Метод рационализации

Введение

Решение неравенств - важный раздел в математике. Успешное изучение математики невозможно без умения решать разнообразные неравенства, поэтому мы решили рассмотреть один из способов решения неравенств – метод рационализации. В школьной программе он не изучается, но его применение значительно облегчает решение задания С3 ЕГЭ, в частности логарифмических и показательных неравенств.

Теоретическое обоснование метода

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, неравенство $\log_{a(x)}b(x) > \log_{a(x)}c(x)$ вида является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)}b(x) > \log_{a(x)}c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Недостатком данного метода является необходимость решения семи неравенств, не считая двух систем и одной совокупности. Уже при данных квадратичных функциях решение совокупности может потребовать много времени. Можно предложить альтернативный, менее трудоемкий метод решения этого стандартного неравенства. Это метод рационализации неравенств, известный в математической литературе под названием декомпозиции.

  Метод рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x), при котором неравенство G(x) $>$0 равносильно неравенству F(x) $>$0 в области определения выражения F(x).

Сведение логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида

$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$ **, (1)**

где $a(x), f(x), g(x)$ **- некоторые функции**

Теорема 1.

Логарифмическое неравенство $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$ ***равносильно следующей системе неравенств*:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Доказательство

Начнем с того, что первые четыре неравенства системы (2) задают множество допустимых значений исходного логарифмического неравенства. Обратим теперь внимание на пятое неравенство.

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель этого неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство $f(x) \le g(x)$.

Если $a(x) > 1$, то первый множитель пятого неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство $f(x) \ge g(x)$.

Таким образом, пятое неравенство системы включает в себя оба случая предыдущего метода.

Терема доказана.

Сведение показательных неравенств к системе рациональных неравенств

Теперь рассмотрим показательное неравенство вида

$$a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)} \quad 3)$$

Так же, как в предыдущем пункте, $a(x), f(x), g(x)$ - некоторые функции.

И снова вспомним, что традиционное решение такого неравенства приводит к *двум случаям*. <u>В первом</u> основание степени положительно, но меньше единицы (знак неравенства обращается), <u>во втором</u> случае основание степени больше единицы (знак неравенства сохраняется).

Как и в случае с логарифмическим неравенством, имеется возможность значительно укоротить решение задачи, используя метод рационализации. Этот метод основан на следующей теореме.

<u>Теорема 2.</u>

Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)}$ ***равносильно следующей системе неравенств*****:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Доказательст во

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель третьего неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство $f(x) \le g(x)$

$a(x) > 1$

Если $a(x) > 1$, то первый множитель третьего неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство $f(x) \ge g(x)$

.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h, p, q – выражения с переменной x ($h > 0, h \neq 1, f > 0, g > 0$),

a – фиксированное число ($a > 0, a \neq 1$).

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$log_h f - log_h g$ $log_h - 1$ $log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$log_f h - log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\|f\| - \|g\|$	$(f-g)(f+g)$

$\log_a f - \log_a g$

<u>Доказательство</u>

Пусть $\log_a f - \log_a g > 0$, то есть $\log_a f > \log_a g$, причём $a > 0,\ a \neq 1,\ f > 0,\ g > 0$.
Если $0 < a < 1$, то по свойству убывающей логарифмической функции имеем $f < g$. Значит, выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ f - g < 0 \end{cases}$$

Откуда следует неравенство $(a - 1)(f - g) > 0$ верное на области определения выражения $F = \log_a f - \log_a g$.
Если $a > 1$, то $f > g$. Следовательно, имеет место неравенство $(a - 1)(f - g) > 0$. Обратно, если выполняется неравенство $(a - 1)(f - g) > 0$ на области допустимых значений $(a > 0,\ a \neq 1,\ f > 0,\ g > 0)$, то оно на этой области равносильно совокупности двух систем.

$$\begin{cases} a - 1 < 0 \\ f - g < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - 1 > 0 \\ f - g > 0 \end{cases}$$

Из каждой системы следует неравенство $\log_a f > \log_a g$, то есть $\log_a f - \log_a g > 0$.
Аналогично, рассматриваются неравенства $F < 0$, $F \leq 0$, $F \geq 0$.

$\log_h f - \log_h g$

Пусть некоторое число $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда имеем

$$\log_h f - \log_h g = \frac{\log_a f}{\log_a h} - \frac{\log_a g}{\log_a h} = \frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a h}.$$

Знак последнего выражения совпадает со знаком выражения $\dfrac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)}$

или $(h-1)(f-g)$.

$Log_f h - log_g h$

Так как

$$log_f h - log_g h = \frac{\log_g h}{\log_g f} - \log_g h = \log_g h \log_g f - \log_g h = \log_g h(\log_g f - 1)$$

то, используя замены 2а и 2б, получаем, что знак последнего выражения совпадает со знаком выражения ***(f - 1)(g - 1)(h - 1)(g – f).***

$h^f - h^g \; (h > 0)$

Из неравенства $h^f - h^g > 0$ следует $h^f > h^g$. Пусть число a > 1, тогда $\log_a h^f > \log_a h^g$ или $(h - g)\log_a h > 0$.

Отсюда с учётом замены 1б и условия $a > 1$ получаем

$(f - g)(a - 1)(h - 1) > 0$, $(f - g)(h - 1) > 0$.

Аналогично, доказываются неравенства F < 0, F ≤ 0, F ≥ 0.

$f^h - g^h \; (f > 0, g > 0)$

Доказательство проводится аналогично доказательству 4.

$|f| - |g|$

Доказательство замены 6 следует из равносильности неравенств $|p| > |q|$ и $p^2 > q^2$ ($|p| < |q|$ и $p^2 < q^2$).

Пример 1.

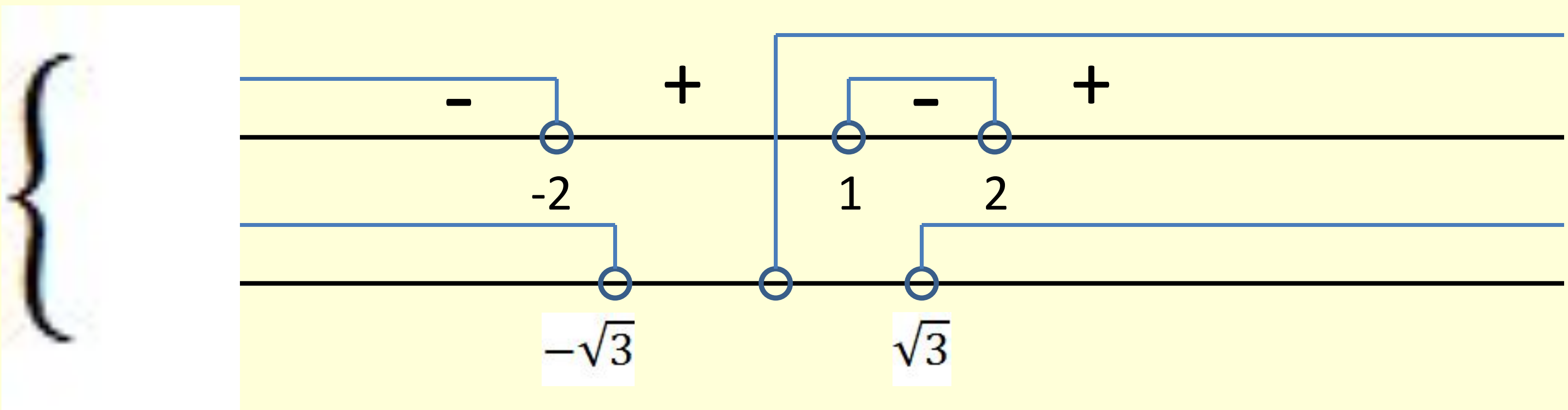
Решить неравенство:

$$\log_x(x^2-3)<0$$

Решение:

$$\begin{cases} (x-1)(x^2-3-1)<0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ x^2-3>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x+2)<0 \\ x>0 \\ x\neq 1 \\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0 \end{cases}$$



ОТВЕ
Т: $(-\sqrt{3};2)$

Пример 2.

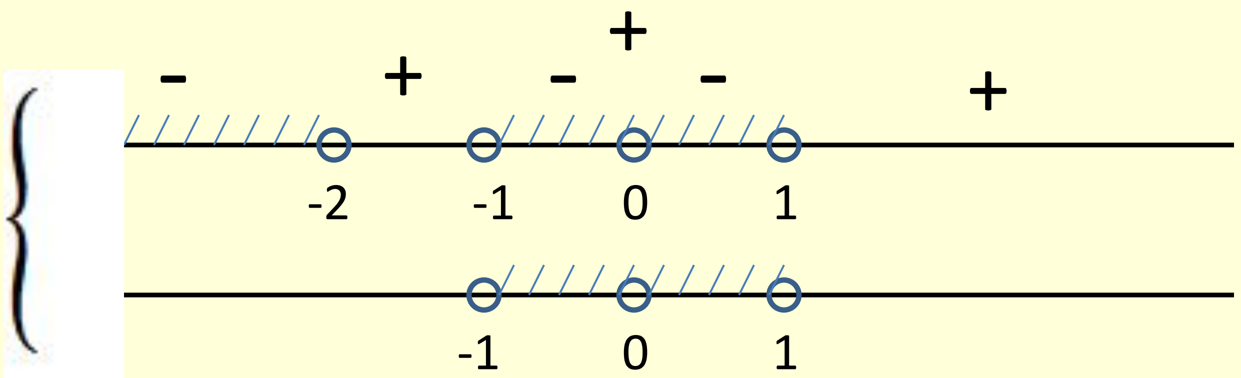
Решить неравенство:

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$$

$$\begin{cases} (x+3-1)\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-1\right) > 0; \\ x+3>0; \\ x+3 \neq 1; \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)\dfrac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-1;0)\cup(0;1)$

Пример 3.

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0$$

Решение:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x \sqrt{3-x}-1\right) \geq 0 \\ \log_x \sqrt{3-x} \rangle 0 \\ 3-x \rangle 0 \\ x \rangle 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-1)\left(\sqrt{3-x}-x\right) \geq 0 \\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right) \rangle 0 \\ x \langle 3 \\ x \rangle 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(3-x-x^2\right) \leq 0 \\ (x-1)(3-x-1) \rangle 0 \\ x \langle 3 \\ x \rangle 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x - \dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \geq 0 \\ 1 \langle x \langle 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x \langle 2$$

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

Пример 4.

Решить неравенство:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$$

Решение:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) - \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \geq 0$$

$$\begin{cases} (12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36\quad -32) \geq 0 \\ 12x^2-41x+35 \rangle 0 \\ 2x^2-5x+3 \rangle 0 \\ 12x^2-41x+34 \neq 0 \\ 2x^2-5x+2 \neq 0 \\ 3-x \rangle 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
(x-2)^4\left(x-\dfrac{8}{5}\right)\left(x-\dfrac{17}{12}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\geq 0\\
\left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)\rangle 0\\
(x-1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\rangle 0\\
\left(x-\dfrac{17}{12}\right)(x-2)\neq 0\\
(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\neq 0\\
x\langle 3
\end{cases}
$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left[\dfrac{8}{5};\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};2\right)\cup(2;3)$

Решите примеры

Пример 5.

$$\log_{2x}(2x^2-4x+6)\le\log_{2x}(x^2+x)$$

ОТВЕТ

Пример 6.

$$\frac{\log_x(x-3)-\log_x(9-x)}{\log_{x-1}x}<0$$

ОТВЕТ

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right)\cdot\log_{x-2}(x^2+1)\le 0$$

ОТВЕТ

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2}>\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

Пример 9. $\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \le 2$

ОТВЕТ

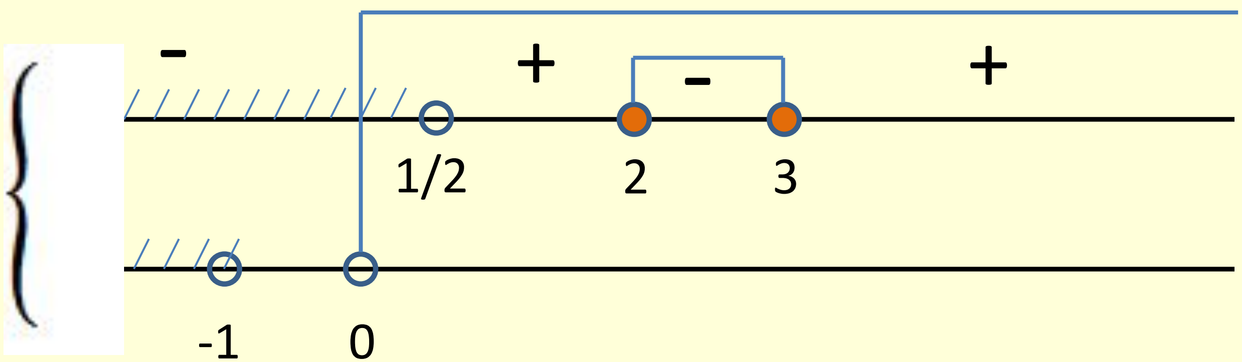
Пример 10. $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3 - x}\right) \ge 0$

ОТВЕТ

Пример 11. $\log_{2x+1}(4x - 5) + \log_{4x-5}(2x + 1) \le 2$

ОТВЕТ

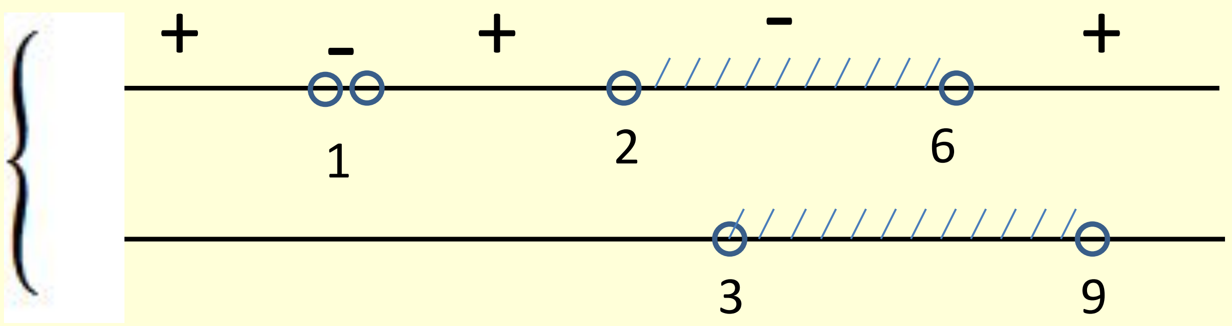
Пример 5



ОТВЕТ: $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup[2;3]$

НАЗАД

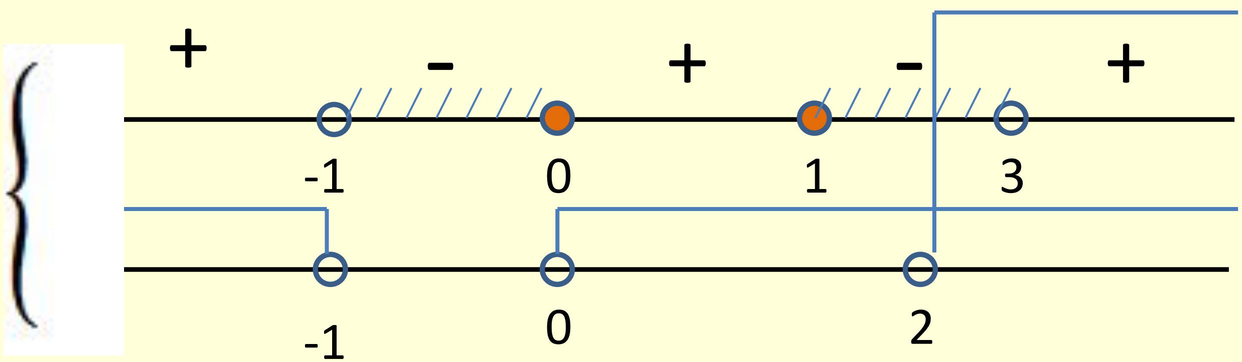
Пример 6



ОТВЕТ: $(3;6)$

НАЗАД

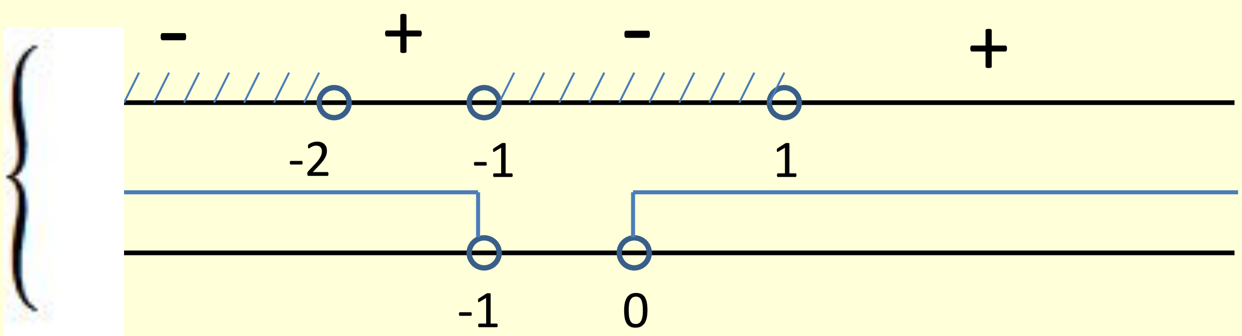
Пример 7



ОТВЕТ: (2;3)

НАЗАД

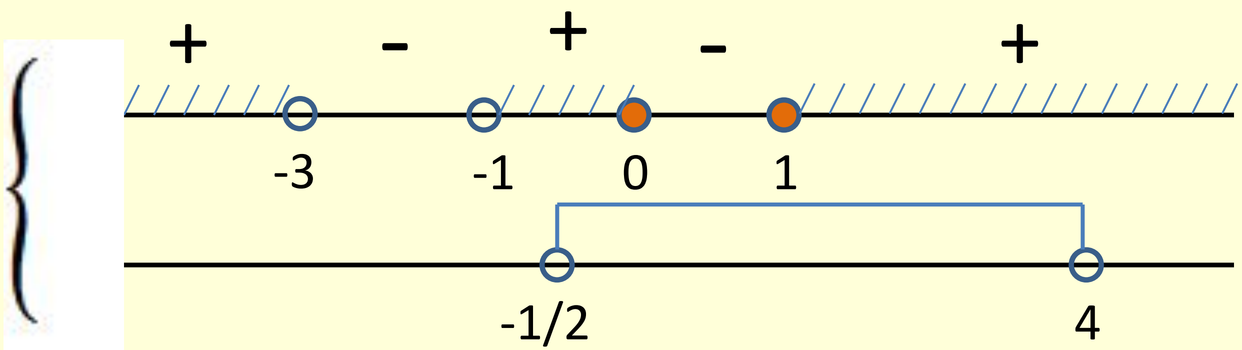
Пример 8



ОТВЕТ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

НАЗАД

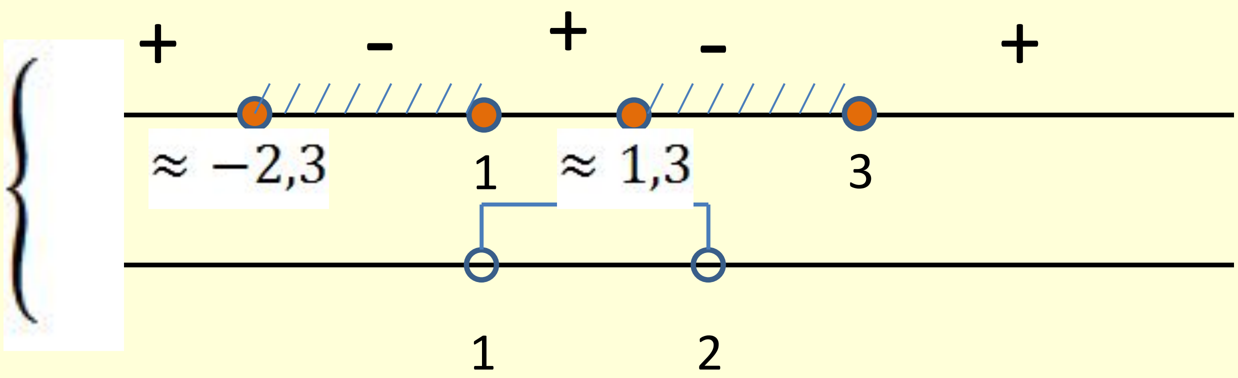
Пример 9



ОТВЕТ: $(-\frac{1}{2}; 0] \cup [1; 4)$

НАЗАД

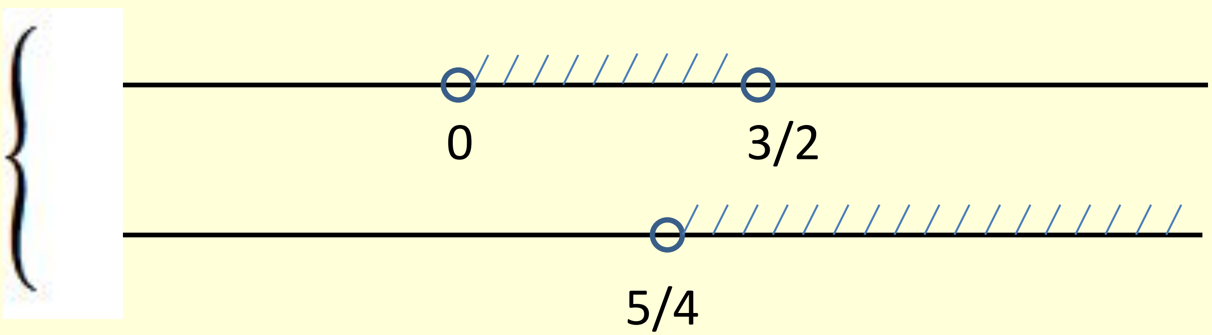
Пример 10



ОТВЕТ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}; 2\right)$

НАЗАД

Пример 11



ОТВЕТ: $x \in \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$

СПИСОК использованной литературы

- Корянов А. Г., Прокофьев А. А. – Методы решения неравенств с одной переменной. – 2011.
- Моденов В. П. – Пособие по математике. – 1972.
- Ткачук В.В. - Математика абитуриенту. Москва: МЦНМО, 2008.