

# Методы аппроксимации функций

# 1.Метод наименьших квадратов

## 1.1 Аппроксимация линейной зависимостью

Метод наименьших квадратов (МНК) минимизирует среднеквадратичные невязки в узлах сетки. Рассмотрим МНК на примере построения линейной аппроксимационной зависимости для табличной функции.

$x_i$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y_i$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Результирующая функция должна удовлетворять зависимости:

$$y(x)=a \cdot x+b \quad (1)$$

Подставляя табличную функцию в зависимость (1) имеем систему  $(n + 1)$  уравнений с двумя неизвестными:

$$a \cdot x_0 + b = y_0$$

$$a \cdot x_1 + b = y_1$$

$$a \cdot x_2 + b = y_2$$

.....

$$a \cdot x_n + b = y_n \quad (2)$$

Введем невязку в узлах сетки как квадрат разностей левой и правой частей системы (2):  $r_i = (a \cdot x_i + b - y_i)^2$  (3) Тогда задаче нахождения коэффициентов  $a$  и  $b$  ставится в соответствие задача минимизации суммы невязок (3):

$$\sum_{i=0}^n r_i \rightarrow \min \quad (4)$$

Дифференцируя функцию (4) по независимым переменным  $a$  и  $b$ ,

получаем систему из двух уравнений: 
$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^n 2 \cdot (a \cdot x_i + b - y_i) \cdot 1 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Приводя к стандартному для СЛАУ виду,

имеем: 
$$\begin{cases} a \sum_{i=0}^n x_i^2 + b \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i \cdot x_i \\ a \sum_{i=0}^n x_i + b(n+1) = \sum_{i=0}^n y_i \end{cases} \quad (6)$$

Или в матричной форме:  $Y = B \cdot X$  (7) Где:

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad (8)$$

Решением системы (7) будет вектор:  $B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y$

## 1.2 Аппроксимация нелинейной зависимостью.

Если принять более общий случай, когда конкретный вид аппроксимирующей функции не задан, т.е.:  $\mathbf{y}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})$  (9)

Условие минимизации среднеквадратичной невязки запишется в виде:

$$\sum_{i=0}^n (\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{y}_i)^2 \rightarrow \min \quad (10)$$

Рассмотрим случай когда искомая функция представляет линейную комбинацию базисных функций:  $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{c}_0 \cdot \varphi_0(\mathbf{x})+\mathbf{c}_1 \cdot \varphi_1(\mathbf{x})+\dots+\mathbf{c}_m \cdot \varphi_m(\mathbf{x})$  (11)

Набор базисных функций  $\{\varphi_i(\mathbf{x})\}_{i=0}^m = \mathbf{0}$  задан изначально, и задача сводится к определению коэффициентов  $\{\mathbf{c}_i\}_{i=0}^m = \mathbf{0}$ .

Аналогично предыдущему пункту, условие минимума функции нескольких переменных сводится к условию гладкого экстремума, что для задачи (10-11) приводит к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \varphi_0(x_i) (c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) - y_i) &= 0 \\ \sum_{i=0}^n \varphi_1(x_i) (c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) - y_i) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sum_{i=0}^n \varphi_m(x_i) (c_0 \varphi_0(x_i) + c_1 \varphi_1(x_i) + \dots + c_m \varphi_m(x_i) - y_i) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (12)$$



Все коэффициенты зависимости (11) можно найти в явном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{(\varphi_0, y)}{\|\varphi_0\|^2} \\ c_1 = \frac{(\varphi_1, y)}{\|\varphi_1\|^2} \\ \dots \\ c_m = \frac{(\varphi_m, y)}{\|\varphi_m\|^2} \end{array} \right. \quad (17)$$

Такие коэффициенты называются **коэффициентами Фурье**, а комбинация базисных функций (11) – **обобщенным многочленом Фурье**.

## 2.Линейная аппроксимация

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы линейную функцию:

$$\varphi(x, a, b) = ax + b$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a, b) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Для нахождения  $a$  и  $b$  необходимо найти минимум функции  $S(a, b)$ .

Необходимое условие существования минимума для функции  $S$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Упростим полученную систему:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$SX = \sum_{i=1}^n x_i, \quad SXX = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad SY = \sum_{i=1}^n y_i, \quad SXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Получим систему уравнений для нахождения параметров а и b:

$$\begin{cases} aSXX + bSX = SXY \\ aSX + bn = SY \end{cases} \quad (18)$$

из которой находим:  $a = \frac{SXY * n - SX * SY}{SXX * n - SX * SX}, \quad b = \frac{SXX * SY - SX * SXY}{SXX * n - SX * SX}$



