Методические рекомендации по решению задач ЕГЭ по математике

Дубова Елена Владимировна, учитель математики муниципального автономного общеобразовательного учреждения г. Владимира «Гимназия № 35»
Стаж работы – 24 года

Структура заданий

Часть 1 содержит 8 заданий (задания 1–8) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 4 задания (задания 9–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби и 7 заданий (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Структура заданий
1 часть

1. Простейшие текстовые задачи
2. Чтение графиков и диаграмм
3. Квадратная решётка, координатная плоскость
4. Начала теории вероятностей
5. Простейшие уравнения
6. Планиметрия: задачи, связанные с углами
7. Производная и первообразная
8. Стереометрия

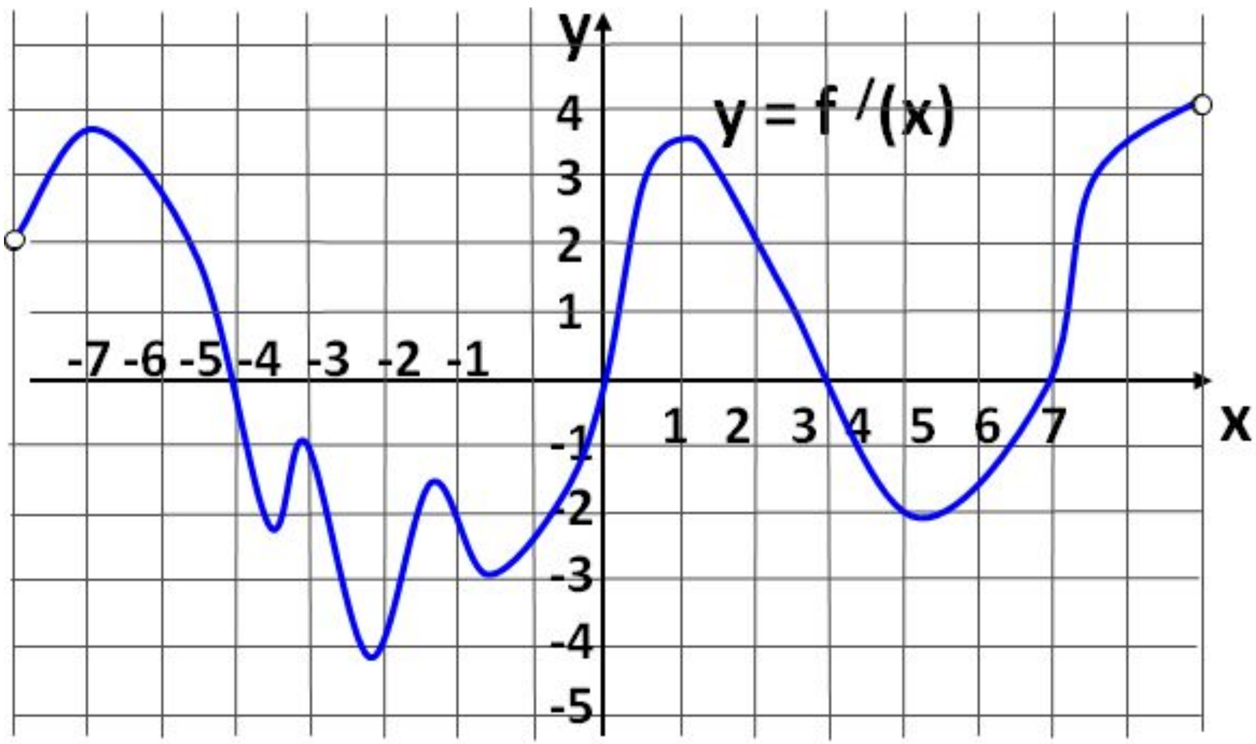
Структура заданий
2 часть

9. Вычисления и преобразования
10. Задачи с прикладным содержанием
11. Текстовые задачи
12. Наибольшее и наименьшее значение функций
13. Уравнения
14. Стереометрическая задача
15. Неравенства
16. Планиметрическая задача
17. Финансовая математика
18. Задача с параметром
19. Числа и их свойства

Задание № 7

Производная и первообразная

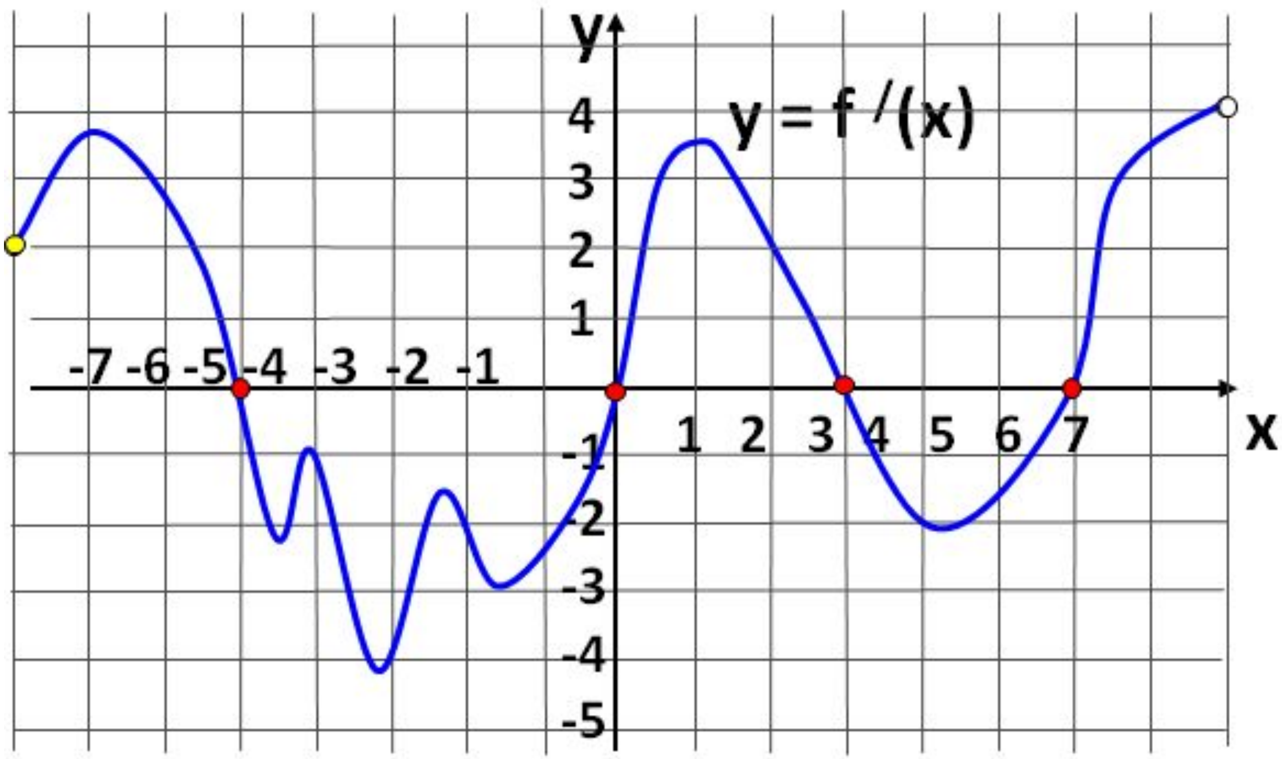
На рисунке изображен график производной функции y =f (x), заданной на промежутке (- 8; 8).



