортировки методом поиска в глубину

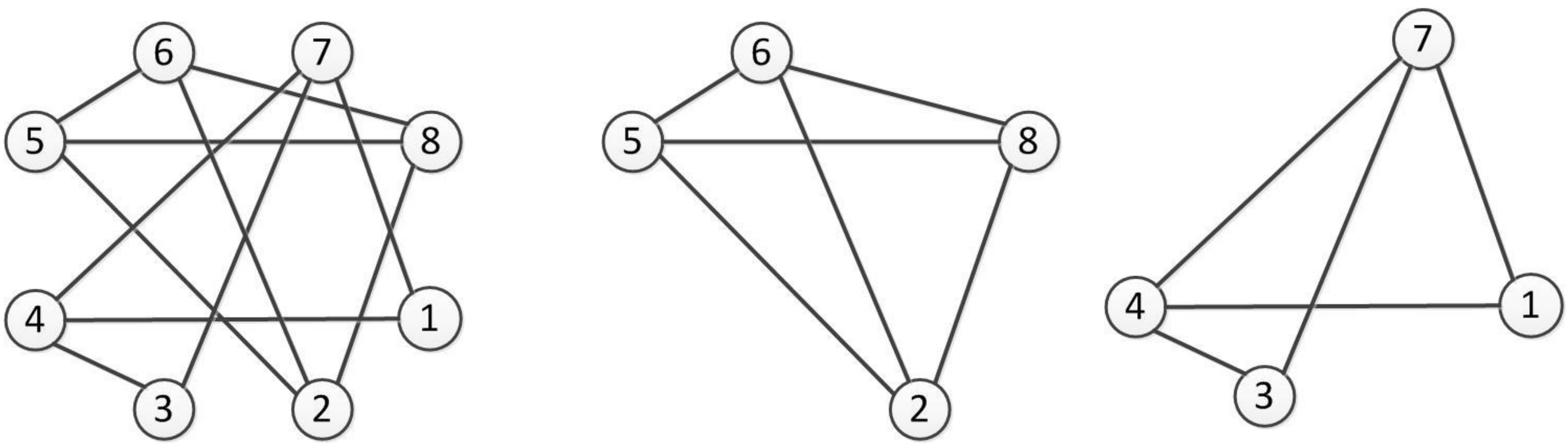
```
Топологическая_сортировка (u)
{
   цвет [u] ← серый;
    для ∀ v ∈ смежные(u)  выполнить
    {
       если (цвет[v] = белый) то
       {
           Топологическая_сортировка(v);
        }
    }
    цвет[u] ← чёрный;
    Поместить u в начало списка;
}
```

Пример


Трусы
Носки
Часы
Штаны
Ботинки
Рубашка
Ремень
Галстук
Пиджак
Часы
Рубашка
Галстук
Носки
Трусы
Штаны
Ботинки
Ремень
Пиджак

Поиск компонент связности в графе

Компонента связности графа – это такое множество вершин графа, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.



Реализация поиска компонент связности в графе

```
Поиск (u, n)
{
   цвет [u] ← серый;
    C[u] ← n;          // номер компоненты связности
   для ∀ v ∈ смежные(u) выполнить
    {
      если (цвет[v] = белый) то
         Поиск(v, n);
    }
   цвет[u] ← чёрный;
}
Поиск_в_графе()
{
    для ∀u ∈ V выполнить
       цвет [u] ← белый;
   nk ← 0;
    для ∀u ∈ V выполнить
      если (цвет [u] = белый) то
       {
        nk ++;
        Поиск(u, nk);
       }
}
```

Метод поиска в ширину (BFS, Breadth-first search)

Пусть задан граф $G = (V, E)$ и некоторая начальная вершина s.

Алгоритм поиска в ширину перечисляет все достижимые из s вершины в порядке возрастания расстояния от s. Расстоянием считается число ребер кратчайшего пути.

Время работы алгоритма - $O(|V|+|E|)$.

Пусть в начальный момент времени все вершины окрашены в *белый* цвет.

1. Вершину s окрасим в серый цвет и припишем расстояние 0. Смежные с ней вершины окрасим в серый цвет, припишем им расстояние 1, их предок - s. Окрасим вершину s в черный цвет.

2. На шаге n поочередно рассматриваем белые вершины, смежные с вершинами с пометками n -1, и каждую из них раскрашиваем в серый цвет, приписываем им предка и расстояние n. После этого вершины с расстоянием n-1 окрашиваются в черный цвет.

