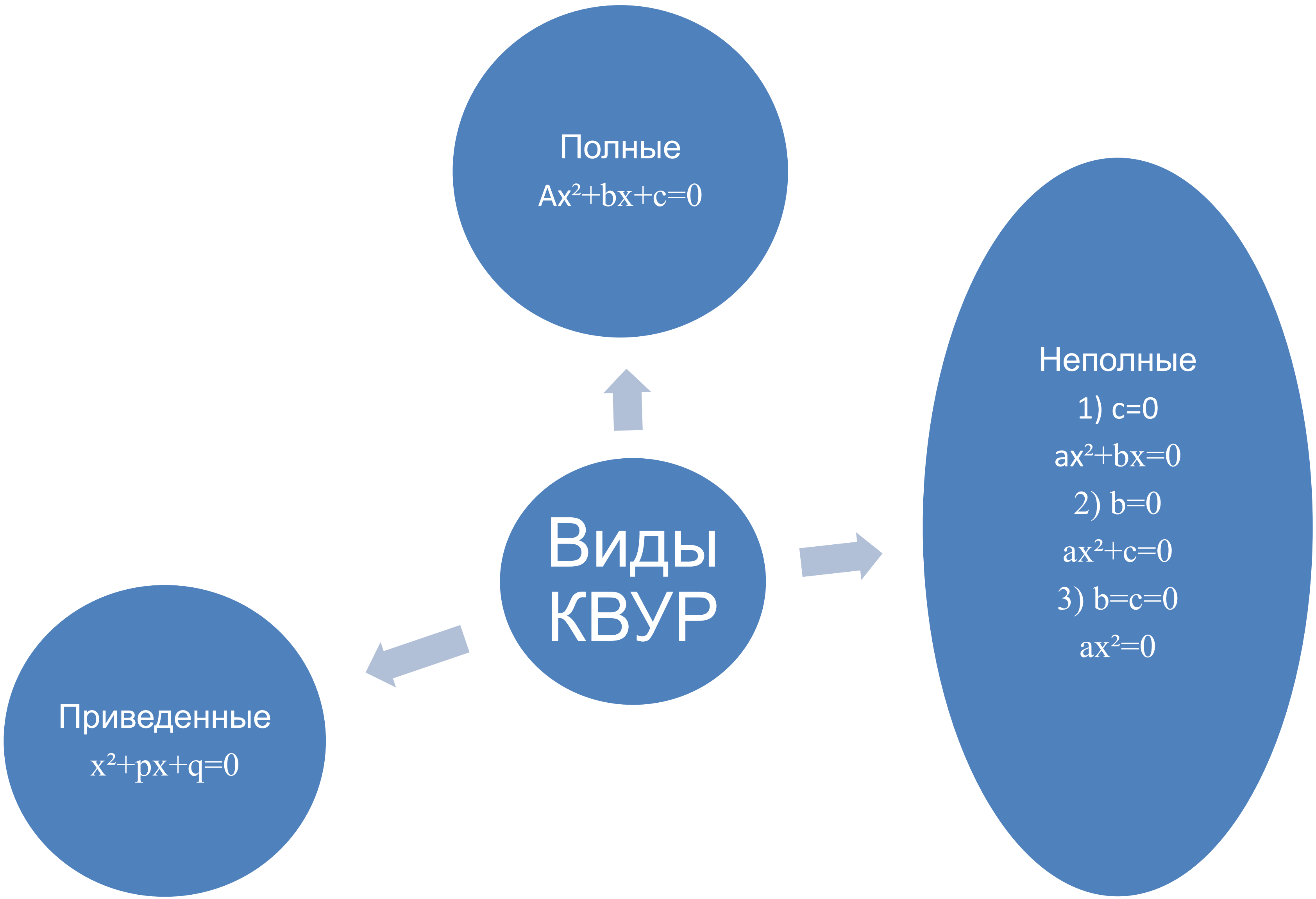
Методы решения квадратных уравнений

Определение

- Квадратные уравнения (КВУР) – уравнения вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная,

  a, b и c – любые числа, причем $a \neq 0$.

(В случае, когда а = 0, КВУР переходит в класс линейных уравнений, т.к. исключается переменная во второй степени)


Полные
Ax²+bx+c=0
Виды КВУР
Неполные
1) c=0
ax²+bx=0
2) b=0
ax²+c=0
3) b=c=0
ax²=0
Приведенные
x²+px+q=0

Методы решения. Неполные КВУР.

I. $ax^2+bx=0$

1) Вынести общий множитель за скобки и разложить на множители:

$$x \cdot (ax+b)=0$$

$x=0$ или $ax+b=0$

Методы решения. Неполные КВУР.

Примеры:

1) $2x^2+3x=0$

$x(2x+3)=0$

$x=0$ или $2x+3=0$

$2x=-3$

$x=-1{,}5$

Ответ: -1,5; 0

2) $5u^2-4u=0$

$u(5u-4)=0$

$$\left[\begin{array}{l} u=0, \\ 5u-4=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} u=0, \\ 5u=4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} u=0, \\ u=0{,}8. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 0,8.

Методы решения. Неполные КВУР.

II. $ax^2+c=0$

$ax^2=-c$

$x^2=-\frac{c}{a}$

$-\frac{c}{a}<0$ нет решений

$-\frac{c}{a}=0$

$x^2=0$

$x=0$

$-\frac{c}{a}>0 \Rightarrow$ 2корня

$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Методы решения.
Неполные КВУР.

Примеры:

1) $x^2+19=0$

$x^2=-19$

$-19<0 \Rightarrow$ нет корней

Ответ: нет корней.

Примеры:

2) $x^2-19=0$

$x^2=19$

$19<0 \Rightarrow$ 2 корня

$x=\pm\sqrt{\frac{19}{1}}$

$x=\pm\sqrt{19}$

Ответ: $\pm\sqrt{19}$.

Методы решения. Неполные КВУР.

III. $ax^2=0$

$x^2=0$ — смотри здесь.

$x=0$

Методы решения. Выделение полного квадрата.

1) b=четное

$$x^2-4x+3=0$$

$$\underline{x^2-2\cdot x\cdot 2+4}-4+3=0$$

$$(x-2)^2-1=0$$

$$(x-2)^2=1$$

$$x-2=\pm\sqrt{1}$$

$$x-2=\pm 1$$

$$x=3 \text{ или } x=1$$

Ответ:1, 3.

1) b=нечетное

$$2x^2+x+2=0 \mid :2$$

$$x^2+\frac{1}{2}x+1=0$$

$$\underline{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}-\frac{1}{16}+1=0$$

$$(x+0{,}25)^2+\frac{15}{16}=0$$

$$(x+0{,}25)^2=-\frac{15}{16}$$

$$\frac{15}{16}<0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

Ответ: нет корней.

Методы решения.
Полные КВУР $ax^2+bx+c=0$

Формула полного квадрата:

1) $x^2+8x+16=0$

$(x+4)^2=0$

$x+4=0$

$x=-4$

Ответ: $x=-4$.

2) $a^2-2,6a+1,69=0$

$(a-1,3)^2=0$

$a-1,3=0$

$a=1,3$

Ответ: $a=1,3$.

Методы решения.
Полные КВУР. Частные случаи.

Теорема 1:

Если a+b+c=0, *то*

$x_1=1,\ x_2=\frac{c}{a}$

Примеры:

1) $\overset{a}{5}x^2-\overset{b}{8}x+\overset{c}{3}=0$

$5-8+3=0 \Rightarrow$ Теорема1

$x_1=1;\ x_2=\frac{3}{5}$.

Ответ: $x_1=1;\ x_2=\frac{3}{5}$.

2) $3x^2-7x+4=0$;

$3-7+4=0 \Rightarrow$ Теорема1

$x_1=1;\ x_2=1\frac{1}{3}$.

Ответ: 1; $1\frac{1}{3}$.

Методы решения.
Полные КВУР. Частные случаи.

Теорема 2:

Если a-b+c=0, то

$x_1=-1,\ x_2=-\frac{c}{a}$.

