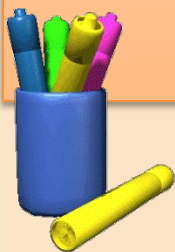


# *методы решения логарифмических уравнений*



Методическая разработка учащихся 10 класса МОУ «Бельская  
СОШ»

г. Белого Тверской области

# Основные методы решений логарифмических уравнений



# Определение

Логарифмом положительного числа  $b$  по основанию  $a$ , где  $a > 0, a \neq 1$ , называется показатель степени, в которую надо возвести  $a$ , чтобы получить  $b$ .



# 1. Использование определения логарифма.

- $\log_a f(x) = c \iff f(x) = a^c$

*Пример 1.*

$$\log (x - 4) = 2$$

$$x - 4 = 5$$

$$x - 4 = 25$$

$$x = 29$$

Ответ: 29.



## 2. Метод потенцирования.

Пример 2.

$$\lg(x^2 - 9) = \lg(4x + 3)$$

$$x^2 - 9 = 4x + 3$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

$x = -2$  - не входит в ОДЗ

Ответ: 6.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x < -3 \\ x > 3 \end{cases} \quad x > 3$$



### 3. Введение новой переменной.

*Пример 3.*

$$\log_2 x - 2\log_4 x - 3 = 0 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

Пусть  $\log_4 x = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_4 x = 3 \\ \log_4 x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 64 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{1}{4}; 64.$



# 4. Приведение логарифмов к одному основанию.

Формулы перехода:

$$1) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad 2) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Пример 4.

$$\log_3 x - 6 \log_x 3 = 1 \quad \text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1$$

$$\log_3 x - \frac{6}{\log_3 x} = 1$$

Пусть  $\log_3 x = t$

$$t - \frac{6}{t} = 1$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x = -2 \\ \log_3 x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x = 27 \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{1}{9}; 27.$



# 5. Метод логарифмирования.

*Пример 5.*

$$x^{\log_2 x} = 64x$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0$$

*логарифмируем обе части уравнения по основанию 2*

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 64x$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 64x$$

$$\log_2^2 x = \log_2 64 + \log_2 x$$

$$\log_2^2 x - \log_2 x - 6 = 0$$

$$\text{Пусть } \log_2 x = t$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 8 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4}; 8.$$





## 6. Применение формулы

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

*Пример 6.*

$$9^{\log_3 \lg x} = 2 \lg x + 3$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \lg x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \quad x > 1$$

$$(\lg x)^{\log_3 9} = 2 \lg x + 3$$

$$\lg^2 x - 2 \lg x - 3 = 0$$

Пусть  $\lg x = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x = -1 \\ \lg x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,1 \\ x = 1000 \end{cases} \quad x = 0,1 - \text{ не входит в ОДЗ}$$



# Каждому уравнению поставьте в соответствие метод его решения

$$\log_3 x = 2$$

метод логарифмирования

$$\log_6(2x - 9) = \log_6(x - 3)$$

решение по  
 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

$$\log_{0,1}^2 x - 5 \log_{0,1} x + 6 = 0$$

метод потенцирования

$$x^{\log_2 x} = 16$$

по определению логарифма

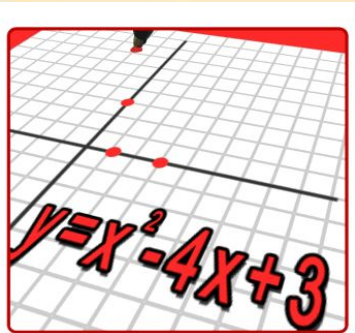
$$x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$$

метод подстановки



# Функциональные методы решения логарифмических уравнений





# Использование области допустимых значений уравнения



## Определение

Областью допустимых значений уравнения называется общая область определения всех функций, входящих в уравнение

## Утверждение1

Если область допустимых значений уравнения пустое множество, то уравнение не имеет корней.

**Например:**

$$\log_8(2x - 4) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$$

$$\text{ОДЗ } \begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases} \quad x \in \emptyset$$

Ответ : корней нет.



## Утверждение 2.

Если область допустимых значений уравнения состоит из конечного числа значений, то корни уравнения содержатся среди этих значений.

Это условие является необходимым, но не является достаточным.

Поэтому необходима проверка.

### Пример.

$$\sqrt{4 - 4x^2} + \sqrt[4]{x^6 - 1} < x - \log_3(2 + x^4)$$

$$\text{ОдЗ} \begin{cases} 4 - 4x^2 \geq 0 \\ x^6 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



## Проверка:

При  $x = -1$  получаем  $0=2$ . Равенство неверно.  
Значит  $x = -1$  не является корнем уравнения.

При  $x=1$  получаем  $0=0$ .  
Значит  $x=1$  - корень уравнения.