Задание № 7

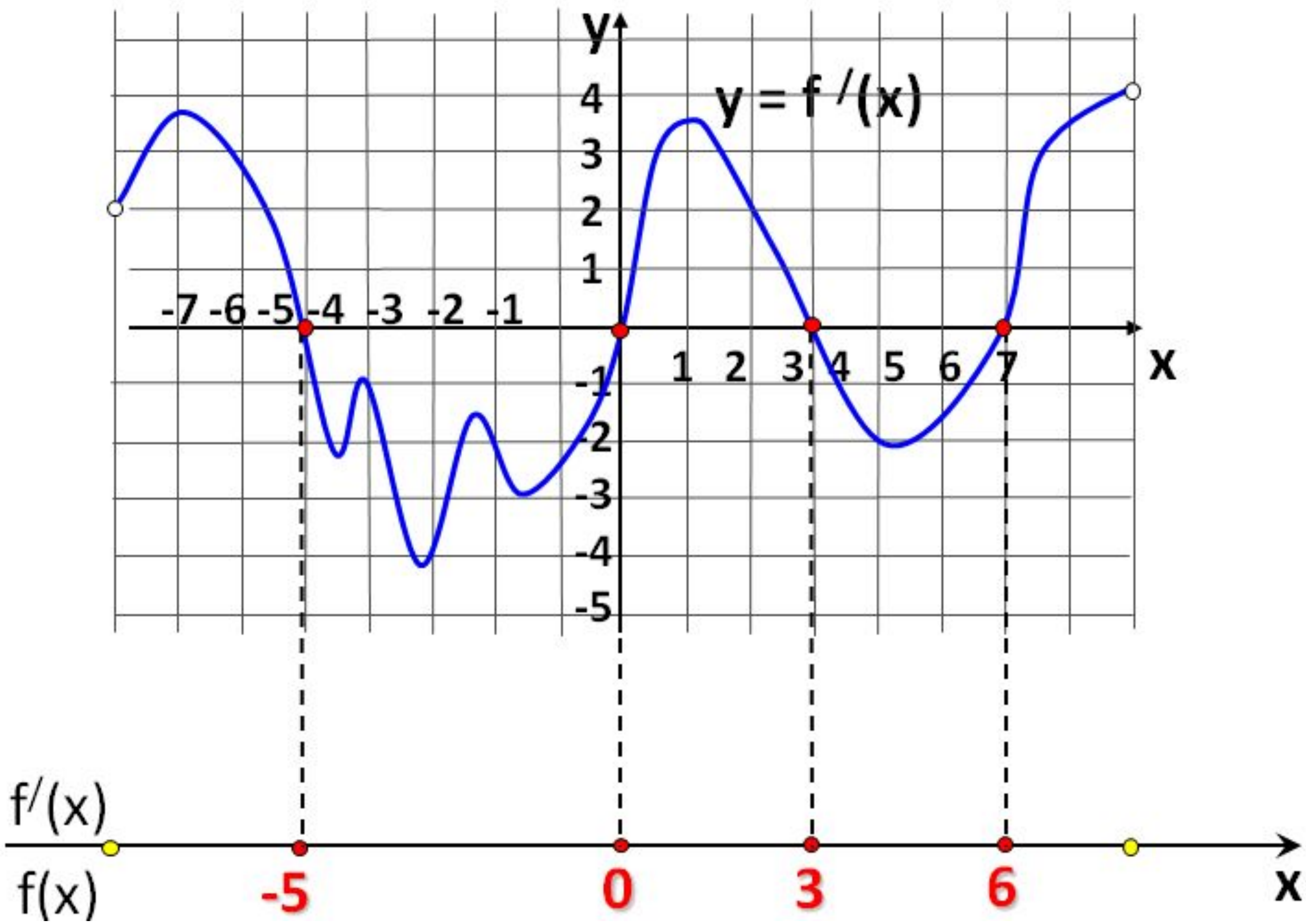
Производная и первообразная

На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-8; 8)$.



Задание № 7
Производная и первообразная

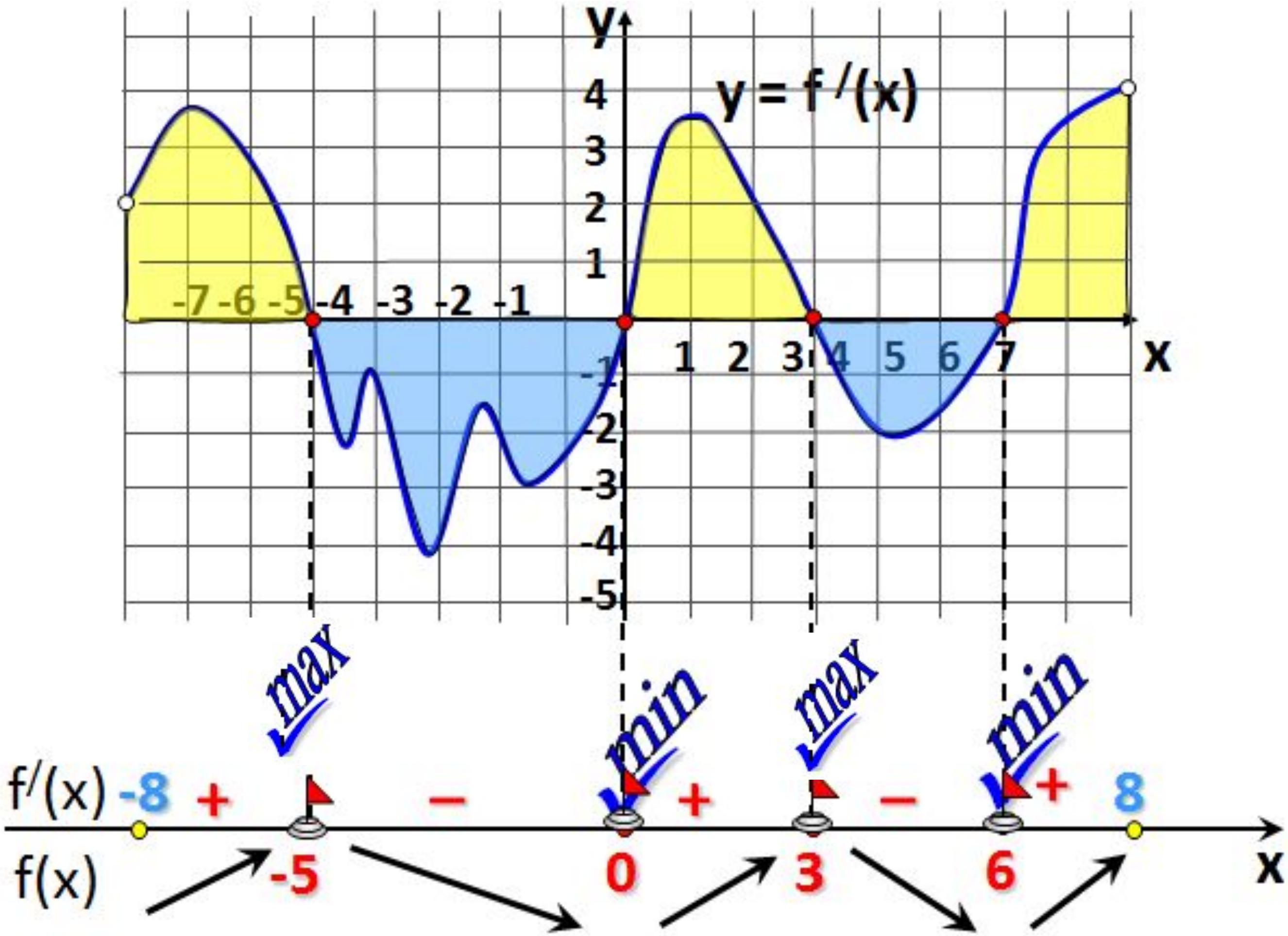
На рисунке изображен график производной функции y =f (x), заданной на промежутке (- 8; 8).



Задание № 7

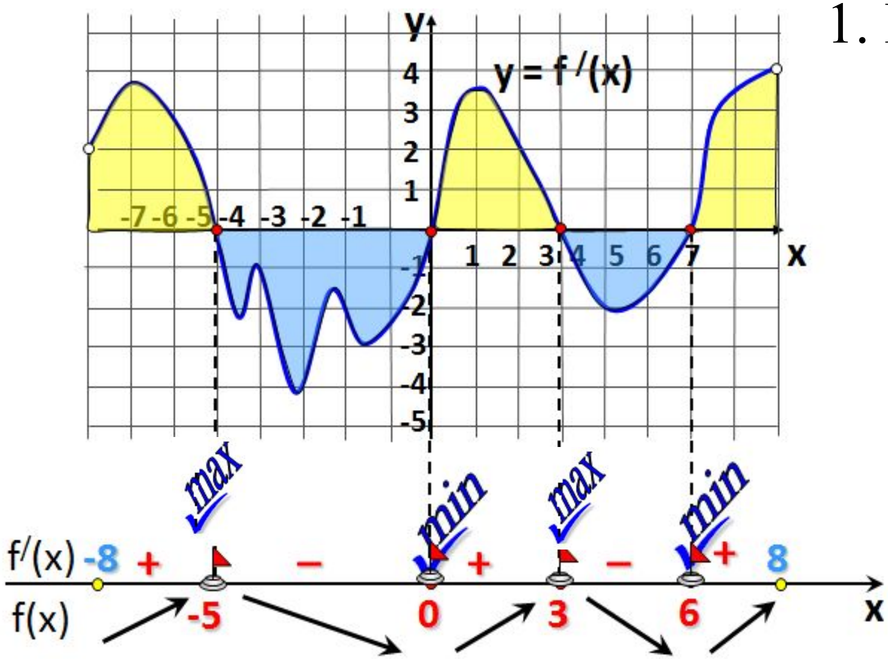
Производная и первообразная

На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $(-8; 8)$.



Задание № 7

Производная и первообразная



1. Найдите количество точек экстремума функции на интервале (-8;8).

Ответ: 4

2. Найдите количество точек экстремума функции у =f (x) на отрезке [– 3; 7]

Ответ: 3

3. Найдите точку экстремума функции у =f (x) на отрезке [– 6; –1]

Ответ: -5

4. Найдите промежутки убывания функции у =f (x). В ответе укажите длину наибольшего из них.

Ответ: 5

5. В какой точке отрезка [– 4; –1] функции у =f (x) принимает наибольшее значение?

