

# ***Методы решения геометрических задач***

## **ЕГЭ, задание С2**

***(Расстояние от точки до плоскости)***

***Подготовил:***

***учитель математики***

***МОУ «СОШ №10 с. Солдато-  
Александровского»***

***Кобзев Д.А.***

**2012 – 2013 уч.г.**

# Расстояние от точки до плоскости

## Методы

**Поэтапно-вычислительный метод**

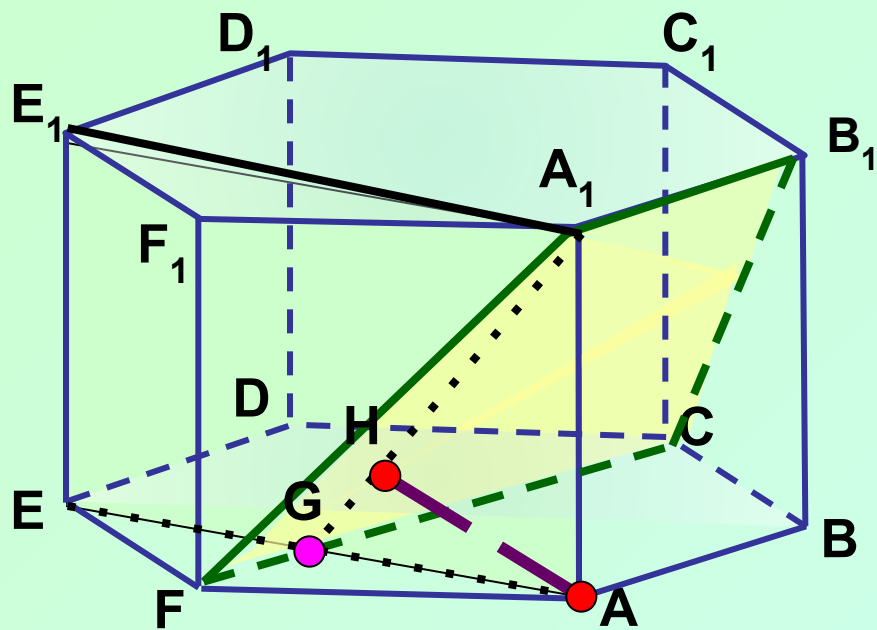
**Метод параллельных прямых и плоскостей**

**Векторный метод**

**Координатный метод**

**Метод объемов**

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найти расстояние от точки  $A$  до плоскости  $A_1 B_1 C$ .



$FC \perp AE, FC \perp AA_1 \Rightarrow FC \perp (AA_1 E_1)$ .  
 $FC \cap AE = G$ .

$(AA_1 E_1) \perp (A_1 B_1 C) - [FC \in (A_1 B_1 C)]$ ,  
 $(AA_1 E_1) \cap (A_1 B_1 C) = A_1 G$ .

Высота  $AH$  в треугольнике  $AA_1 G$  –  
 искомое расстояние.

Из прямоуг. треугольника  $ADE$ :

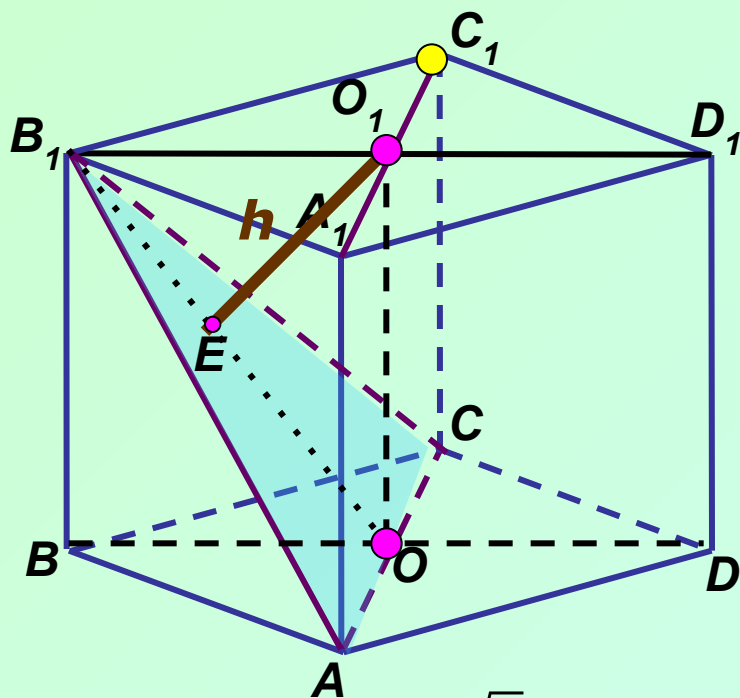
$$AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = \sqrt{3}, AG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из прямоуг. треугольника  $AGA_1$ :  $GA_1 = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

$$AH = \frac{AG \cdot AA_1}{GA_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 : \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

**Ответ:**  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

**В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найти расстояние от точки  $C_1$  до плоскости  $AB_1 C$**



$A_1 C_1 \parallel AC$ , то  $A_1 C_1 \parallel (AB_1 C)$ .

Поэтому искомое расстояние  $h$  равно расстоянию от произвольной точки  $A_1 C_1$  до плоскости  $AB_1 C$ .

Обозначим расстояние от  $O_1$  до  $(AB_1 C)$  через  $h$ .

Покажем, что  $O_1 E \perp AB_1 C$ .

$O_1 E \in BB_1 D_1 D$ ,  $AC \perp BB_1 D_1 D \Rightarrow O_1 E \perp AC$

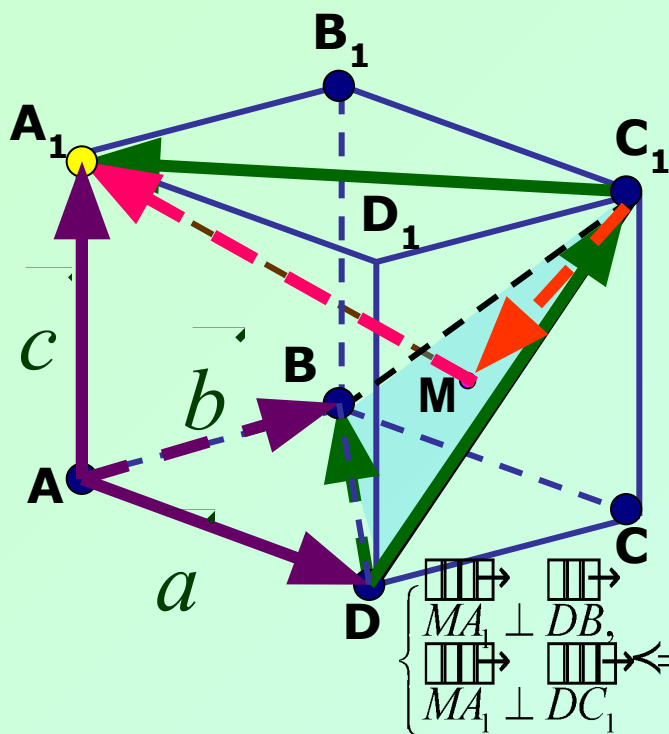
$O_1 E$  – перпендикуляр к  $(AB_1 C)$ , а  $O_1 E = h$

Так как  $B_1 O_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $O_1 O = 1$ , то из прямоугольного треугольника  $OB_1 O_1$ :

$$OB_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad \text{Искомое расстояние: } h = \frac{B_1 O_1 \cdot O_1 O}{OB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найти расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $BDC_1$**



Пусть  $\vec{AD} = a, \vec{AB} = b, \vec{AA_1} = c$ , тогда

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

Выразим векторы  $\vec{DB}, \vec{DC_1}, \vec{C_1A_1}$  через  $a, b, c$ :

$$\vec{DB} = b - a, \vec{DC_1} = b + c, \vec{C_1A_1} = -a - b.$$

Пусть  $MA_1 \perp BDC_1; M \in BDC_1$ .

