Методы решения:

1 | 2а | 2б | 3а | 3б

1. Использования свойств функций, входящих в уравнения:
   а) метод обращения к монотонности функции.
   б) метод использование свойства ограниченности функции.
2. Метод обращения к условию равенства обратных тригонометрических функций:
   а) одноимённых.
   б) разноимённых.
3. Метод замены переменной.
   а) сведение к однородному.
   б) сведение к алгебраическому с применением различных преобразований.

на содержание

1) Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций

Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основываются исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если функция y= f(x) монотонна, то уравнение f(x)= c(c= cont) имеем не более одного решения.

ТЕОРЕМА 2. Если функция y= f(x) монотонно возрастает, а функция y= g(x) монотонно убывает, то уравнение f(x)= g(x) имеет не более одного решения.

ТЕОРЕМА 3. Если $\min_{X} f(x) = c = \max_{X} g(x)$ (c= const), то на множестве X уравнение f(x)= g(x) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$$

Методы решения

$2\arcsin 2x = 3\arccos x.$

Решение. Функция $y = 2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y = 3\arccos x$ - монотонно убывающей. Число $x = 0{,}5$ является, очевидно, корнем данкого уравнения. В силу теоремы 2 этот корень - единственный.

Ответ: $\{0{,}5\}$.

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2}$$

Решение. Пусть $x^2+x=t$. Тогда уравнение примет вид $\operatorname{arctg}\sqrt{t}+\arcsin\sqrt{t+1}=\frac{\pi}{2}$. Функции $z=\sqrt{t},\ z=\sqrt{t+1}$
y=arctg z и y=arcsin z являются монотонно возрастающими.
Поэтому функция $y=\operatorname{arctg}\sqrt{t}+\arcsin\sqrt{t+1}$ также
является монотонно возрастающей. В силу теоремы 1 уравнение
имеет не более одного корня. Очевидно, что $t=0$ является
корнем этого уравнения. Поэтому

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x^2+x=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: {- 1; 0}.

$$\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} \le \frac{3}{4}\pi$$

Решение. Левая часть неравенства представляет собой монотонно убывающую на отрезке $[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}]$ функцию $f(x) = \arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3}$.

Уравнение $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ в силу теоремы 1 имеет не более одного корня. Очевидно, что $x = \frac{1}{2}$ корень этого уравнения

Поэтому решением неравенства $f(x) = \frac{3}{4}\pi$ является отрезок $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Ответ: $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$\arcsin(x(x+y)) + \arcsin(y(x+y)) = \pi$$

Решение. Поскольку $\arcsin t \le \frac{\pi}{2}$ при $|t| \le 1$, то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.
Знак равенства возможен, лишь если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin(x(x+y)) = \dfrac{\pi}{2} \\ \arcsin(y(x+y)) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y)=1 \\ y(x+y)=1 \end{cases}$$

Решение последней системы не представляет труда.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

Методы решения

2а) уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноимёнными обратными тригонометрическими функциями.

Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых представляют собой одноимённые обратные тригонометрические функции различных аргументов, основываются, прежде всего, на таком свойстве этих функций, как монотонность. Напомним, что функции y= arcsin t и y= arctg t монотонно вовозрастают, а функции y= arccos t и y= arcctg t монотонно убывают на своих областях определения. Поэтому справедливы следующие равносильные переходы:

$$1.\ \text{а)}\ \arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \arcsin f(x) \le \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) \ge -1 \\ g(x) \le 1. \end{cases}$$

Методы решения

$$2.\ \text{а)}\ \arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1 \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \arccos f(x) \le \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge -1, \\ f(x) \le 1. \end{cases}$$

$$3.\ \text{а)}\ \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$$

$$\text{б)}\ \operatorname{arctg} f(x) \le \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \le g(x).$$

$$4.\ \text{а)}\ \operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x);$$

$$\text{б)}\ \operatorname{arcctg} f(x) \le \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \le g(x).$$

Методы решения

2б) Уравнения и неравенств, левая и правая части которых являются разноимёнными обратными тригонометрическими функциями.

При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. При решении многих уравнений такого рода бывает целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими. Пусть требуется решить уравнение

arcsin f(x)= arccos g(x). Предположим, что x_0 –решение этого уравнения. Обозначим arcsin $f(x_0)$= arccos $g(x_0)$ через α

Тогда $\sin\alpha = f(x_0)$, $\cos\alpha = g(x_0)$, откуда $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$

Итак, $\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1.$

Методы решения

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы :

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f(x)\, g(x) = 1$$

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x)$$

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$$

$$\arccos f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$$

Решите уравнение

$$\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2} = arctg\sqrt{\frac{2}{x+1}}$$

Решение :

$$\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2} = arctg\sqrt{\frac{2}{x+1}} \Rightarrow \frac{3x+2}{4} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{x+1}} \Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}, \\ x = -2. \end{array}\right.$$ Корень $x = -2$ является посторонним

Ответ : $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

Решите уравнение.

arctg(2sinx) = arcctg(cosx)

Решение :

$$arctg(2\sin x) = arctg(\cos x) \Rightarrow 2\sin x\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Корни вида $ч = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k, k \in Z$ являются посторонними.

Ответ : $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z\right\}$

Решите неравенство :

$$\arcsin\frac{x+2}{5} \le \arccos\frac{3x+1}{5}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin\frac{x+2}{5} - \arccos\frac{3x+1}{5}$

и решим неравенство $f(x) \le 0$ мотодом интервалов.

