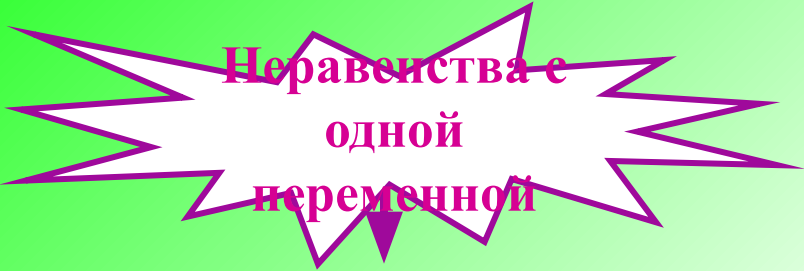


*Методы решений  
заданий С5  
(задачи с параметром)*

*Метод областей в  
решении задач*

# Обобщённый метод областей


(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)



Неравенства с  
одной  
переменной

**Метод интервалов:**

- 1. Область определения
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на интервалах
- 5. Ответ.



Неравенства с  
двумя  
переменными

**Метод областей:**

- 1. Область определения
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5. Ответ по рисунку.

На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству  $(x - y)(xy - 1) \geq 0$

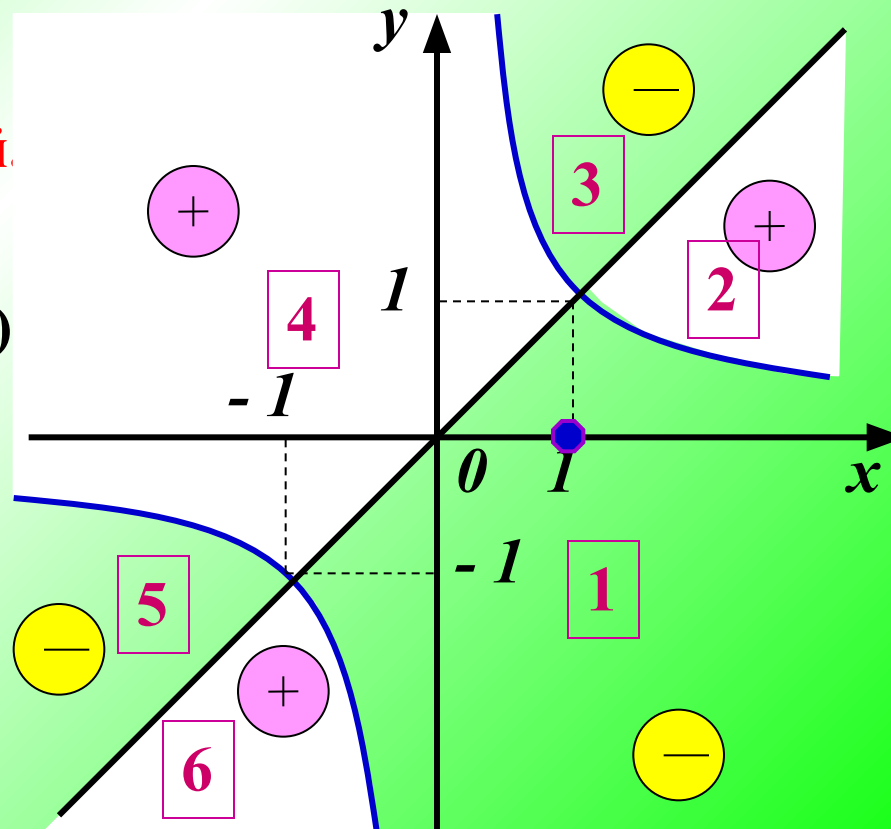
**Пример для понимания «метода областей»**

**Решение.** На координатной плоскости нарисуем линии, определяемые равенствами  $x - y = 0$  ( $y = x$ ) и  $x \cdot y - 1 = 0$  ( $y = 1/x$ ), которые разбивают плоскость **на 6 областей**.

При  $x = 1, y = 0$  левая часть неравенства равна  $-1$  (**отрицательна**)

Следовательно, в **1** области, содержащей точку **(1; 0)**, левая часть неравенства имеет знак минус, а в остальных областях её знаки чередуются.

**Ответ:** заштрихованные области на рисунке удовлетворяют условию  $(x - y)(xy - 1) \geq 0$



## Пример для понимания «метода областей»

На координатной плоскости изобразите множество точек,

удовлетворяющих неравенству  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$

Область определения неравенства:  $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$

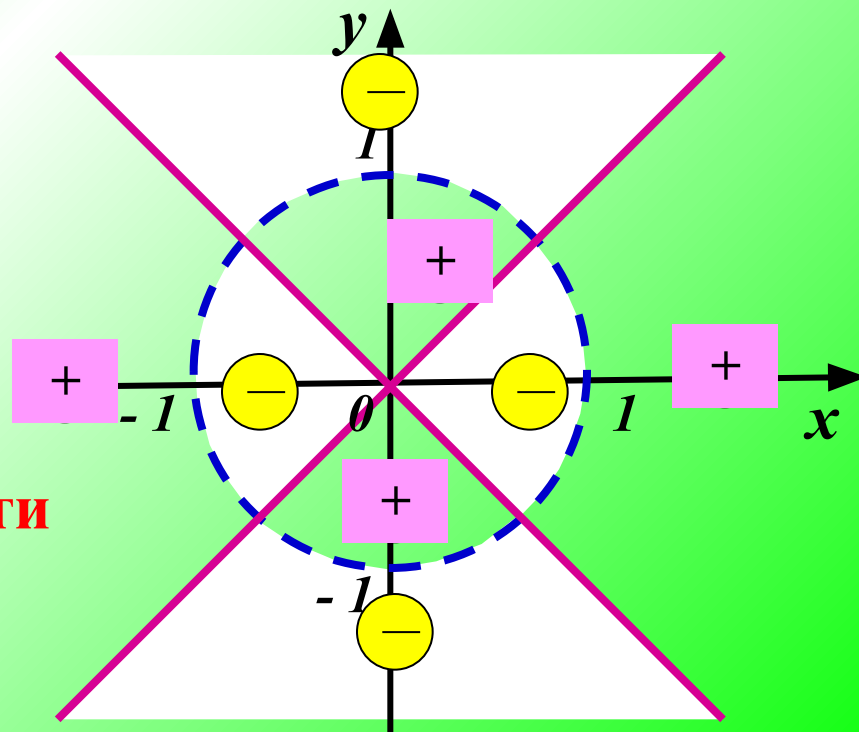
Граничные линии:  $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x|$  и  $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Проводим граничные линии, с учётом области определения

Они разбивают плоскость  
на 8 областей

Определяем знаки на  
областях подстановкой в  
отдельных точках

Ответ: **заштрихованные области**  
**на рисунке.**



# Метод областей при решении задач с параметрами



Параметр – «равноправная» переменная  $\Rightarrow$  отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию  $a = f(x)$

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

В задаче дан один параметр  $a$  и одна переменная  $x$

Они образуют некоторые аналитические выражения  $F(x;a), G(x;a)$

Графики уравнений  $F(x;a)=0, G(x;a)=0$  строятся несложно

•1. Строим графический образ

•2. Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси

•3. «Считываем» нужную информацию

Схема

решения:

Найти все значения параметра  $p$ , при каждом из которых множество решений неравенства  $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$  не содержит ни одного решения неравенства  $x^2 \leq 1$

Применим обобщенный метод областей.

1) Построим граничные линии  $p = x^2$  и  $p = 2 - x$

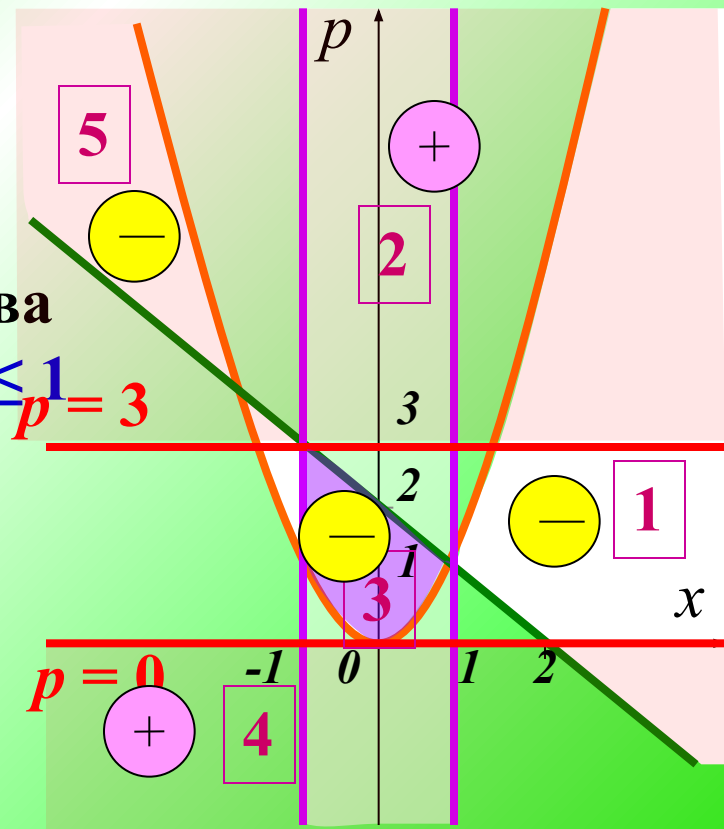
2) Определим знаки в полученных пяти областях, и укажем решение данного неравенства.