Алгоритм

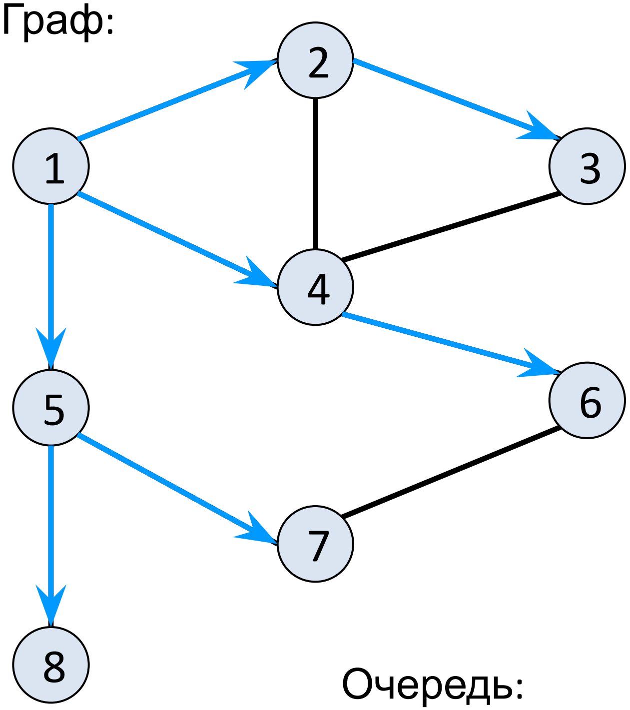
Инициализация

```
для ( ∀u ∈ (V\{s}) выполнить
{
    цвет[u] ← белый;
    предок[u]← NULL;
    d[u]← ∞;
}
d[s]← 0;
предок[s]← NULL;
put (s, Q);
```

```
пока (Q ≠ ∅) выполнить
{
      u ← first (Q);
      для ( ∀v ∈ смежные[u])выполнить
      {
          если (цвет[v]= белый) то
          {
         цвет [v] ← серый;
         предок[v]← u;
         d[v]← d[u]+1;
         put(v,Q);
          }
      }
      get(Q);
      цвет[u] ← черный;
}
```

Использование очереди

Граф:



В качестве промежуточной структуры хранения при обходе в ширину будем использовать очередь.

1 2 4 5 3 6 7 8

Можно также получить дерево обхода в ширину, если отмечать каждую прямую дугу.

1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	1	1	4	5	5

Очередь:

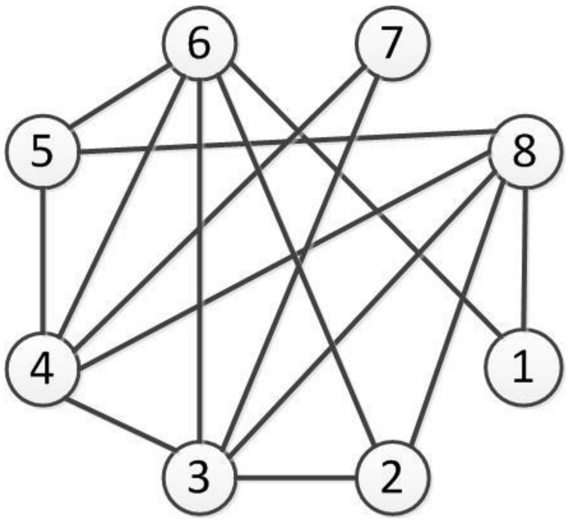
2
4
7
8

Нахождение кратчайшего пути в лабиринте

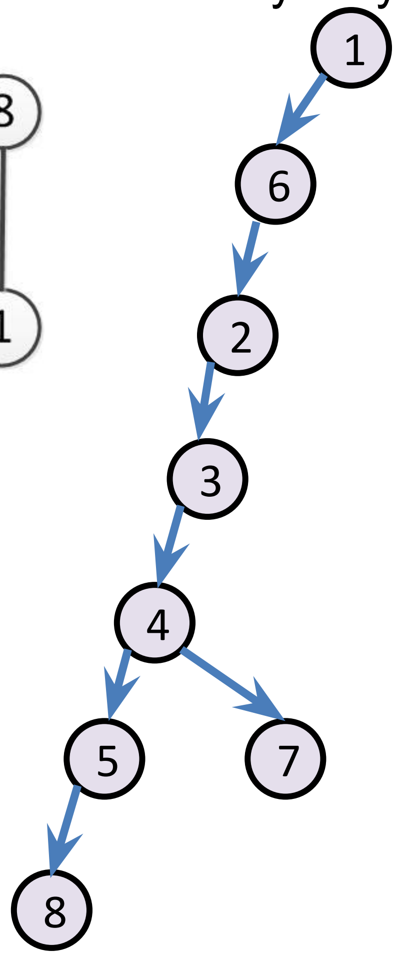
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	15	14		4	3	2	1	2	3	4
2		13		5		3	2	3		5
3		12		6						6
4		11		7						7
5		10	9	8				20		8
6		11						19		9
7	13	12	13	14	15	16	17	18		
8	14					17		19		
9	15	16	17	18	19	18		20		
10				19	20	19				

1. Пометить числом 1 и поместить входную клетку в очередь.
2. Взять из очереди клетку.
   Если это выходная клетка, то
   перейти на шаг 4, иначе
   пометить все непомеченные
   соседние клетки числом ,
   на 1 большим, чем данная,
   и поместить их в очередь.
3. Если очередь пуста, то выдать
   «Выхода нет» и выйти, иначе
   перейти на шаг 2.
4. **Обратный ход**:
   начиная с выходной клетки,
   каждый раз смещаться на
   клетку, помеченную на 1
   меньше, чем текущая, пока не

Пример построения остовных деревьев



В глубину:



В ширину: