



Метод рационализации



Введени

е

Решение неравенств - важный раздел в математике. Успешное изучение математики невозможно без умения решать разнообразные неравенства, поэтому мы решили рассмотреть один из способов решения неравенств – метод рационализации. В школьной программе он не изучается, но его применение значительно облегчает решение задания С3 ЕГЭ, в частности логарифмических и показательных неравенств.



Теоретическое обоснование метода

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, $\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$ вида является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \\ a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases}$$



- Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, известный в математической литературе под названием декомпозиции.

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при котором неравенство $G(x) > 0$ равносильно неравенству $F(x) > 0$ в области определения выражения $F(x)$.



Сведение логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x), \quad (1)$$

где $a(x)$, $f(x)$, $g(x)$ - некоторые функции

Теорема 1.

Логарифмическое неравенство $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$ равносильно следующей системе неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \geq 0. \end{array} \right. \quad (2)$$



Доказательст

во

Начнем с того, что первые четыре неравенства системы (2) задают множество допустимых значений исходного логарифмического неравенства. Обратим теперь внимание на пятое неравенство.

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель этого неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство

Если $a(x) > 1$, то первый множитель пятого неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство

$$f(x) \leq g(x)$$

Таким образом, пятое неравенство системы включает в себя оба случая предыдущего метода.
Терема доказана.



Сведение показательных неравенств к системе

Теперь рассмотрим показательное неравенство вида

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \quad 3)$$

Так же, как в предыдущем случае, пусть $a(x), f(x), g(x)$ - некоторые функции.

И снова вспомним, что традиционное решение такого неравенства приводит к двум случаям. В первом основание степени положительно, но меньше единицы (знак неравенства обращается), во втором случае основание степени больше единицы (знак неравенства сохраняется).

Как и в случае с логарифмическим неравенством, имеется возможность значительно укоротить решение задачи, используя метод рационализации. Этот метод основан на следующей теореме.



Теорема 2.

**Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)}$
равносильно следующей системе неравенств:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ (a(x) - 1)(f(x) - g(x)) \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$



Доказательств во

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель третьего неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство

$$a(x) > 1$$

Если $a(x) > 1$, то первый множитель третьего неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство



Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G , где f, g, h, p, q – выражения с переменной x ($h \neq 1, f > 0, g > 0$), a – фиксированное число ($a > 0, a \neq 1$).



| | Выражение F | Выражение G |
|----|---|--------------------------------|
| 1 | $\log_a f - \log_a g$ | $(a - 1)(f - g)$ |
| 1a | $\log_a f - 1$ | $(a - 1)(f - a)$ |
| 1б | $\log_a f$ | $(a - 1)(f - 1)$ |
| 2 | $\log_h f - \log_h g$ | $(h - 1)(f - g)$ |
| 2a | $\log_h - 1$ | $(h - 1)(f - h)$ |
| 2б | $\log_h f$ | $(h - 1)(f - 1)$ |
| 3 | $\log_f h - \log_g h$ ($g \neq 1, f \neq 1$) | $(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$ |
| 4 | $h^f - h^g$ ($h > 0$) | $(h - 1)(f - g)$ |
| 4a | $h^f - 1$ | $(h - 1)f$ |
| 5 | $f^h - g^h$ ($f > 0, g > 0$) | $(f - g)h$ |
| 6 | $ f - g $ | $(f - g)(f + g)$ |



$\log_a f - \log_a g$

Доказательство

Пусть $\log_a f - \log_a g > 0$, то есть $\log_a f > \log_a g$, причём $a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0$.
Если $0 < a < 1$, то по свойству убывающей логарифмической функции имеем $f < g$. Значит, выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ f - g < 0 \end{cases}$$

Откуда следует неравенство $(a - 1)(f - g) > 0$ верное на области определения выражения $F = \log_a f - \log_a g$.