3) Осталось из полученного множества исключить решения неравенства  $x^2 \leq 1$

$$|x| \leq 1, \quad -1 < x < 1$$

По рисунку легко считываем ответ

При  $p \leq 0$ ,  $p \geq 3$  в решениях исходного неравенства нет решений неравенства  $x^2 \leq 1$ .



Ответ:  $p \leq 0$ ,  $p \geq 3$

Сколько решений имеет система  
в зависимости от параметра  $a$ ?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

решений нет при  $a < 1$

4 решения при  $a = 1$

8 решений при  $1 < a < \sqrt{2}$

4 решения при  $a = \sqrt{2}$

решений нет при  $a > \sqrt{2}$

Графиком второго уравнения

Ответ: является окружностью

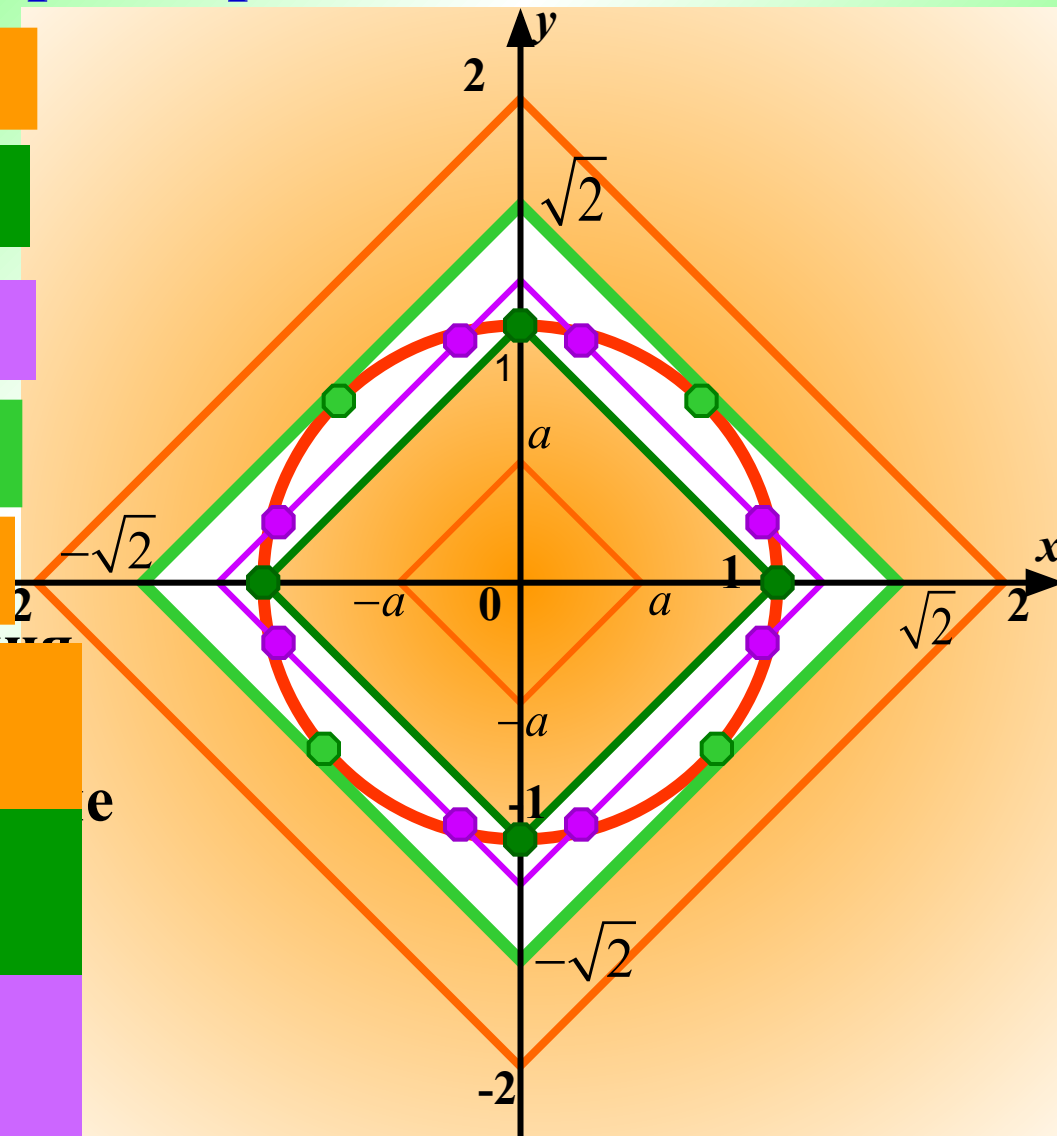
в координатной плоскости

4 решения, если

$a = 1$  или  $a = \sqrt{2}$

8 решений, если

$1 < a < \sqrt{2}$





При каких **положительных** значениях параметра  $a$ , система уравнений имеет **ровно четыре** решения?

$$\begin{cases} |4 - |x - 2|| - |y| = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4(x - 1) \end{cases}$$

Запишем  $|4 - |x - 2|| = |y|$

решений нет при  $a < 2\sqrt{2}$ .

Построим графики обоих уравнений.

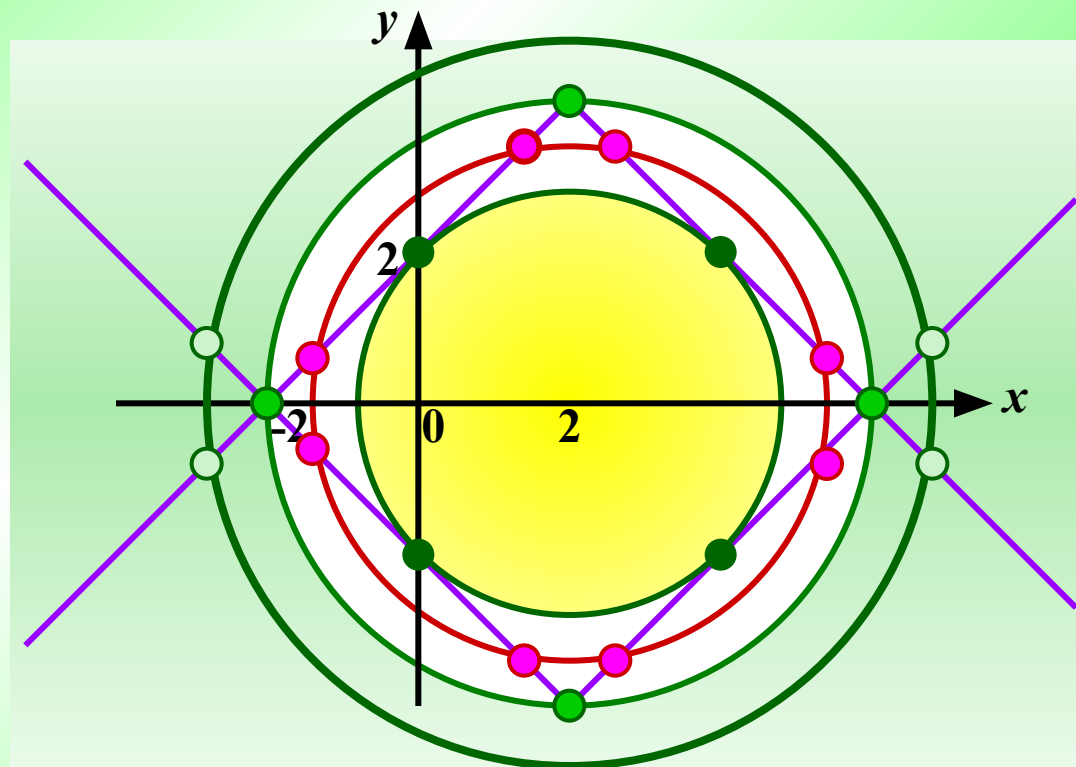
4 решения при  $a = 2\sqrt{2}$  и  $a \geq 4$ .

$y = |4 - |x - 2||$  и симметрично

8 решений при  $2\sqrt{2} < a < 4$ .

Второе уравнение задает семейство

4 решения при  $a \geq 4$  и



Итак:  
при  $a < 2\sqrt{2}$  решений нет; при  $a = 2\sqrt{2}$  и  $a \geq 4$  система имеет 4 решения;  
система имеет 8 решений при  $2\sqrt{2} < a < 4$ .

Ответ:  $a = 2\sqrt{2}$  и  $a \geq 4$



При каких значениях параметра  $a$  сумма  $\log_a (\cos^2 x + 1)$  и  $\log_a (\cos^2 x + 5)$  равна 1 хотя бы при одном значении  $x$ ?

**Решение.** Рассмотрим сумму данных выражений

$$\log_a (\cos^2 x + 1) + \log_a (\cos^2 x + 5) = 1; \text{ заметим, } 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

Пусть  $\cos^2 x + 1 = t$ ;  $t \in [1; 2]$ ;  
тогда уравнение примет вид

$$\log_a (t \cdot (t + 4)) = 1; \text{ откуда}$$

$$t^2 + 4t = a$$

Построим в прямоугольной системе координат график функции  $y(t) = t^2 + 4t$ ,

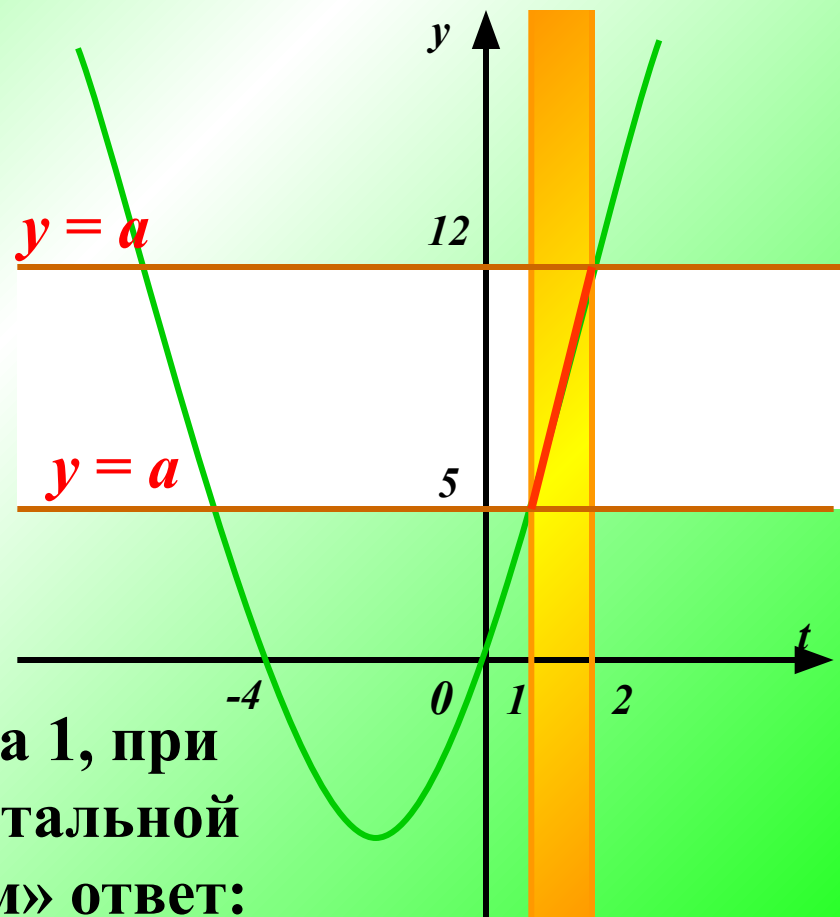
учитывая, что  $t \in [1; 2]$

и прямые  $y = a$

Сумма данного выражения равна 1, при пересечении параболы с горизонтальной прямой. По рисунку «считываем» ответ:

$$5 \leq a \leq 12$$

**Ответ:** при всех  $a \in [5; 12]$



Найдите все значения параметра  $a$ , при которых количество корней уравнения  $(5 - a)x^3 - 4x^2 + x = 0$  равно количеству общих точек линий  $x^2 + y^2 = a^2$  и  $y = 5 - |x - 1|$