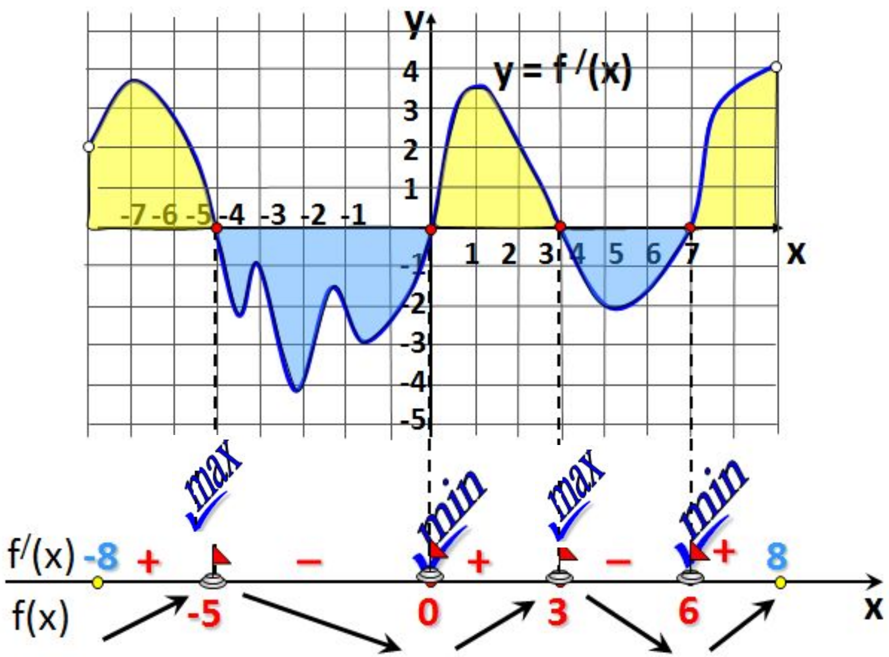
Ответ: - 4

6. В какой точке отрезка [1; 4] функции у =f (x) принимает наибольшее значение?

Ответ: 3

Задание № 7

Производная и первообразная



7. Найдите промежутки возрастания функции y =f (x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

Сложим целые числа:
-7, -6, -5, 0, 1, 2, 3, 6, 7

Ответ: 1

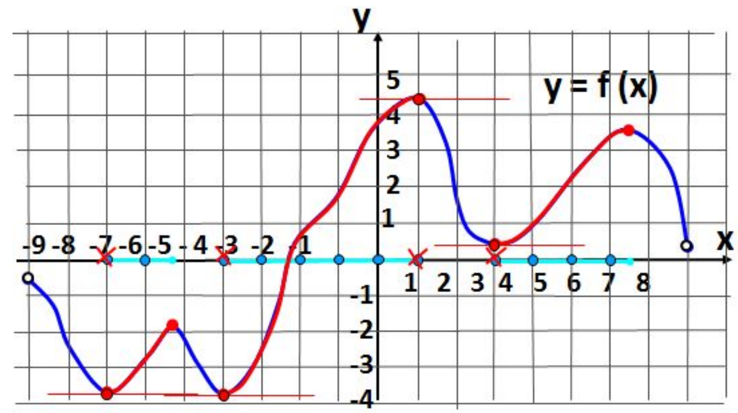
8. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = 2x - 11$ или совпадает с ней.

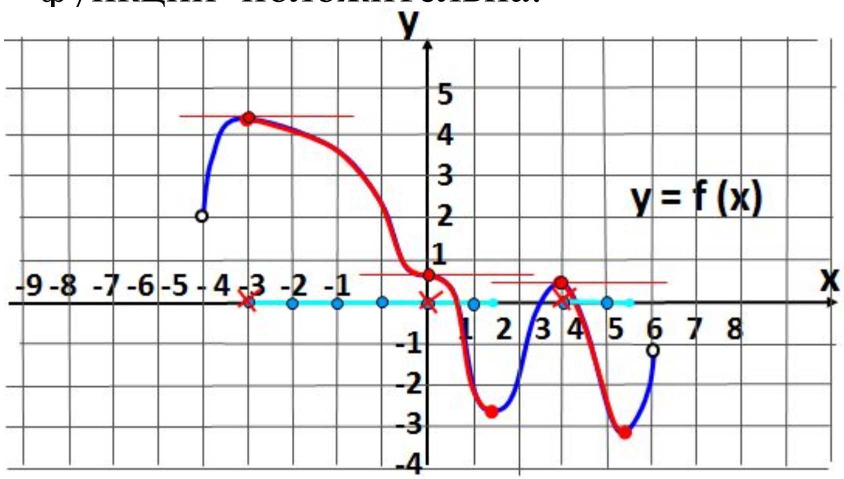
Ответ: 4

Задание № 7
Производная и первообразная

1. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-9; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Ответ: 8.



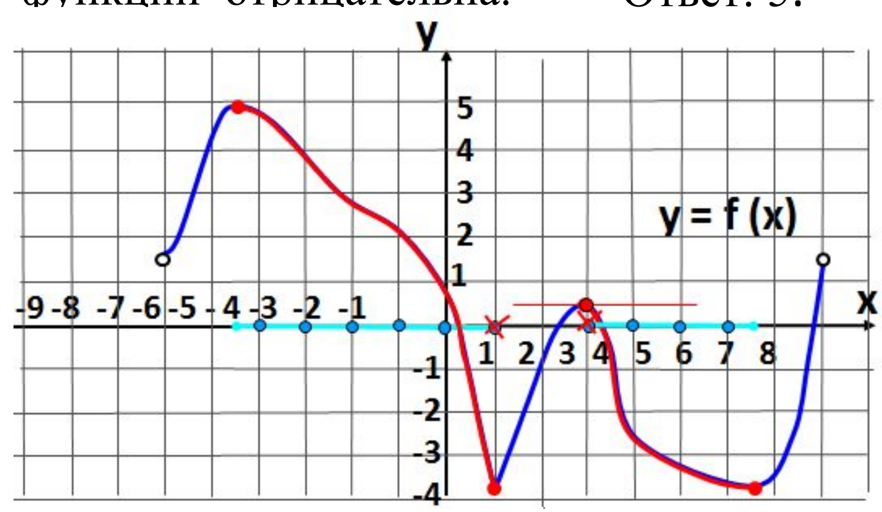


2. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-5; 5). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Ответ: 5.

3. На рисунке изображен график функции y = f(x), определенной на интервале (-6; 8). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

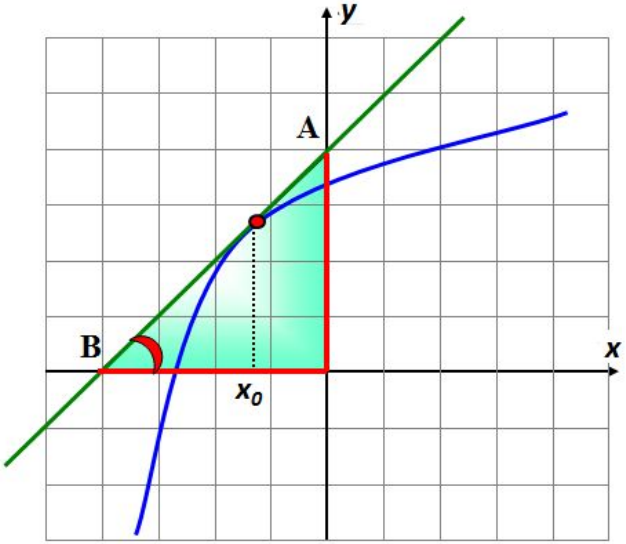
Ответ: 8.



Задание № 7

Производная и первообразная

На рисунке изображен график функции y =f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.



I способ

Геометрический смысл производной: $\mathbf{f'(x_0)=k = tg}\ \boldsymbol{\alpha}$

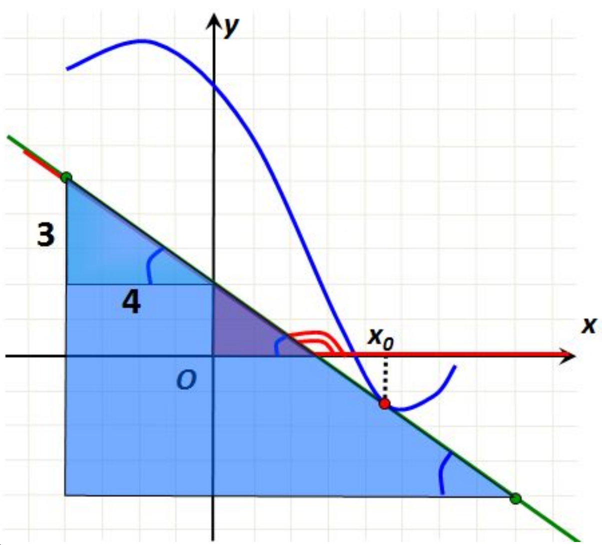
Угол наклона касательной с осью Ох острый, значит $\boldsymbol{k > o}$.

Из прямоугольного треугольника находим

$\mathbf{f'(x_0)}$= tgα = 4 : 4 =1

II способ

Уравнение прямой в прямоугольной системе координат имеет вид : y=kx+m. Искомая прямая пересекает ось OY в точке A (0;4), поэтому y=kx+4. Подставим координаты точки B(-4;0) в составленное уравнение: 0=- 4k+4, k=1. : $\mathbf{f'(x_0)=k = 1}$. **Ответ: 1**



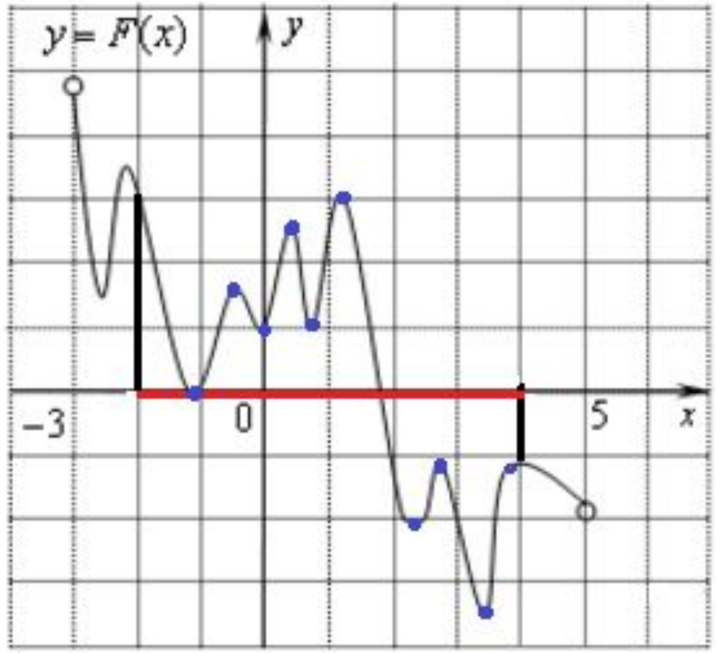
Угол, который составляет касательная с положительным направлением оси Ох, **тупой**. Значит, значение производной в точке x_0 **отрицательно**. Нужно найти тангенс смежного угла. Для этого подбирается треугольник с катетами-целыми числами.

$\mathbf{f'(x_0)= - 3:4= - 0,75}$

Ответ: -0,75

Задание № 7
Производная и первообразная

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-2; 4]$.



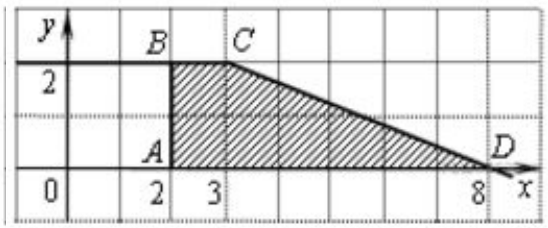
По определению первообразной на интервале $(-3; 5)$ справедливо равенство $f(x)=F'(x)$

Следовательно, решениями уравнения $f(x)=0$ являются точки экстремумов изображенной на рисунке функции $F(x)$.

На отрезке $[-2;4]$ десять точек экстремума. **Ответ: 10**.

Задание № 7
Производная и первообразная

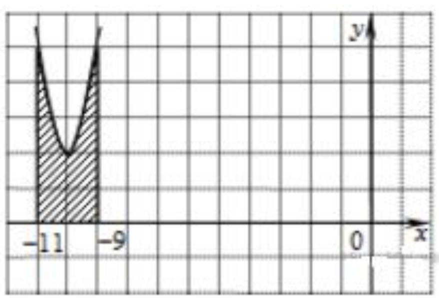
1. На рисунке изображён график некоторой функции (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



$$F(8) - F(2) = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7.$$

Ответ: 7

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



<u>I способ</u>

$$F(-9) = (-9)^3 + 30\cdot(-9)^2 + 302\cdot(-9) - \frac{15}{8} = -729 + 2430 - 2718 - \frac{15}{8} = -1018\frac{7}{8}.$$

$$F(-11) = (-11)^3 + 30\cdot(-11)^2 + 302\cdot(-11) - \frac{15}{8} = -1331 + 3630 - 3322 - \frac{15}{8} = -1024\frac{7}{8}.$$

$$F(-9) - F(-11) = -1018\frac{7}{8} + 1024\frac{7}{8} = 6.$$

<u>II способ</u>

$$f(x) = F'(x) = 3x^2 + 60x + 302 = 3(x^2 + 20x + 100) + 2 = 3(x+10)^2 + 2,$$

$$\int_{-11}^{-9} (3(x+10)^2 + 2)dx = ((x+10)^3 + 2x)\Big|_{-11}^{-9} = 1 - (-1) + 2(-9 - (-11)) = 2 + 4 = 6.$$

Ответ: 6

Задание № 10

Задачи с прикладным содержанием

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

$$l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}, \qquad \frac{Rh}{500} = l^2, \qquad h = \frac{500l^2}{R}.$$

$$1. h_1 = \frac{500 \cdot 4{,}8^2}{6400} \text{м} = 1{,}8\text{м}$$

$$2. h_2 = \frac{500 \cdot 6{,}4^2}{6400} \text{м} = 3{,}2\text{м}$$

3. Следовательно, чтобы видеть горизонт на более далеком расстоянии, наблюдателю нужно подняться на 3,2м-1,8м=1,4м. Для этого ему нужно подняться на 1,4м:0,2м=7 ступенек.

Ответ: 7 ступенек.

Задание № 11
Текстовые задачи

Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

За 100 % принимается то, с чем сравнивают

Решение:
1. Стоимость курки составляет 100%, тогда стоимость четырех одинаковых рубашек составляет 92% стоимости куртки.
2. Стоимость одной рубашки составляет 92%:4=23% стоимости куртки
3. Стоимость пяти рубашек составляет 23% · 5=115% стоимости куртки. Это превышает стоимость куртки на 15%.

Ответ: 15%

Задание № 11
Текстовые задачи

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

Решение:

Пусть x км/ч – скорость 1 мотоциклиста,

t ч – время встречи мотоциклистов 1 раз, тогда

(x+21) км/ч – скорость 2 мотоциклиста,

(xt) км – расстояние которое проехал до встречи 1 мотоциклист,

((x+21)t) км– расстояние которое проехал до встречи 2 мотоциклист.

Так как мотоциклисты стартовали из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, то второй гонщик проехал до первой встречи на пол круга (7 км) больше, поэтому

$$(x+21)t-xt=7$$

$$xt+21t-xt=7$$

$t = \frac{1}{3}$ часа t=20 мин

Ответ: 20 мин

Задание № 11
Текстовые задачи

Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение:

	1 сплав	2 сплав	3 сплав
Масса сплава, кг	x	y	x+y =200
Масса никеля, кг	0,1x	0,3y	0,1x+0,3y=0,25·200
Концентрация	10%	30%	25%

(y-x) - ?

$\begin{cases} x + y = 200, \\ 0{,}1x + 0{,}3y = 50; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 200, \\ x + 3y = 500; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y = 300, \\ x + y = 200; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 50, \\ y = 150; \end{cases}$ y-x=100

Ответ: 100 кг.

Задание № 11
Текстовые задачи

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение:

	Виноград	**Изюм**
Масса, кг	19:0,1=190	20
Масса питательного вещества, кг	19	20·0,95=19
Концентрация	10 %	95%

Ответ: 190 кг

Задание № 12

Наибольшее и наименьшее значение функции

Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{4-4x-x^2}$

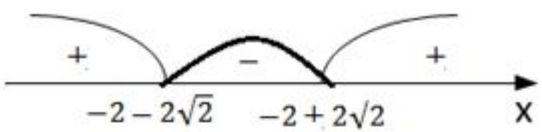
1 способ

1. D(f): $4-4x-x^2\geq 0$,

$x^2+4x-4\leq 0$

$x^2+4x-4=0$

$x_{1;2}=-2\pm 2\sqrt{2}$



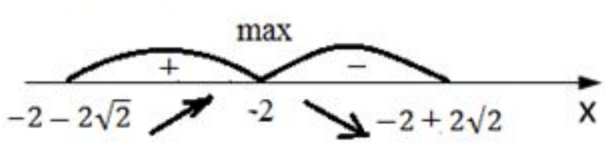
$D(f)=\left[-2-2\sqrt{2};-2+2\sqrt{2}\right]$

2. $y' = \dfrac{(4-4x-x^2)'}{2\sqrt{4-4x-x^2}}$

$y' = \dfrac{-2x-4}{2\sqrt{4-4x-x^2}}$

3. $-2x-4=0$

$x=-2$



Ответ: -2

2 способ

$y=\sqrt{4-4x-x^2}$

$y=\sqrt{-(x^2+4x-4)}$

$y=\sqrt{-(x^2+4x+4-8)}$

$y=\sqrt{-(x+2)^2+8}$

Функция принимает наибольшее значение при $x=-2$

Ответ: -2

3 способ

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке

$x_{max}=-\dfrac{b}{2a}$, $x_{max}=-\dfrac{4}{2}=-2.$

Поскольку функция $y=\sqrt{t}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: -2

Задание № 12

Наибольшее и наименьшее значение функции

Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$

1 способ

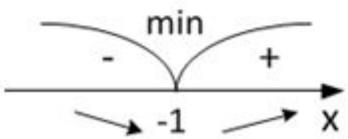
1. D(f)=R

2. $y' = 2^{x^2+2x+5} \ln 2\, (x^2 + 2x + 5)'$

$y' = (2x + 2)2^{x^2+2x+5} \ln 2$

3. $y' = 0$: $2x + 2 = 0$

$x = -1$



4. $y(-1) = 2^{(-1)^2+2\cdot(-1)+5} = 2^4 = 16$

Ответ: 16

2 способ

$y = 2^{x^2+2x+5}$

$y = 2^{x^2+2x+1+4}$

$y = 2^{(x+1)^2+4}$

Функция принимает наименьшее значение при $x = -1$.

$y_{\text{наим}} = 2^{(-1+1)^2+4} = 2^4 = 16$

Ответ: 16

3 способ

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, $x_{min} = -\frac{2}{2} = -1$. Поскольку функция $y = 2^t$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, то она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума показатель степени. Значение функции в этой точке равно $y_{\text{наим}} = 2^{(-1+1)^2+4} = 2^4 = 16$

Ответ: 16

Задание № 13

Уравнения

а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\, 3\pi\right]$.

Решение:

$$\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0,$$

а) $\cos^2 x-\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-\cos^2 x-\sin^2 x=0,$

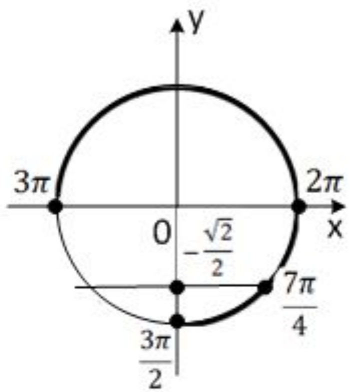
$-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0,$

$-\sin x\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0,$

$\sin x=0$ или $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\pi n, n\in Z, x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z, x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\epsilon Z$

б) 1 способ



.

Ответ: а) $\pi n, n\in Z; -\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\epsilon Z; -\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\epsilon Z$

б) $2\pi;\ 3\pi; \frac{7\pi}{4}$

2 способ

$x=\pi n$

$\frac{3\pi}{2}\le \pi n\le 3\pi,$

$\frac{3}{2}\le n\le 3.$

Так как $n\in Z$, то

$n=2:\ x=2\pi$

$n=3:\ x=3\pi$

$$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$\frac{3\pi}{2}\le -\frac{\pi}{4}+2\pi k\le 3\pi,$

$\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\le 2\pi k\le 3\pi+\frac{\pi}{4},$

$\frac{7\pi}{4}\le 2\pi k\le \frac{13\pi}{4},$

$\frac{7}{8}\le k\le \frac{13}{8}.$

Так как $k\in Z$, то

$k=1: x=-\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{7\pi}{4}$

$$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$$

$\frac{3\pi}{2}\le -\frac{3\pi}{4}+2\pi k\le 3\pi,$

$\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}\le 2\pi k\le 3\pi+\frac{3\pi}{4},$

$\frac{9\pi}{4}\le 2\pi k\le \frac{15\pi}{4},$

$\frac{9}{8}\le k\le \frac{15}{8}.$

Так как $m\in Z$, то неравенство решений не имеет

Задание № 13
Уравнения

Решите уравнение $\frac{4\cos^2 x + 8\sin x - 7}{\sqrt{-tg\,x}} = 0$

Решение:

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 8\sin x - 7 = 0, \\ -tg\,x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 4sin^2 x + 8\sin x - 7 = 0, \\ tg\,x < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 - 4sin^2 x + 8\sin x - 7 = 0, \\ tg\,x < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0, \\ tg\,x < 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ tg\,x < 0. \end{cases}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$

$4sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

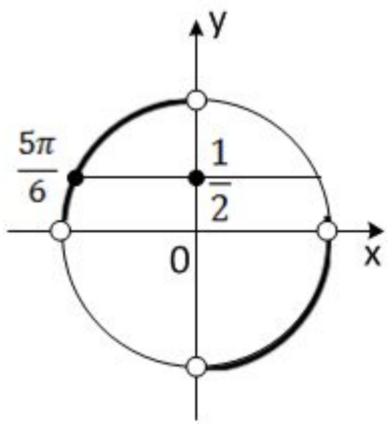
Пусть $\sin x$ =t, тогда

$4t^2 - 8t + 3 = 0$

$t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{3}{2}$

решений нет



Задание № 13

Уравнения

а) Решите уравнение $7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot 4^{x^2-3x}=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\,2]$.

$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-48\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^{x^2-3x+1}=0$

$7\cdot 9^{x^2-3x+1}+5\cdot 6^{x^2-3x+1}-12\cdot 4^{x^2-3x+1}=0$

Разделим правую и левую части уравнения на 6^{x^2-3x+1}

$7\cdot\left(\frac{9}{6}\right)^{x^2-3x+1}+5-12\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{x^2-3x+1}=0,$

$7\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}+5-12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x+1}=0.$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=t, t>0$, тогда

$7t-12\cdot\frac{1}{t}+5=0,$

Так как $t\neq 0$, то умножим правую и левую части уравнение на t.

$7t^2+5t-12=0$

Так как $t>0$, то $t=1$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x+1}=1,$

$x^2-3x+1=0;$

$x_{1;2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

$2<\sqrt{5}<3,$

$-3<-\sqrt{5}<-2,$

$0<3-\sqrt{5}<1,$

$0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2},$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\notin[-1;2].$

$2<\sqrt{5}<3,$

$-3<-\sqrt{5}<-2,$

$0<3-\sqrt{5}<1,$

$0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2},$

$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\in[-1;2].$

Ответ:

а) $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Задание № 14

Стереометрическая задача

Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и B_1D.

1. Проведём через точку B_1 прямую, параллельную BE. Она пересечёт продолжение ребра CC_1 в точке F. Угол между прямыми BE и B_1D равен $\angle DB_1F$ или смежному с ним углу.

2. Пусть ребро куба равно a. $B_1D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

3. Рассмотрим прямоугольный ΔBCE. По теореме Пифагора

$BE^2 = BC^2 + CE^2$

$$BE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2};$$

$$B_1F = BE = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

4. Рассмотрим прямоугольный ΔDCF. По теореме Пифагора

$DF^2 = DC^2 + CF^2$

$$DF = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

5. Рассмотрим ΔDB_1F.

По теореме косинусов

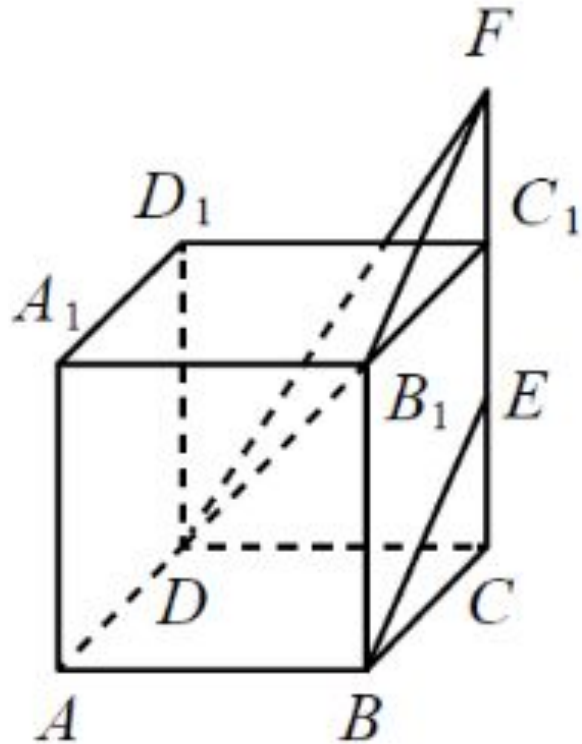
$$DF^2 = B_1D^2 + B_1F^2 - 2\,B_1D \cdot B_1F \cdot \cos\angle DB_1F;$$

$$\left(\frac{a\sqrt{13}}{2}\right)^2 = (a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}\cos\angle DB_1F;$$

$$\frac{13a^2}{4} = 3a^2 + \frac{5a^2}{4} - \sqrt{15}a^2\cos\angle DB_1F;$$

$$\cos\angle DB_1F = \frac{\sqrt{15}}{5}, \qquad \angle DB_1F = arcos\,\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

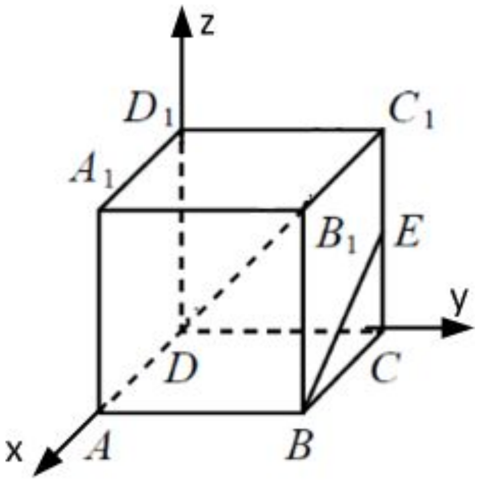
Ответ: $arcos\,\frac{\sqrt{15}}{5}$.



Задание № 14

Стереометрическая задача

Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и B_1D.



1. Введём прямоугольную систему координат, так как показано на рисунке.
2. Пусть ребро куба равно a.
3. Так как $B_1(a;a;a)$ и $\overrightarrow{DB_1}$ – радиус – вектор, то $\overrightarrow{DB_1}\{a;a;a\}$

   Так как $B(a;a;0)$ и $E\left(0;a;\frac{a}{2}\right)$, то $\overrightarrow{BE}=\left\{-a;0;\frac{a}{2}\right\}$
4. Пусть угол между прямыми BE и B_1D равен β, тогда

$$\cos\beta=\frac{\left|a\cdot(-a)+a\cdot 0+a\cdot\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+0^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\sqrt{15}a^2},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{15}}{5},\qquad \beta=arcos\,\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: $arcos\,\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задание № 14

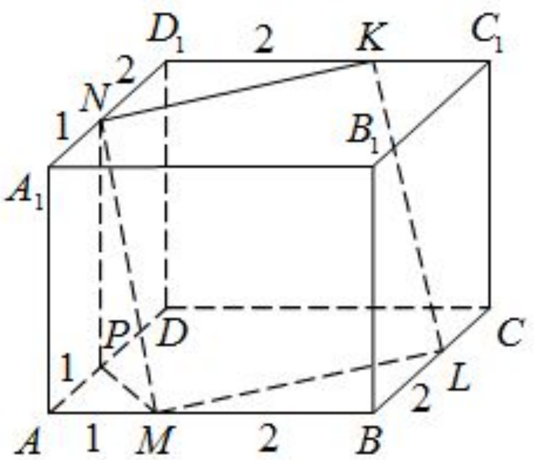
Стереометрическая задача

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$

На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.



а) 1. Так как плоскости оснований призмы параллельны, то плоскость MNK, пересекает их по параллельным отрезкам NK и ML.

2. Рассмотрим прямоугольные ΔMBL и ΔND_1K. Так как $MB=ND_1$(по условию) и $\angle D_1NK = \angle LMB$ (углы с сонаправленными сторонами), то $\Delta MBL = \Delta ND_1K$ по катету и острому углу. Следовательно, NK=ML.

3. Так как NK=ML и NK||ML, то четырёхугольник MNKL – параллелограмм (по признаку параллелограмма).

4. Построим NP – перпендикуляр к AD, отрезок MP.

5. ΔAMP и ΔMBL – равнобедренные прямоугольные треугольники. Следовательно, $\angle AMP = \angle LMB = 45^0$.

$\angle LMP = 180^0 - \angle AMP - \angle LMB$, $\angle LMP = 180^0 - 2 \cdot 45^0 = 90^0$.

6. Так как NP – перпендикуляр к плоскости ABC, NM – наклонная, PM - проекция и PM перпендикулярна ML ($\angle LMP = 90^0$), то по теореме о трёх перпендикулярах NM перпендикулярна ML, поэтому $\angle NML = 90^0$

7. Так как $\angle NML = 90^0$ в параллелограмме MNKL, то MNKL – прямоугольник.

8. Рассмотрим прямоугольный ΔND_1K. По теореме Пифагора $NK^2 = ND_1{}^2 + D_1K^2$,

$NK = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

9. Рассмотрим прямоугольный ΔAPM. По теореме Пифагора $PM^2 = AP^2 + AM^2$,

$PM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

10.

9. Рассмотрим прямоугольный ΔNPM. По теореме Пифагора $NM^2 = PN^2 + PM^2$,

$NM = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$, $NK = NM = 2\sqrt{2}$.

10. В прямоугольнике MNKL две смежные стороны NK и NM равны, поэтому MNKL - квадрат

Задание № 14

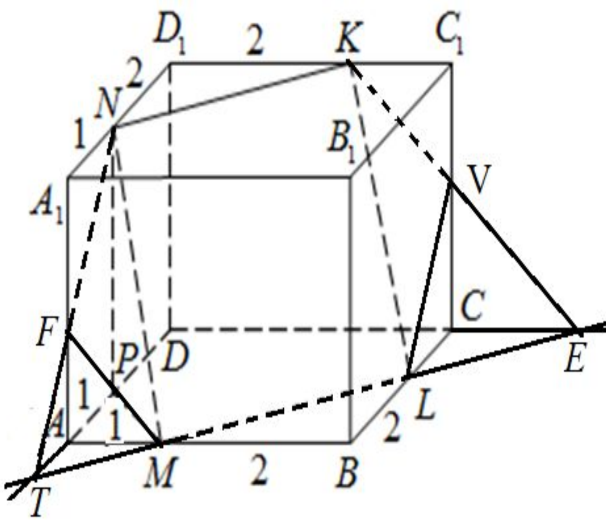
Стереометрическая задача

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$

На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.



б) 1. $ML \cap AD = T, ML \cap CD = E, NT \cap AA_1 = F, KE \cap CC_1 = V,$

FNKVLM - искомое сечение.

2. ΔMBL – равнобедренный, прямоугольный треугольник, следовательно $\angle LMB = 45^0$. $\angle AMT = \angle LMB = 45^0$ (вертикальные углы). В прямоугольном ΔATM $\angle AMT = 45^0$, поэтому ΔATM – равнобедренный, TA=AM=1.

3. Рассмотрим прямоугольные ΔFAT и ΔFA_1N. Так как $\angle TFA = \angle A_1FN$ (вертикальные углы) и $\angle FAT = \angle FA_1N$ (прямые углы), то $\Delta FAT \sim \Delta FA_1N$ по двум углам.

Следовательно, $\frac{FA}{FA_1} = \frac{TA}{A_1N}, TA = A_1N = 1, FA = FA_1.$

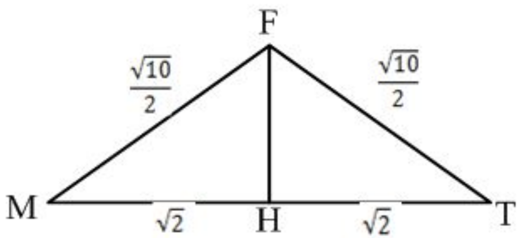
$FA = FA_1 = \frac{1}{2}AA_1, FA = FA_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}$

4. Рассмотрим прямоугольный ΔFAM. По теореме Пифагора

$FM^2 = FA^2 + AM^2,\ FM = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

$FN = FM = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

5. FH – высота ΔFTM.



Рассмотрим прямоугольный ΔFHM. По теореме Пифагора

$FM^2 = FH^2 + HM^2,$

$$FH = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$S_{FTM} = \frac{1}{2}MT \cdot FH, S_{FTM} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

6. $S_{сеч} = 2S_{FTM} + S_{MNKL}, S_{сеч} = 2 \cdot 1 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 10$

Ответ: 10

Задание № 15

Неравенства

Решите неравенство $(3x+7)\cdot\log_{2x+5}(x^2+4x+5)\geq 0.$

1. Метод рационализации

$$\log_{f(x)} g(x) \leq \log_{f(x)} h(x)$$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ h(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (f(x)-1)(g(x)-h(x)) \leq 0 \end{cases}$$

1 способ. Метод рационализации.

1. Найдем область допустимых значений

$$\begin{cases} x^2+4x+5>0, \\ 2x+5>0, \\ 2x+5\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+2)^2+1>0, \\ x>-2{,}5, \\ x\neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2{,}5 \\ x\neq -2; \end{cases}$$

2. Используя метод рационализации, перейдем к неравенству

$(3x+7)(2x+5-1)(x^2+4x+5-1)\geq 0,$

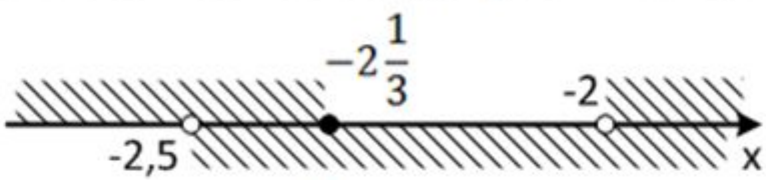
$(3x+7)(2x+4)(x^2+4x+4)\geq 0,$

$2\cdot 3\left(x+\frac{7}{3}\right)(x+2)(x+2)^2\geq 0,$

$\left(x+\frac{7}{3}\right)(x+2)^3\geq 0.$

$x\leq -2\frac{1}{3}$ или $x\geq -2$

3. Учитывая область допустимых значений , получаем:



$-2{,}5 < x \leq -2\frac{1}{3}$ или $x > -2$

Ответ: $\left(-2{,}5;-2\frac{1}{3}\right];(-2;+\infty)$

Задание № 15

Неравенства

Решите неравенство $(3x+7)\cdot\log_{2x+5}(x^2+4x+5)\ge 0.$

1. Метод интервалов

2 способ. Метод интервалов.

1. Введем функцию.

$f(x) = (3x+7)\log_{2x+5}(x^2+4x+5)$

2. Найдем область определения функции

$\begin{cases} x^2+4x+5>0, \\ 2x+5>0, \\ 2x+5\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)^2+1>0, \\ x>-2{,}5, \\ x\neq -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2{,}5 \\ x\neq -2; \end{cases}$

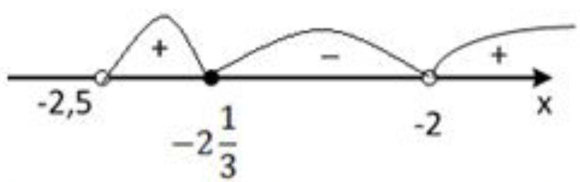
3. Найдем нули функции

$3x+7=0$ или $\log_{2x+5}(x^2+4x+5)=0$

$x=-2\frac{1}{3}$ $\qquad x^2+4x+5=1$

$x=-2$

4.



$f(0) = (3\cdot 0+7)\log_{2\cdot 0+5}(0^2+4\cdot 0+5) = 7\cdot 1 = 7>0,$

$f(-2{,}1) = (3\cdot(-2{,}1)+7)\log_{2\cdot(-2{,}1)+5}((-2{,}1)^2-4\cdot 2{,}1+5) = 0{,}7\cdot\log_{0{,}8}1{,}01<0,$

$f(-2{,}4) = (3\cdot(-2{,}4)+7)\log_{2\cdot(-2{,}4)+5}((-2{,}4)^2-4\cdot 2{,}4+5) = -0{,}2\cdot\log_{0{,}2}1{,}16>0,$

$-2{,}5<x\le -2\frac{1}{3}$ или $x>-2.$

Ответ: $\left(-2{,}5;-2\frac{1}{3}\right];(-2;+\infty).$

Задание № 17
Финансовая математика

ЗАДАЧА 1

Максим хочет взять в кредит 1,5 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение:

1 500 000 руб=1500 тыс. руб.

1. $1500\cdot 1{,}1-350=1300$
2. $1300\cdot 1{,}1-350=1080$
3. $1080\cdot 1{,}1-350=838$
4. $838\cdot 1{,}1-350=571{,}8$
5. $571{,}8\cdot 1{,}1-350=278{,}98$
6. $278{,}98\cdot 1{,}1-350=306{,}878$ – последний взнос

Ответ: на 6 лет

Задание № 17

Финансовая математика

ЗАДАЧА 2

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн. рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы: - каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть **на одну и ту же величину** меньше долга на июль предыдущего года. Сколько млн. рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Срок	Кредит млн.руб	Долг млн.руб.	Выплаты млн.руб
1	10	$1{,}1\cdot10=11$	11-8=3
2	8	$1{,}1\cdot8=8{,}8$	8,8-6=2,8
3	6	$1{,}1\cdot6=6{,}6$	6,6-4=2,6
4	4	$1{,}1\cdot4=4{,}4$	4,4-2=2,4
5	2	$1{,}1\cdot2=2{,}2$	2,2

S=3+2,8+2,6+2,4+2,2=13 (млн.руб.)

Ответ: 13 млн.руб.

Задание № 17

Финансовая математика

ЗАДАЧА 3

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг **должен быть на одну и ту же величину** меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн. рублей?

Решение:

Срок	Кредит млн. руб.	Долг млн. руб.	Выплаты млн. руб.
1	20	20·1,3=26	$26-\frac{n-1}{n}\cdot 20=\frac{6n+20}{n}$
2	$\frac{n-1}{n}\cdot 20$	$\frac{n-1}{n}\cdot 26$	$\frac{n-1}{n}\cdot 26-\frac{n-2}{n}\cdot 20=\frac{6n+14}{n}$
3	$\frac{n-2}{n}\cdot 20$	$\frac{n-2}{n}\cdot 26$	$\frac{n-2}{n}\cdot 26-\frac{n-3}{n}\cdot 20=\frac{6n+8}{n}$
4	$\frac{n-3}{n}\cdot 20$	$\frac{n-3}{n}\cdot 26$	…

$\frac{\mathbf{20}}{\boldsymbol{n}}$ – распределение кредита

$$20-\frac{20}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot 20-2\text{ год кредита}$$

$$\frac{n-1}{n}\cdot 20-\frac{20}{n}=\frac{n-2}{n}\cdot 20-3\text{ год кредита}$$

$$\frac{6n+20}{n}+\frac{6n+14}{n}+\frac{6n+8}{n}+\dots=47$$

Левая часть равенства – арифметическая прогрессия

$$a_1=\frac{6n+20}{n};d=\frac{6n+14}{n}-\frac{6n+20}{n}=-\frac{6}{n}$$

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

$$\frac{\left(\frac{12n+40}{n}+\frac{6n-6}{n}\right)}{2}\cdot n=47$$

12n+40-6n+6=944

n=8

Ответ: 8 лет

Задание № 17

Финансовая математика

ЗАДАЧА 4.

31 декабря 2014 года Борис взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Борис переводит очередной транш. Борис выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 560 тыс. рублей, во второй - 644,1 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Борису?

Решение: 1 000 000 руб. = 1000 тыс.руб.

Пусть банк выдал кредит Борису под x% =0,01x годовых, тогда

(1000+1000·0,01x=1000(1+0,01x)) тыс. рублей – долг Бориса банку через 1 год

(1000(1+0,01x) – 560) тыс. рублей – остался должен банку через 1 год после выплаты

((1000(1+0,01x) – 560)· (1+0,01x)) тыс. рублей - долг Бориса банку через 2 года. Эту сумму Борис должен полностью вернуть банку во второй год, т.е. - 644,1 тыс. рублей.

$(1000(1+0,01x) - 560)\cdot(1+0,01x) = 644,1,$

$(10x+440)\cdot(1+0,01x)=644,1,$

$10x+440+0,1x^2+4,4x=644,1,$

$x^2+144x-2041=0.$

$D=7225,$

$x=13.$

Ответ: 13%

Задание № 17

Финансовая математика

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе - 200 рублей. Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

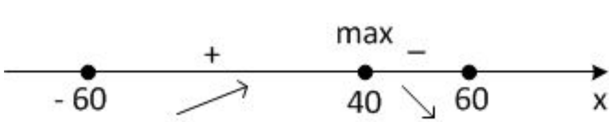
1. Пусть рабочие на первом заводе трудятся x^2 часов в неделю, а значит, производят x единиц товара. А на втором заводе рабочие трудятся y^2 часов, а значит, производят y единиц товара.
Так как Антон платит рабочему 250 рублей на 1 заводе, и на 2 заводе - 200 рублей, то он готов выделять на оплату труда рабочих 900 000 рублей в неделю, т.е. $250x^2+200y^2=900000$

$y^2=4500-1{,}25x^2$

$y=\sqrt{4500-1{,}25x^2}$

2. При этом количество товара, которое можно произвести за неделю, будет равно $f(x) = x + y$, $f(x) = x + \sqrt{\mathbf{4500-1,25x^2}}$
3. Исследуем эту функцию на максимум.

$$D(f)\colon 4500-1{,}25x^2 \ge 0,$$
$$x^2-3600 \le 0,$$
$$(x-60)(x+60) < 0,$$
$$D(f) = [-60;60]$$



$$f'(x) = 1 + \frac{-1{,}25\cdot 2x}{2\sqrt{4500-1{,}25x^2}}$$

$$1 - \frac{2{,}5x}{2\sqrt{4500-1{,}25x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{4500-1{,}25x^2} = 2{,}5x$$

$$18000-5x^2 = 6{,}25x^2$$

$$11{,}25x^2 = 18000$$

$$x^2 = 1600$$

x=40 – точка максимума

4.

$f(40) = 40 + \sqrt{4500-1{,}25\cdot 40^2} = 40 + 50 = 90$

Ответ: 90 единиц товара

Задание № 18

Задача с параметром

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$\sqrt{2xy+a}=x+y+5$ не имеет решения

1.

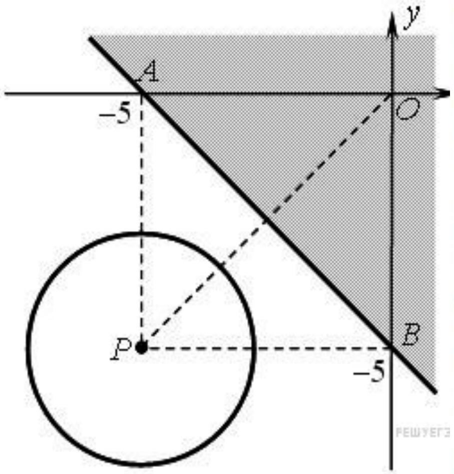
$\begin{cases}2xy+a=(x+y+5)^2\\ x+y+5\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}2xy+a=x^2+xy+5x+xy+y^2+5y+5x+5y+25\\ y\geq -x-5\end{cases}$

$\begin{cases}a=x^2+5x+y^2+5y+5x+5y+25\\ y\geq -x-5\end{cases}$

$\begin{cases}a+25=x^2+10x+25+y^2+10y+25\\ y\geq -x-5\end{cases}$

$\begin{cases}(x+5)^2+(y+5)^2=a+25\\ y\geq -x-5\end{cases}$



2. $(x+5)^2+(y+5)^2=a+25$ – уравнение окружности с центром в точке P(-5;-5) и радиусом $\sqrt{a+25}$

$y\geq -x-5$ – множество решений данного неравенства лежат выше прямой y=-x-5

Исходное уравнение не имеет решений, если окружность не имеет общих точек с заштрихованной областью

Найдем расстояние от точки P до прямой AB.

