

Тема урока: Иррациональные уравнения

Цель:

- Познакомиться с понятием «иррациональные уравнения» и некоторыми методами их решений.
- Развивать умение выделять главное в изучаемом материале, обобщать факты и понятия.

Найти область определения

I $Y = \sqrt{x - 6}$ $X \geq 6$

II $Y = \sqrt{\frac{7}{x}}$ $X > 0$

III $Y = \frac{1}{\sqrt{2 + x}}$ $X > -2$

IV $Y = \sqrt{x}$ $X \geq 0$



Из последнего промежутка найти наименьшее положительное целое число.

Является ли число x_0 корнем уравнения?

I $\sqrt[3]{x} = -3$ $x_0 = 27$ нет

II $\sqrt{x} - 5 = 1$ $x_0 = 36$ да

III $\sqrt{x+1} - 2 = 0$ $x_0 = 8$ нет

IV $2 = x^4$ $x_0 = \sqrt{2}$ да



$\sqrt{2}$ - какое число?

История иррационального числа

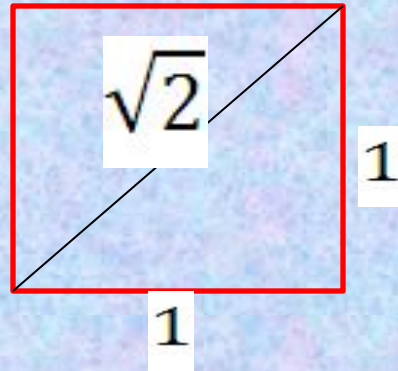
Термин «рациональное» (число) происходит от латиноамериканского слова ratio – отношение, которое является переводом греческого слова «логос» в отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными, т.е. нерациональными (по-гречески «алогос») правда, первоначально термин «рациональный» и «иррациональный» относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно не соизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми.

$$\sqrt{2}$$



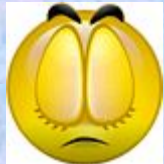
Удивительное открытие пифагорийцев.

Каким числом выражается длина диагонали квадрата со стороной **1**?



$$\sqrt{2} = ?$$

- С латыни слово «irrationalis» означает «неразумный».
- «surdus» - «глухой» или «немой»



«НИ ВЫСКАЗАТЬ, НИ

ВЫСЛУШАТЬ»



Симон Стевин



ал - Каши



Рене Декарт

Занимались иррациональными числами

Определение:

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**:

$$x + \sqrt{x} = 2$$

$$3\sqrt{x+5} = x + 2$$

Какое уравнение является иррациональным ?

$$\sqrt{x-1} = 3$$

$$y^2 + 3y\sqrt{2} = 4$$

$$x + \sqrt{x^2 + 9} = 2$$

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{6y} = 0$$

$$\sqrt[3]{x-9} = -3$$

$$\sqrt{3}y - 4 = 5$$

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

Методы решения иррациональных уравнений:

1. Возведение обеих частей в степень.
2. Использование равносильных переходов.
3. Умножение левой части на сопряженное выражение.
4. Введение новой переменной.

1. Возведение обеих частей уравнения в степень

$$\sqrt{A} = B \rightarrow A = B^2 + \text{Проверка корней}$$

(т.к. могут появиться лишние корни)

- При возведении в четную степень возможно расширение области определения заданного уравнения. Поэтому при решении таких иррациональных уравнений обязательна проверка.
- При возведении в нечетную степень обеих частей иррационального уравнения область определения не меняется.

пример

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} = \sqrt{x^2 - 3x + 10}$$

возводя обе части в квадрат,
получаем

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 - 3x + 10$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Проверка: $\sqrt{1+2+5} = \sqrt{1-3+10}$ верно Ответ: $x = 1$

2. Использование равносильных переходов.

$$\sqrt{A} = B \rightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Пример:

$$\sqrt{2x-1} = x - 2$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x - 1 = (x - 2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Ответ: $x = 5$

3. Умножение левой части на сопряженное выражение.

Если в левой части иррационального уравнения сумма или разность корней, а подкоренное выражение – линейная функция одинаковыми линейными коэффициентами, а в правой части некоторое число, то левую и правую части уравнения умножают на выражение, сопряженное выражению в левой части ($\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$) - сопряженные).

Пример:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4$$

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}) = 4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1})$$

$$x+7 - x+1 = 4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1})$$

$$4(\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1}) = 8$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2$$

Тогда имеем
$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 4 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x+7} = 6$$

$$\sqrt{x+7} = 3$$

$$x+7=9 \quad x=2$$

Проверка: $\sqrt{2+7} + \sqrt{2-1} = 4$

$$3+1 = 4 \text{ верно} \quad \text{Ответ: } x = 2$$

4. Введение новой переменной.

Решить уравнение: $(x^2 + 1) + 2\sqrt{x^2 + 1} = 15$

Введем новую переменную $\sqrt{x^2 + 1} = t, \quad t \geq 0$

$x^2 + 1 = t^2$, тогда

$$t^2 + 2t = 15$$

$t^2 + 2t - 15 = 0$ решая,

получим $t = -5$ $t = 3$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

Ответ: $x_1 = 2\sqrt{2}$

$$x_2 = -2\sqrt{2}$$



Самостоятельная работа

I

$$\sqrt{x+1} = x-5$$

8

$$\sqrt[3]{x^2-28} = 2$$

±6

II

$$\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$$

решений нет

$$\sqrt[3]{x^2-8} = 2$$

±4

III

$$\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}} = \sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$$

1

Итоги урока



- ❖ Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**.
- ❖ При возведении обеих частей уравнения
 - в **четную** степень (показатель корня – **четное** число) – возможно появление постороннего корня (**проверка необходима**).
 - в **нечетную** степень (показатель корня – **нечетное** число) – получается уравнение, равносильное исходному (**проверка не нужна**).
- ❖ Решая иррациональные уравнения с помощью равносильных преобразований – **проверка не нужна**.



**Спасибо за
внимание**