Примеры:

1) $5x^2+9x+4=0$

$5-9+4=0 \Rightarrow$ Теорема2

$x_1=-1;\ x_2=-\frac{4}{5}$.

Ответ: $x_1=-1;\ x_2=-\frac{4}{5}$.

2) $y^2-22y-23=0$

$1+22-23=0 \Rightarrow$ Теорема2

$x_1=-1;\ x_2=-\frac{-23}{1}$

$x_2=23$.

Ответ: -1; 23.

Методы решения. Приведенные КВУР.

Теорема ВИЕТА:

$x^2+px+q=0$ ($a=1$)

$x_1+x_2=-p$

$x_1*x_2=q$

Примеры:

1) $x^2-\overset{2+4}{6}x+\overset{2*4}{8}=0$

$x_1=2$; $x_2=4$ $\quad$ $x_1+x_2=6$

$x_1+x_2=8$

Ответ: 2, 4.

2) $y^2-10y-24=0$

$y_1=-4$; $y_2=6$ $\quad$ $y_1+y_2=10$

$y_1*y_2=24$

Ответ: $y_1=-4$; $y_2=6$.

Методы решения. «Переброска»

1) $2x^2-5x-3=0$

$x^2-5x-3*2=0$

$x^2-5x-6=0$ (решим по Теореме 2)

Корни запишем в виде:

$x_1 = \frac{-1}{2}$

$x_2 = \frac{6}{2} = 3$

Ответ: $x_1=-0{,}5$; $x_2=3$.

2) $3x^2+2x-5=0$

$x^2+2x-15=0$

Решим по Теореме ВИЕТА.

$x_1 = \frac{-5}{3}$

$x_2 = \frac{3}{3}$

$x = \frac{5}{3}$

Ответ: 1;

Решение КВУР по формуле:

Виды решения

Формула 1

Если второй коэффициент(b)-нечетный,
то дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac$$

Формула корней:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Формула 2

Если второй коэффициент(b)-четный,
то дискриминант :

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

Формула корней:

$$x = \frac{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

Решим примеры

1) $4x^2 + x - 33 = 0$

a=4;b=1;c=-33

Т.к. b-нечетное, то решаем это уравнение по формуле 1:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 23}{8}$$

$$x_1 = \frac{-1-23}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

$$x_2 = \frac{-1+23}{8} = \frac{22}{8} = 2\frac{3}{4}$$

Корни:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2c}$$

Ответ:-3; $2\frac{3}{4}$

2) $3x^2-13x+14=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{13\pm1}{6}$$

$$x_1=\frac{13-1}{6}=2$$

$$x_2=\frac{13+1}{6}=\frac{14}{6}=2\frac{1}{3}$$

$$Ответ:2,2\frac{1}{3}$$

a=3;b=-13;c=14

Т.к. b-нечетное, то решаем по формуле 1:

$$D=b^2-4ac$$

Корни:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2c}$$

3) $12x^2 + 16x - 3 = 0$

a=12;b=16;c=-3

Т.к. b-четное, то решаем по формуле 2:

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

Корни:

$$x = \frac{\frac{-b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 10}{12}$$

$$x_1 = \frac{-8 - 10}{12} = -1{,}5$$

$$x_2 = \frac{-8 + 10}{12} = \frac{1}{6}$$

$$Ответ: -1{,}5; \frac{1}{6}$$

4) $$5x^2+26x-24=0$$

$$x_{1,2}=\frac{\frac{-b}{2}\pm\sqrt{D1}}{a}$$

$$x_1=\frac{-13-17}{5}=-6$$

$$x_2=\frac{-13+17}{5}=0{,}8$$

$$Ответ: -6;0{,}8$$

a=5;b=26;c=-24

Т.к. b-четное, то решаем по формуле 2:

$$D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$$

Корни:

$$x=\frac{\frac{-b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}$$

- Авторы:

Ученики 8 класса ФМЛ № 38 г.Ульяновска

- Криворотова Полина
- Шагаев Анатолий

- Руководитель:
- Учитель математики Алейникова Т.В.