1 решение при  $|a| = 2\sqrt{2}$

задает неподвижный угол с

2 решения при  $2\sqrt{2} < |a| < 3\sqrt{2}$

3 решения при  $|a| = 3\sqrt{2}$

4 решения при  $3\sqrt{2} < |a| < \sqrt{26}$

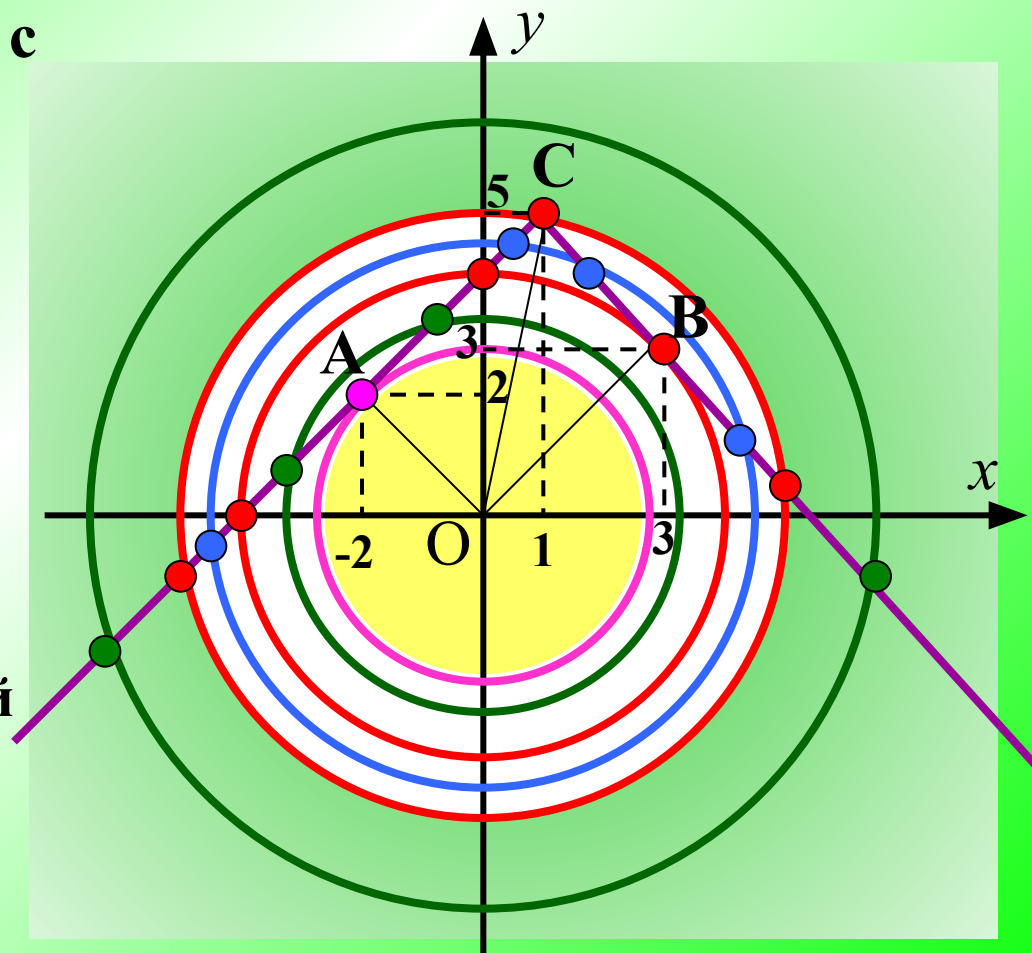
3 решения при  $|a| = \sqrt{26}$

2 реш. при  $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$

Построим эскизы этих линий и определим из рисунка количество общих точек.

$$a_3 = OC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

нет решение при  $|a| < 2\sqrt{2}$



Запишем первое уравнение в виде  $x(5 - a)x^2 - 4x + 1 = 0$

Заметим, что  $x = 0$  – корень не зависимо от параметра  $a$ .

Уравнение  $(5 - a)x^2 - 4x + 1 = 0$  может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра  $a$  и  $D = 4(a - 1)$ .

	<i>одно решение</i>	<i>два решения</i>	<i>три решения</i>
<i>первое уравнение</i>	$a < 1$	$a = 5; a = 1$	$a > 1$
<i>совокупность линий</i>	$a = 2\sqrt{2}$ $a = -2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} < a < -2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2},$ $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$	$a = -3\sqrt{2}, a = -\sqrt{26}$ $a = 3\sqrt{2},$ $a = \sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при  $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$

**Ответ:**  $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$