1) Найдём $D(f)$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} \frac{|x+2|}{5} \le 1 \\ \frac{3z+1}{5} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le 3 \\ -2 \le x \le \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le \frac{4}{3}.$$

2) Найдём нули $f(x)$. Для этого решим уравнен ие

$$\arcsin\frac{x+2}{5} = ar\cos\frac{3x+1}{5} \Rightarrow \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$ Корень $x = -2$ является посторонним.

Ответ : x = 1

Решите уравнение с параметром а.

$arctg(x-2a) = arctg(2x-a).$

Решение. Данное уравнение павносильно системе

$$\begin{cases}(x-2a)(2x-a)=1\\ x-2a>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-5ax+2a^2-1=0\\ x>2a.\end{cases}$$

Графиком квадратного трёхчлена $f(x) = 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку $f(2a) = -1 < 0$, то при любом a уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 2 корня, междукоторыми и заключено число 2 a Поэтому только больший корень $f(x)$ удовлетворяет условию $x > 2a$.

Это корень $x = \dfrac{5a+\sqrt{9a^2+8}}{4}$.

Ответ : при любом a x = $\dfrac{5a+\sqrt{9a^2+8}}{4}$.

Методы решения

3а) Замена переменной.

Некоторые уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Методы решения

Замена переменной.

Решите уравнение.

$$12arctg^2\frac{x}{2}=\pi\left(3\pi+5arctg\frac{x}{2}\right).$$

Решение. Обозначим $arctg\frac{x}{2}$ через t; $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

После преобразований получим уравнение

$$12t^2-5\pi t-3\pi^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{4}\pi\\ t=-\frac{\pi}{3}.\end{array}\right.$$

Поскольку $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$, то $t=-\frac{\pi}{3}$,

откуда $arctg\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-2\sqrt{3}.$

Ответ : $\left\{-2\sqrt{3}\right\}$.

Решите неравенство.

$\arccos^2 x - 3\arccos x + 2 \geq 2$

Решение. Пусть $\arccos x = t,\ 0 \leq t \leq \pi.$

Тогда $t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq 1. \end{array}\right.$ Поскольку $0 \leq t \leq \pi$,

то $\left[\begin{array}{l} 2 \leq t \leq \pi \\ 0 \leq t \leq 1, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} 2 \leq \arccos x \leq \pi \\ 0 \leq \arccos x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq \cos 2 \\ \cos 1 \leq x \leq 1. \end{array}\right.$

Ответ : [-1; cos2] $\cup$ [cos1; 1].

Решите уравнение.

$$\arcsin x \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow 18\arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0.$$

Пусть $\arcsin x = t,\ \ |t| \le \frac{\pi}{2}.$ Тогда $18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{6}. \end{array}\right.$ Поэтому $\left[\begin{array}{l} \arcsin x = \frac{\pi}{3} \\ \arcsin x = \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$

Ответ : $\left\{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$

Методы решения

3б) Уравнения и неравенства, сводимые к алгебраическим и тригонометрическим уравнениям и неравенствам.

Методы решения

Решите уравнение :

$\arccos(3x-4) = 2arctg(5-3x)$

Решение. Пусть $arctg(5-3x) = \alpha$. Тогда $tg\alpha = 5-3x$, $\arccos(3x-4) = 2\alpha$,

$\cos 2\alpha = 3x - 4$. Таким образом, $\begin{cases} tg\alpha = 5-3x \\ \cos 2\alpha = 3x-4. \end{cases}$

Сложив уравнения этой системы, получим тригонометрическое уравнение

$$tg\alpha + \cos 2\alpha = 1 \Leftrightarrow tg\alpha = 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = 1. \end{array}\right.$$

Поскольку 2α=arccos(3x-4), а $0 \le \arccos t \le \pi$, то $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$. Поэтому последняя

система даёт значения α=0 и $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда $\left[\begin{array}{l} 3x-4=\cos 0 \\ 3x-4=\cos\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{3} \\ x = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

Оба этих корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ : $\left\{\dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{3}\right\}$

Решите неравенство.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin 2x + \arccos(6x - 2) - \frac{5}{6}\pi$

и решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов.

1) Найдём D(f). Для этого решим систему

$$\begin{cases} -1 \le 2x \le 1, \\ -1 \le 6x - 2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{6} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le x \le \frac{1}{2}.$$

2) Найдём нули f(x). Для этого решим уравнение

$\arcsin 2x + \arccos(6x - 2) \le \frac{5}{6}\pi$ Пусть $\arcsin 2x = a, \arccos(6x - 2) = \beta$

Тогда $\sin\alpha = 2x, \cos\beta = 6x - 2, \alpha + \beta = \frac{5}{6}\pi.$ Поэтому $3\sin\alpha - \cos\beta = 2,$

$\beta = \frac{5}{6}\pi - \alpha$

Отсюда $3\sin\alpha - \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow 3\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = 2 \Leftrightarrow$

$5\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 4 - 5\sin \Leftrightarrow 3\cos^2\alpha = 16 - 40\sin\alpha +$

$+ 25\sin^2\alpha \Leftrightarrow 3(1 - \sin^2\alpha) = 16 - 40\sin\alpha + 25\sin^2\alpha \Leftrightarrow$

$$28\sin^2\alpha - 40\sin\alpha + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{13}{14} \end{array}\right.$$

Поскольку $x = \frac{1}{2}\sin\alpha$і тт $x = \frac{1}{4}$ или $x = \frac{13}{28}$. Корень $x = \frac{13}{28}$ яявляетс посторонни м.

3) Решим неравенств о $f(x) \le 0$ методом интервалов . $\left(f\left(\frac{1}{6}\right) > 0, f\left(\frac{1}{2}\right) < 0\right)$.

Ответ : $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Методы решения