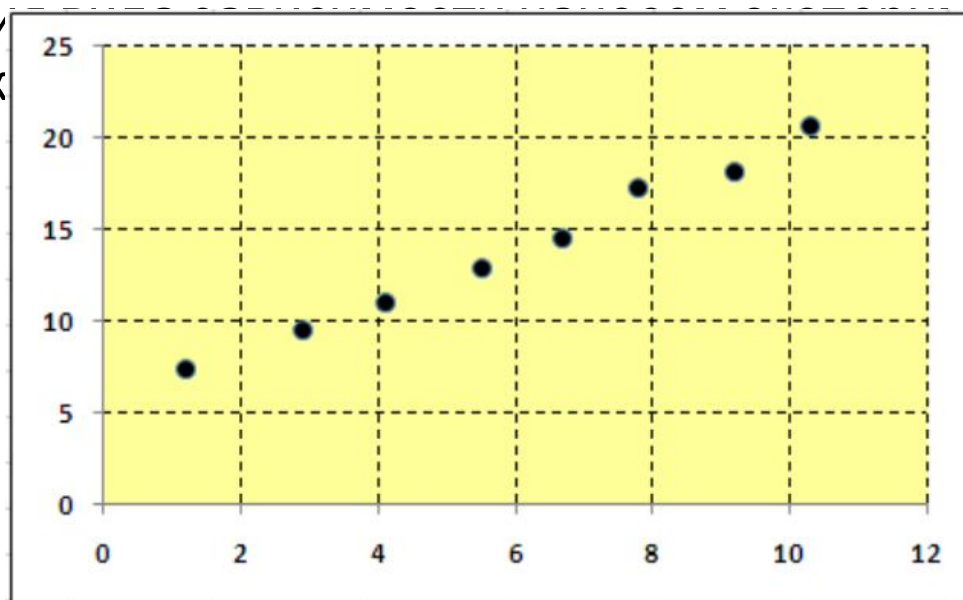
**Пример.** Пусть, изучая неизвестную функциональную зависимость между  $x$  и  $y$ , в результате серии экспериментов, была получена таблица значений (табл. 1). Необходимо найти приближенную функциональную зависимость и определить значения параметров аппроксимирующей функции.

### Данные эксперимента

$x$	1,2	2,9	4,1	5,5	6,7	7,8	9,2	10,3
$y$	7,4	9,5	11,1	12,9	14,6	17,3	18,2	20,7

Таблица 1.

Для определения  
точки на график



Экспериментальные

Далее, используя метод наименьших квадратов, найдем значения коэффициентов аппроксимирующей функции: а и b. Для этого вычислим:

$$SX = \sum_{i=1}^n x_i = 1,2 + 2,9 + 4,1 + 5,5 + 6,7 + 7,8 + 9,2 + 10,3 = 47,7;$$

$$SXX = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1,2^2 + 2,9^2 + 4,1^2 + 5,5^2 + 6,7^2 + 7,8^2 + 9,2^2 + 10,3^2 = 353,37;$$

$$SY = \sum_{i=1}^n y_i = 7,4 + 9,5 + 11,1 + 12,9 + 14,6 + 17,3 + 18,2 + 20,7 = 111,7;$$

$$SXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1,2 \cdot 7,4 + 2,9 \cdot 9,5 + 4,1 \cdot 11,1 + 5,5 \cdot 12,9 + 6,7 \cdot 14,6 + \\ + 7,8 \cdot 17,3 + 9,2 \cdot 18,2 + 10,3 \cdot 20,7 = 766,3.$$

Система уравнений (18) для нахождения параметров а и b будет иметь

$$\text{вид: } \begin{cases} 353,37a + 47,7b = 766,3 \\ 47,7a + 8b = 111,7. \end{cases}$$

Решая систему, получим значения коэффициентов: а = 1,4543 и b=5,2911. Проверим правильность выбора линейной модели. Для этого вычислим значения аппроксимирующей функции  $f = 1,4543x + 5,2911$  и внесем полученные значения в табл. 2.

## Результаты вычислений

Таблица 2

№ пп	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1,2	2,9	4,1	5,5	6,7	7,8	9,2	10,3
y	7,4	9,5	11,1	12,9	14,6	17,3	18,2	20,7
F = ax + b	7,0363	9,5086	11,2538	13,2899	15,0351	16,6348	18,6709	20,2707
$\varepsilon_i$	-0,3637	0,0086	0,1538	0,3899	0,4351	-0,6652	0,4709	-0,4293

Из таблицы видно, что значения аппроксимирующей функции приблизительно совпадают с Y для всех точек X. Следовательно, делаем вывод: исследуемая функциональная зависимость может быть приближенно описана линейной моделью  $f = 1,4543x + 5,2911$ . Определим меру отклонения S:  $S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \mathbf{1,3459}$

Вычисленное значение S (небольшое  $\rightarrow \min$ ), что еще раз подтверждает правильность выбора модели

### 3. КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим в качестве эмпирической формулы квадратичную функцию:

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Сумма квадратов отклонений запишется следующим образом:

$$S = S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Приравниваем к нулю частные производные  $S$  по неизвестным параметрам:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^n (a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 - y_i) x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$X_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad X_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad X_3 = \sum_{i=1}^n x_i^3, \quad X_4 = \sum_{i=1}^n x_i^4,$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n y_i, \quad Z_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad Z_3 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i.$$

Получим систему уравнений для нахождения параметров  $a_0, a_1, a_2$ :

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 X_1 + a_2 X_2 = Z_1 \\ a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 = Z_2 \\ a_0 X_2 + a_1 X_3 + a_2 X_4 = Z_3 \end{cases}$$

используя правило Крамера, находим  $a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}$ ,  $a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ,  $a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ ,

где

$$\Delta_0 = \det \begin{pmatrix} Z_1 & X_1 & X_2 \\ Z_2 & X_2 & X_3 \\ Z_3 & X_3 & X_4 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \det \begin{pmatrix} n & Z_1 & X_2 \\ X_1 & Z_2 & X_3 \\ X_2 & Z_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} n & X_1 & Z_1 \\ X_1 & X_2 & Z_2 \\ X_2 & X_3 & Z_3 \end{pmatrix} \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} n & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$