ΔAOP: $OP^2=5^2+5^2=2\cdot 5^2, OP=5\sqrt{2}$

OP – диагональ квадрата APBO => расстояние от точки P до прямой AB равна $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Таким образом, окружность не имеет общих точек с заштрихованной областью если

$\sqrt{a+25}<\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0<a+25<\frac{25}{2}, \; -25<a<-12{,}5$

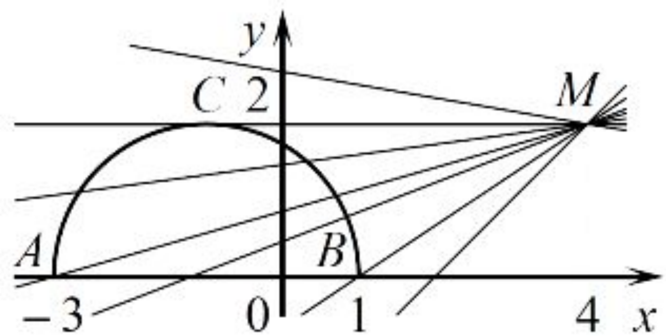
3. При $a<-25$ уравнение $(x+5)^2+(y+5)^2=a+25$, а, следовательно, и вся система решений не имеют, а при $a=-25$ решением уравнения является пара $(-5;-5)$, которая не удовлетворяет неравенству $x+y+5\geq 0$.

Ответ: уравнение не имеет решений при a $<-12{,}5$

Задание № 18

Задача с параметром

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.



1.

$\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + \mathbf{2}$

$\begin{cases} y = \sqrt{3 - 2x - x^2} \\ y = -ax + 4a + \mathbf{2} \end{cases}$

Уравнение (система уравнений) имеет единственной решение, если графики функций $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ и $y = -ax + 4a + 2$ пересекаются в одной точке.

2. $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

$y^2 = 3 - 2x - x^2$, y>0

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$, y>0

$(x + 1)^2 + y^2 = 4$, y>0 – уравнение полуокружности, расположенной в 1 и 2 координатных четвертях, с центром в точке (-1;0) и радиуса 2.

3. $y = -ax + 4a + \mathbf{2}$ - уравнения прямых, проходящих через точку М(4;2)

4. Подставим координаты точек А, В, С в уравнение прямой

А(-3;0): 0=3а+4а+2, $a = -\frac{2}{7}$

В(1;0): 0=-а+4а+2, $a = -\frac{2}{3}$

С(0;2): 2=4а+2, а=0

Ответ: уравнение имеет единственный корень, при значения а, равных $\left[-\frac{2}{3}; -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}$

Задание № 18

Задача с параметром

Найдите все неотрицательные значения а, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2}, \\ 5y=|6-a^2|; \end{cases}$$

1) $\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2};$

$A(-2;\ 0);\ C(x;\ y)\colon AC=\sqrt{(x+2)^2+y^2};\ \ B(0;\ a);\ C(x;\ y)\colon BC=\sqrt{x^2+(y-a)^2};$

$A(-2;\ 0);\ B(0;\ a)\colon AB=\sqrt{4+a^2},\qquad AB=AC+BC$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\sqrt{4+a^2}$ - уравнение отрезка АВ, $C\in[AB]$.

$5y=|6-a^2|, y=\dfrac{|6-a^2|}{5}-$ прямая параллельная оси OX

Система уравнений имеет единственное решение, если отрезок и прямая имеют только одну общую точку. Прямая будет перемещаться по вертикали от начала координат до точки В, причем точки А и В также будут являться точками пересечения отрезка и прямой

$$0\le\frac{|6-a^2|}{5}\le a;$$

$$0\le|6-a^2|\le 5a;$$

$$-5a\le 6-a^2\le 5a;$$

$$-5a\le a^2-6\le 5a;$$

$$\begin{cases} a^2-6\ge -5a, \\ a^2-6\le 5a; \end{cases} \begin{cases} a^2+5a-6\ge 0, \\ a^2-5a-6\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(a+6)\ge 0, \\ (a+1)(a-6)\le 0; \end{cases}$$

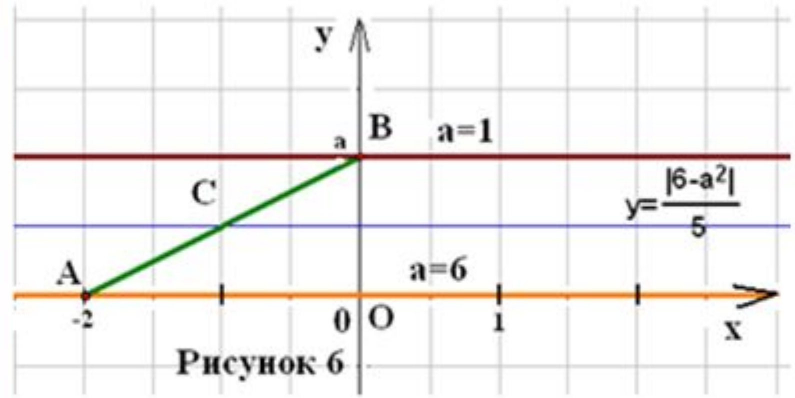


Рисунок 6

Т.к. по условию $a\ge 0$, то $\begin{cases} a\ge 1, \\ a\le 6; \end{cases}$

Ответ: $a\in[1;6]$.

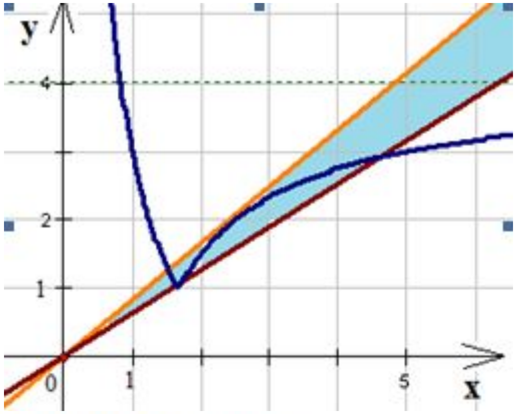
Задание № 18

Задача с параметром

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|+1=ax$ на промежутке $(0,+\infty)$ имеет более двух корней

Построим график функций $y=\left|\frac{5}{x}-3\right|+1$ на промежутке $[0;+\infty)$ и прямую $y=ax$.

Чтобы система уравнения имела более 2 решений, необходимо, чтобы графики пересекались более чем в двух точках. Все эти прямые должны находиться между двумя прямыми, изображенными на рисунке.



Найдем a, при котором прямая касается графика функции $y=-\frac{5}{x}+4$.

$$\begin{cases} y=-\frac{5}{x}+4, \\ y=ax; \end{cases}$$

$ax=-\frac{5}{x}+4;$

$ax^2-4x+5=0$ – это уравнение должно иметь 1 корень.

$D_1=4-5a=0;$

$a=\frac{4}{5}>0;$

Найдем a, при котором прямая проходит через току $\left(\frac{5}{3};1\right)$:

$y=ax;\quad 1=\frac{5}{3}a,\quad a=\frac{3}{5};$

Таким образом, исходное уравнение на промежутке $[0;+\infty)$ имеет больше двух корней при $a\epsilon\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Ответ: $a\epsilon\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Задание № 18

Задача с параметром

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-9x^2+a^2}=x^2-3x-a$ имеет ровно три различных корня

$$\sqrt{x^4-9x^2+a^2}=x^2-3x-a,$$

$$\begin{cases} x^4-9x^2+a^2=(x^2-3x-a)^2, \\ x^2-3x-a\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^4-9x^2+a^2=x^4+9x^2+a^2-6x^3-2ax^2+6ax, \\ x^2-3x-a\ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x^2-6x^3-2ax^2+6ax=0, \\ x^2-3x-a\ge 0; \end{cases} \begin{cases} 6x^2(3-x)+2ax(3-x)=0, \\ x^2-3x-a\ge 0; \end{cases} \begin{cases} x(3-x)(3x+a)=0, \\ x^2-3x-a\ge 0. \end{cases}$$

Первоначальное уравнение имеет 3 различных корня, если полученная система имеет 3 различных решения.

1. Если x=0, то $0^2-3\cdot 0-a\ge 0,\ a\le 0.$

2. Если x=3, то $3^2-3\cdot 3-a\ge 0,\ a\le 0.$

3. Если $x=-\frac{a}{3}$, то $\left(-\frac{a}{3}\right)^2+3\cdot\frac{a}{3}-a\ge 0, a^2\ge 0, a$ – любое число

Если a=0, то система уравнений примет вид $\begin{cases} 3x^2(3-x)=0, \\ x^2-3x-a\ge 0. \end{cases}$ Эта система уравнений имеет только 2 решения: x=0; x=3.

Если a=-9, то система уравнений примет вид $\begin{cases} 3x(3-x)^2=0, \\ x^2-3x-a\ge 0. \end{cases}$ Эта система уравнений имеет также только 2 решения: x=0; x=3.

Ответ: уравнение имеет три корня при $a\epsilon(-\infty;-9)$; при $a\epsilon(-9;0)$

1. http://fipi.ru/
2. https://math-ege.sdamgia.ru/?redir=1
3. http://le-savchen.ucoz.ru/