Если $a > 1$, то $f > g$. Следовательно, имеет место неравенство $(a - 1)(f - g) > 0$.
Обратно, если выполняется неравенство $(a - 1)(f - g) > 0$ на области допустимых значений ($a > 0, a \neq 1, f > 0, g > 0$), то оно на этой области равносильно совокупности двух систем.

$$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ f - g < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \\ f - g > 0 \end{cases}$$

Из каждой системы следует неравенство $\log_a f > \log_a g$, то есть $\log_a f - \log_a g > 0$.

Аналогично, рассматриваются неравенства $F < 0, F \leq 0, F \geq 0$.



$\log_h f - \log_h g$

Пусть некоторое число $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда
имеем

$$\log_h f - \log_h g = \frac{\log_a f}{\log_a h} - \frac{\log_a g}{\log_a h} = \frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a h}$$

Знак последнего выражения совпадает со
знаком выражения $\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)}$

или $(h-1)(f-g)$.



$\log_f h - \log_g h$

Так как

$$\log_f h - \log_g h = \frac{\log_g h}{\log_g f} - \log_g h = \log_g h \log_g f - \log_g h = \log_g h (\log_g f - 1)$$

то, используя замены 2а и 2б, получаем, что знак последнего выражения совпадает со знаком выражения $(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g - f)$.



$$h^f - h^g \quad (h > 0)$$

Из неравенства $h^f - h^g > 0$ следует $h^f > h^g$. Пусть число $a > 1$, тогда $\log_a h^f > \log_a h^g$ или $(f - g)\log_a h > 0$.

Отсюда с учётом замены 1б и условия $a > 1$ получаем $(f - g)(a - 1)(h - 1) > 0$, $(f - g)(h - 1) > 0$.

Аналогично, доказываются неравенства $F < 0$, $F \leq 0$, $F \geq 0$.

$$f^h - g^h \quad (f > 0, g > 0)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству 4.

$$|f| - |g|$$

Доказательство замены 6 следует из равносильности неравенств $|p| > |q|$ и $p^2 > q^2$ ($|p| < |q|$ и $p^2 < q^2$).



Пример 1.

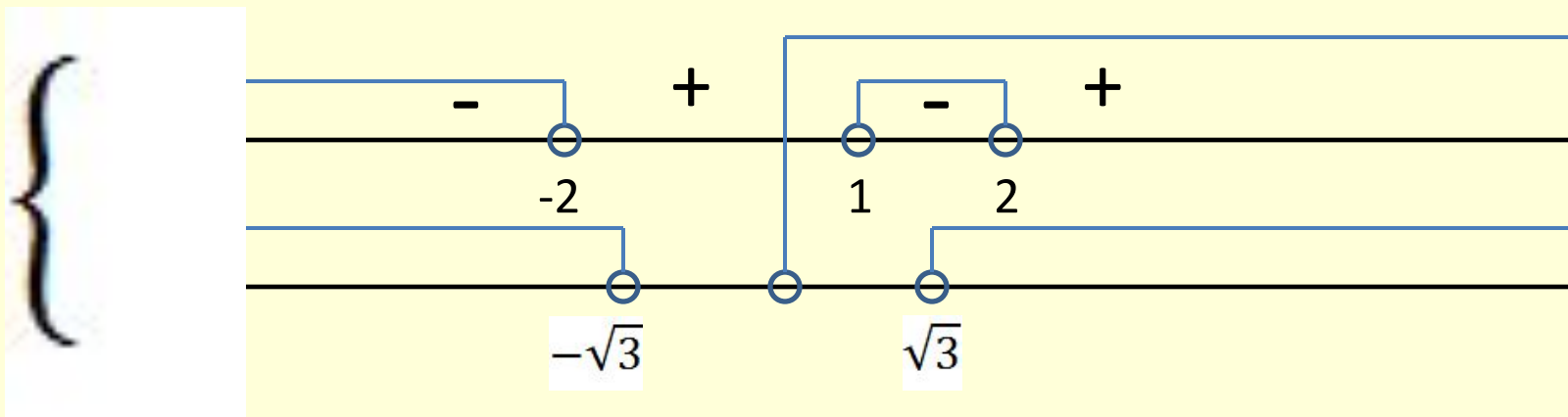
Решить
неравенство:

$$\log_x(x^2 - 3) < 0$$

Решение:

$$\begin{cases} (x - 1)(x^2 - 3 - 1) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 1)(x - 2)(x + 2) < 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \end{cases}$$