$$\vec{C_1M} = x \cdot \vec{DB} + y \cdot \vec{DC_1}.$$

$$\vec{MA_1} = \vec{C_1A_1} - \vec{C_1M} = \vec{C_1A_1} - (x \cdot \vec{DB} + y \cdot \vec{DC_1}).$$

$$\begin{cases} \vec{MA_1} \perp \vec{DB}, \\ \vec{MA_1} \perp \vec{DC_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{MA_1} \cdot \vec{DB} = 0, \\ \vec{MA_1} \cdot \vec{DC_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{C_1A_1} \cdot \vec{DB} - (x \cdot \vec{DB} \cdot \vec{DB} + y \cdot \vec{DC_1} \cdot \vec{DB}) = 0, \\ \vec{C_1A_1} \cdot \vec{DC_1} - (x \cdot \vec{DB} \cdot \vec{DC_1} + y \cdot \vec{DC_1} \cdot \vec{DC_1}) = 0. \end{cases}$$

$$\vec{C_1A_1} \cdot \vec{DB} = (-a - b)(b - a) = a^2 - b^2 = 0; \vec{DC_1} \cdot \vec{DB} = (b + c)(b - a) = b^2 = 1,$$

$$\vec{DC_1} \cdot \vec{C_1A_1} = (b + c)(-a - b) = -b^2 = -1; \vec{DB} \cdot \vec{DB} = (b - a)^2 = b^2 + a^2 = 2,$$

$$\vec{DC_1} \cdot \vec{DC_1} = (b + c)^2 = b^2 + c^2 = 2,$$

Имеем:

$$\begin{cases} 0 - (x \cdot 2 + y \cdot 1) = 0, \\ -1 - (x \cdot 1 + y \cdot 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0, \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

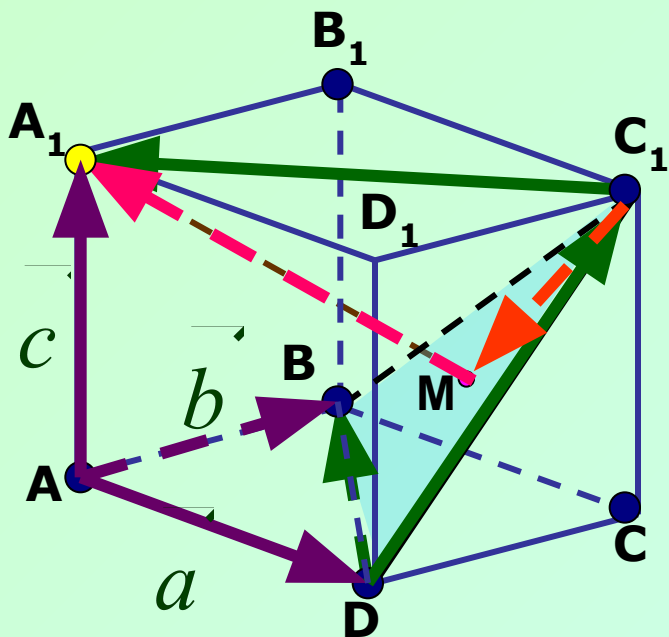
Отсюда получаем:

$$\vec{MA_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

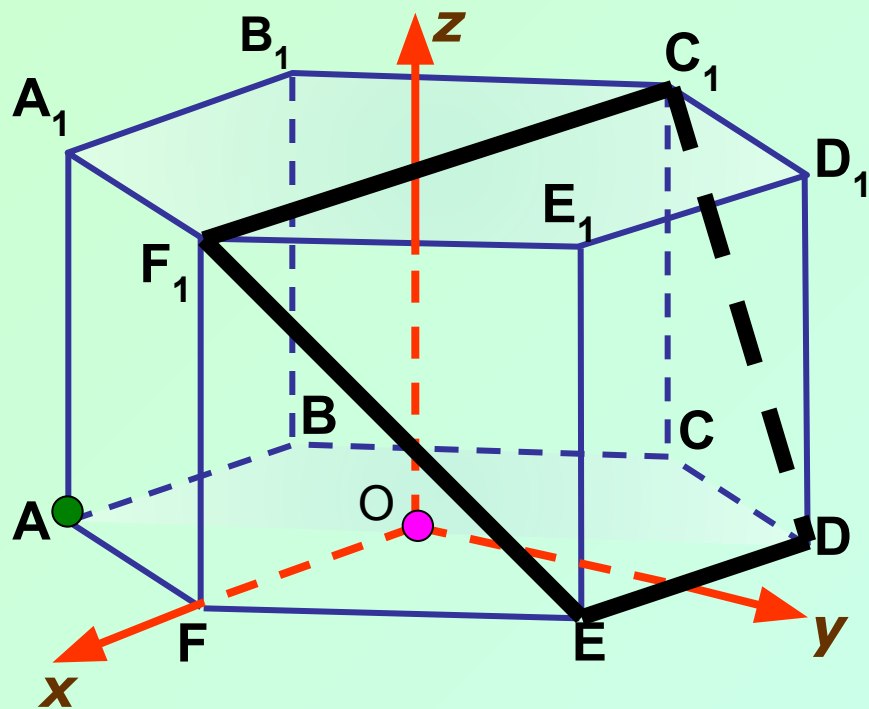
Таким образом

$$|\vec{MA_1}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .



В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , ребра которой равны 1, найти расстояние от точки  $A$  до плоскости  $DEF_1$



Введем систему координат и найдем координаты точек:

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), D\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), F_1(1; 0; 1).$$

$ax + by + cz + d = 0$  – уравнение  $(DEF_1)$ .

Подставим координаты точек

$D, E, F_1$  в уравнение:

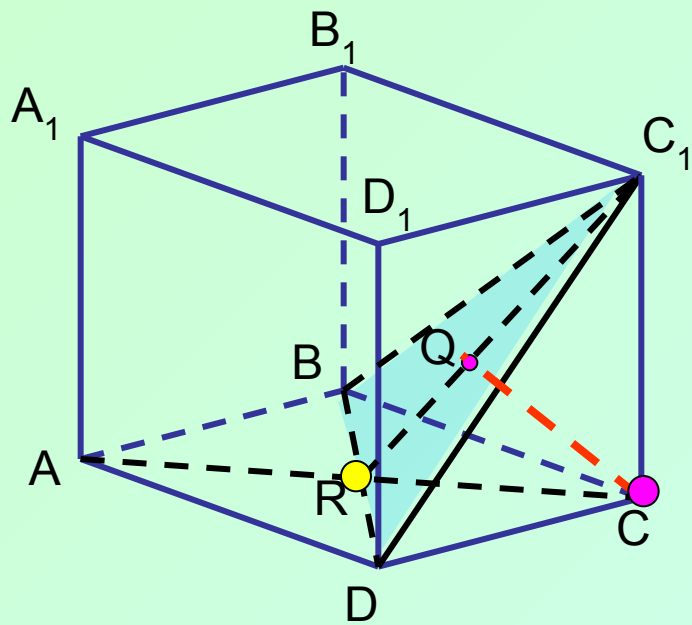
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0, (D) \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0, (E) \\ a + c + d = 0. (F_1) \end{cases} \begin{cases} a = 0, \\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}d, \\ c = -d. \end{cases}$$

уравнение  $(DEF_1)$ :  $2\sqrt{3}y + 3z - 3 = 0$ .

$$\rho(A, DEF_1) = \frac{\left|0 \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 0 - 3\right|}{\sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

**Ответ:**  $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ .

Ребро куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равно  $a$ . Найти расстояние от точки  $C$  до плоскости  $BDC_1$



Расстояние  $x$  равно высоте  $CQ$ , опущенной в пирамиде  $BCDC_1$  из вершины  $C$  на основание  $BDC_1$

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}.$$

Треугольник  $BDC_1$  – равносторонний.

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{BC_1D} \cdot CQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot x.$$

Так как  $V_1 = V_2$ , то получаем уравнение: 
$$\frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot x; x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Ответ:** 
$$\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$