Ответ:1

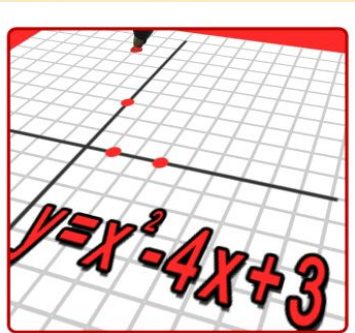


# Алгоритм решения

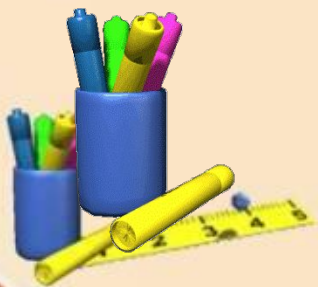
- 1) Находим ОДЗ уравнения.
- 2) Если ОДЗ - пустое множество, то уравнение не имеет корней.  
Если ОДЗ - конечное множество значений, то эти значения надо подставить в уравнение.







# Использование МОНОТОННОСТИ функций.



## Теорема.

Если функция  $f(x)$  монотонна на некотором промежутке, то уравнение  $f(x) = c$  имеет на этом промежутке не более одного корня.

## Пример:

$$\log_3 x + \log_8 (5 + x) = 2$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ 5 + x > 0 \end{cases} \quad 0 < x < 5$$

Подбором находим корень уравнения  $x = 3$ .

Т.к. функция  $f(x) = \log_3 x + \log_8 (5 + x)$  – есть сумма двух возрастающих функций, то она возрастающая.

Значит тогда данное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 3.



## Теорема.

Если на некотором промежутке функция  $f(x)$  возрастает, а функция  $g(x)$  убывает, то уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет на этом промежутке не более одного корня.

### Пример:

$$\log_{0,5} 8/x = 2 - 2^x$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0$$

Подбором находим корень уравнения  $x = 2$ .

Функции:  $y_1(x) = 8/x$  и  $y_2(x) = \log_{0,5} x$  – убывающие

Функция  $f(x) = y_1(y_2(x)) = \log_{0,5} 8/x$  – возрастающая  
(как убывающая функция от убывающей)

Функция  $g(x) = 2 - 2^x$  – убывающая

Тогда данное уравнение имеет единственный корень.

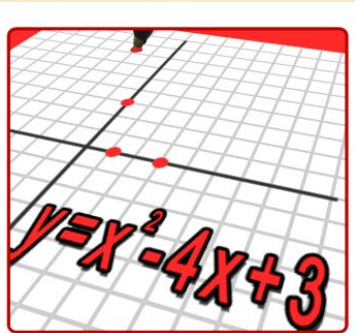


Ответ: 2

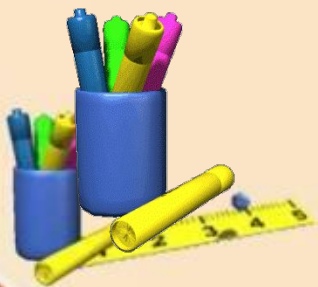
# Алгоритм решения

- Найти ОДЗ.
- Подбором найти корень уравнения.
- С помощью монотонности функции доказать, что корень единственный.





# Использование множества значений (ограниченности) функций



$f(x)$  и  $g(x)$ - элементарные функции,  $E(f)$  и  $E(g)$  – множества значений этих функций.

### **Утверждение 1.**

Если пересечение множеств значений функций  $f(x)$  и  $g(x)$  пусто ( $E(f) \cap E(g) = \emptyset$ ), то уравнение  $f(x) = g(x)$  не имеет корней.

**Пример:**  $-x^2 - 7 = |\log_9(x - 1)|$

Рассмотрим функции  $f(x) = -x^2 - 7$  и  $g(x) = |\log_9(x - 1)|$

Найдём их области значения.

$$E(f): \begin{aligned} x^2 &\geq 0 \\ -x^2 &\leq 0 \\ -x^2 &\leq -7 \end{aligned}$$

$$E(g) \quad |\log_9(x - 1)| \geq 0$$

$$E(f) \cap E(g) = \emptyset$$

Ответ: нет корней



## Утверждение 2.

Если  $E(f) \cap E(g) = \{M\}$  и  $f(x) \leq M$ , а  $g(x) \geq M$ , то  $f(x) = g(x)$  равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

### Пример

$$\log^2_5(x+1) = -\sqrt{x}$$

$$\log^2_5(x+1) \geq 0$$

$$-\sqrt{x} \leq 0$$

$$\log^2_5(x+1) = -\sqrt{x}$$



$$\begin{cases} \log^2_5(x+1) = 0 \\ -\sqrt{x} = 0 \end{cases}$$



$$x=0$$

Ответ: 0





## Алгоритм решения

1. Оценить обе части уравнения

2. Если  $f(x) \leq M$ , а  $g(x) \geq M$ , то равенство  $f(x) = g(x)$  возможно тогда и только тогда, когда  $f(x)$  и  $g(x)$  одновременно будут равны  $M$ , т.е.

$$f(x) = g(x)$$



$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

- Можно решить одно уравнение системы и полученный корень подставить в другое уравнение.





# Проверьте свои знания тестированием

Пройдите по ссылке:

[Логарифмические уравнения.exe](#)

## Критерии оценки

**3 б. – «3», 4-5 б. – «4», 6 б. – «5»**



# Рефлексия



У меня всё  
получилось!!!

Надо решить  
ещё пару  
примеров.

Ну кто  
придумал эту  
математику!



Учитель высшей категории Сильченкова С.  
Н., г.Белый Тверской обл.



Спасибо  
за  
работу