ОТВЕ
Т: $(-\sqrt{3}; 2)$



Пример 2.

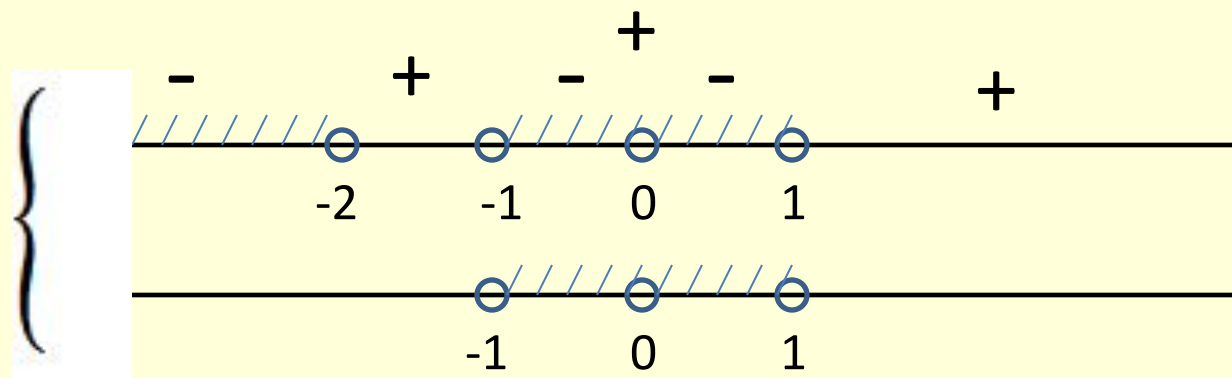
Решить
неравенство:

$$\log_{x+3} \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right) > 0$$

$$\begin{cases} (x+3-1) \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \right) > 0; \\ x+3 > 0; \\ x+3 \neq 1; \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2) \frac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{cases}$$



ОТВЕ $(-1; 0) \cup (0; 1)$

Т:



Пример 3.

**Решить
неравенство:**

Решение:

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)(\log_x \sqrt{3-x}-1) \geq 0 \\ \log_x \sqrt{3-x} > 0 \\ 3-x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)(\sqrt{3-x}-x) \geq 0 \\ (x-1)(\sqrt{3-x}-1) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3-x-x^2) \leq 0 \\ (x-1)(3-x-1) > 0 \\ x < 3 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{\sqrt{13} + 1}{2}\right) \left(x - \frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right) \geq 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \leq x < 2$$

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{13} - 1}{2}; 2\right)$



Пример

4.

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$$

**Решить
неравенство:**

Решение:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) - \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (12x^2 - 41x + 34)(2x^2 - 5x + 2)(2 - x)(-10x^2 + 36 - 32) \geq 0 \\ 12x^2 - 41x + 35 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \\ 12x^2 - 41x + 34 \neq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \neq 0 \\ 3 - x > 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} (x-2)^4 \left(x - \frac{8}{5}\right) \left(x - \frac{17}{12}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \left(x - \frac{5}{3}\right) \left(x - \frac{7}{4}\right) > 0 \\ (x-1) \left(x - \frac{2}{3}\right) > 0 \\ \left(x - \frac{17}{12}\right) (x-2) \neq 0 \\ (x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right) \neq 0 \\ x < 3 \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$



Решите примеры

Пример
5.

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \leq \log_{2x}(x^2 + x)$$

[ОТВ](#)
[ЕТ](#)

Пример
6.

$$\frac{\log_x(x - 3) - \log_x(9 - x)}{\log_{x-1}x} < 0$$

[ОТВ](#)
[ЕТ](#)

Пример
7.

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2 + 1) \leq 0$$

[ОТВ](#)
[ЕТ](#)

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

[ОТВ](#)
[ЕТ](#)



Пример 9. $\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2$

[ОТВ](#)
[ЕТ](#)

Пример 10. $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$

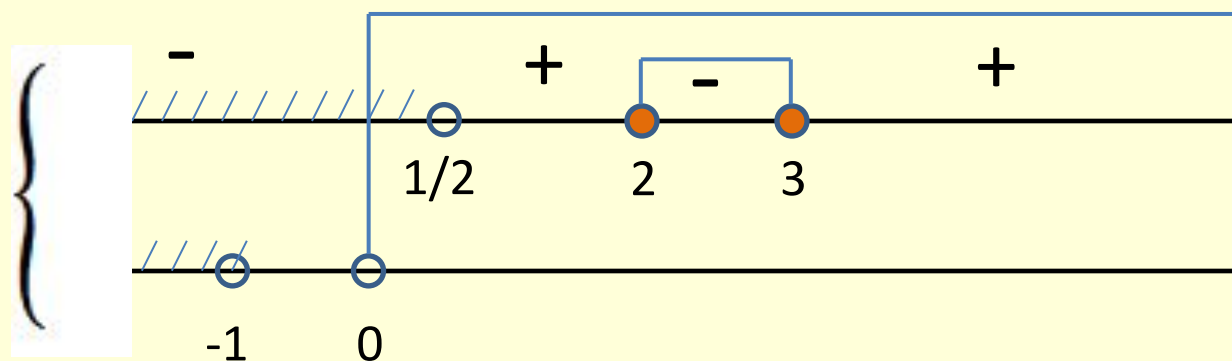
[ОТВ](#)
[ЕТ](#)

Пример 11. $\log_{2x+1}(4x - 5) + \log_{4x-5}(2x + 1) \leq 2$

[ОТВ](#)
[ЕТ](#)



Пример 5



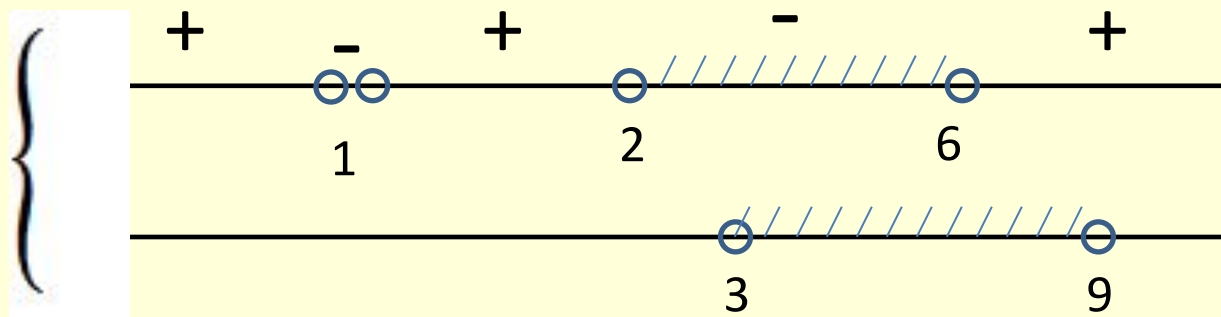
ОТВЕ
Т:

$$\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3]$$

НАЗА
Д



Пример 6



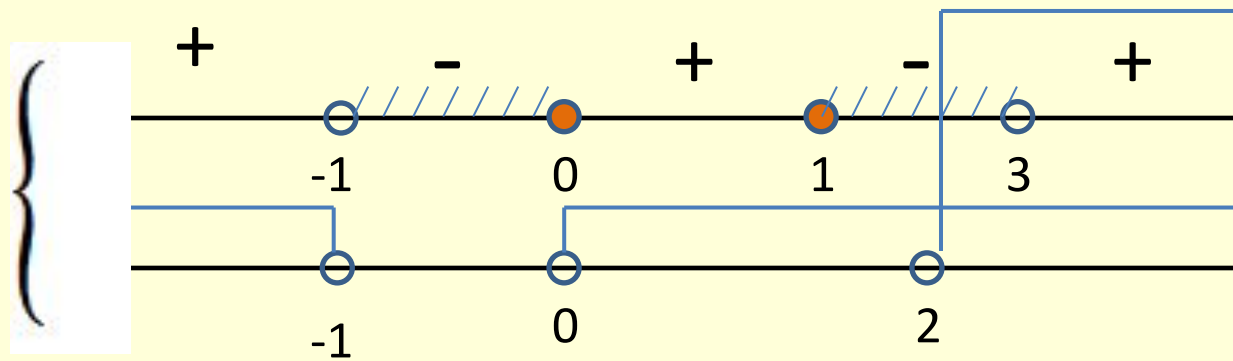
ОТВЕ
Т:

(3; 6)

[НАЗА](#)
Д



Пример 7



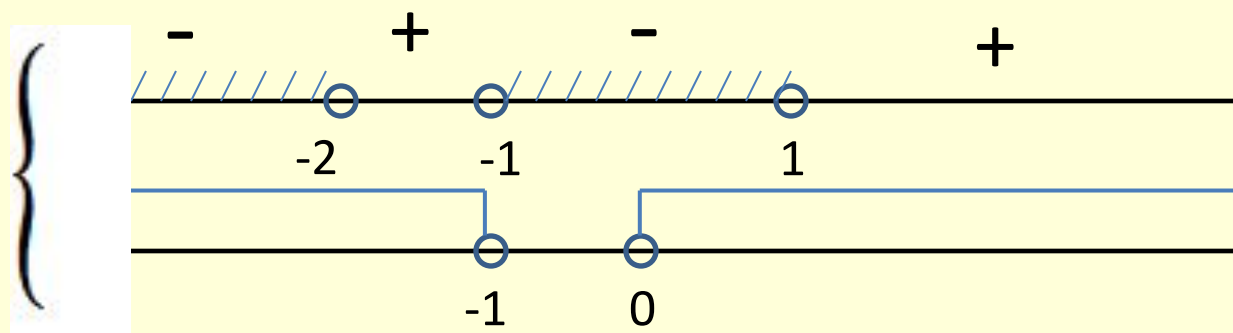
ОТВЕ (2;3)

Т:

НАЗА
Д



Пример 8



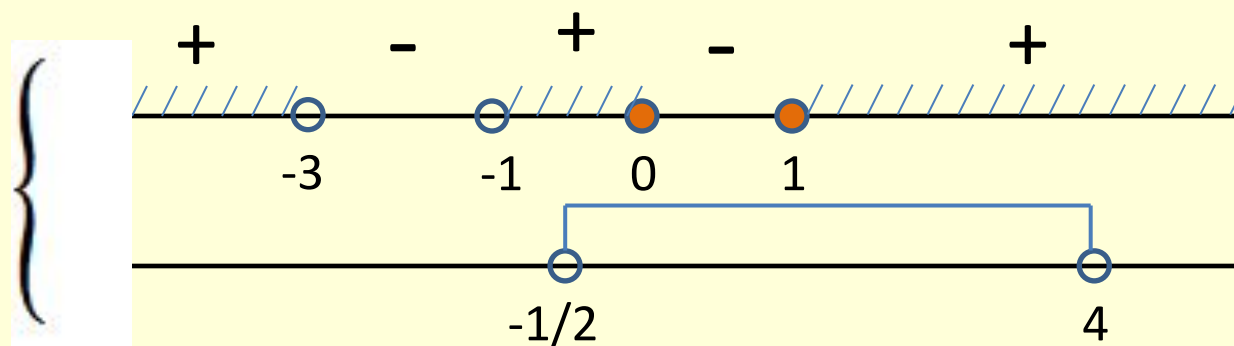
ОТВЕ
Т:

$$(-\infty; -2) \cup (0; 1)$$

[НАЗА](#)
Д



Пример 9



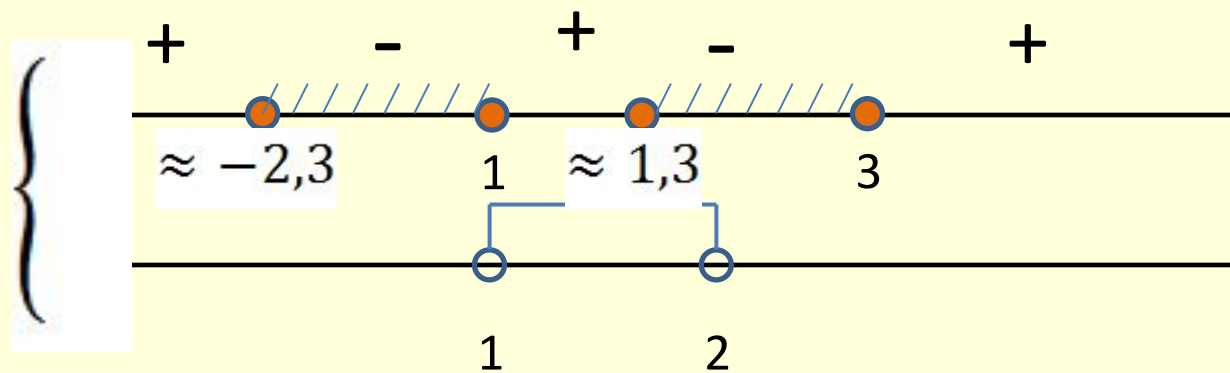
ОТВЕ
Т:

$$\left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup [1; 4)$$

НАЗА
Д



Пример 10



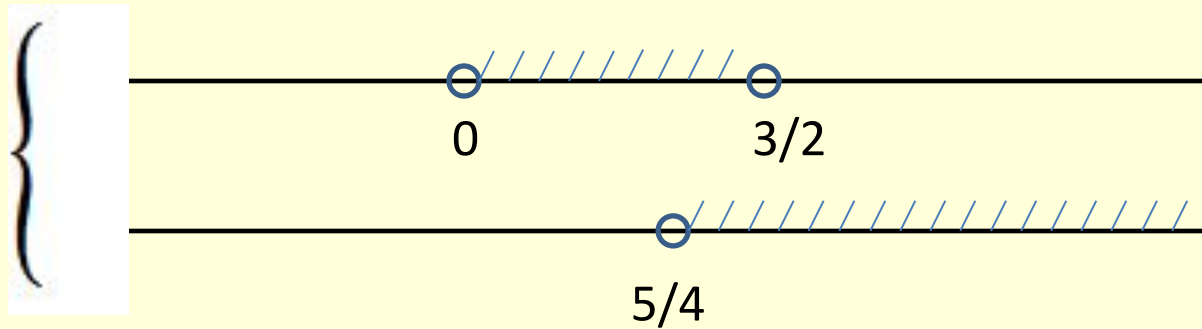
ОТВЕ
Т:

$$\left[\frac{\sqrt{13} - 1}{2}; 2 \right)$$

[НАЗА](#)
Д



Пример 11



ОТВЕ
Т:

$$x \in \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$$



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



- Корянов А. П., Прокофьев А. А. – Методы решения неравенств с одной переменной. – 2011.
- Моденов В. П. – Пособие по математике. – 1972.
- Ткачук В.В. - Математика абитуриенту. Москва: МЦНМО, 2008.