Нестандартные методы решения иррациональных уравнений

Выполнила
Тимкова Татьяна Андреевна
МБОУ «Лицей 21»
10 класс

Руководитель проекта
Малахова Людмила Алексеевна
Учитель математики

План

- Введение
- Историческая справка
- Определение уравнения, виды уравнений
- Свойства функций
- Нестандартные методы решения уравнений
- Заключение

Актуальность

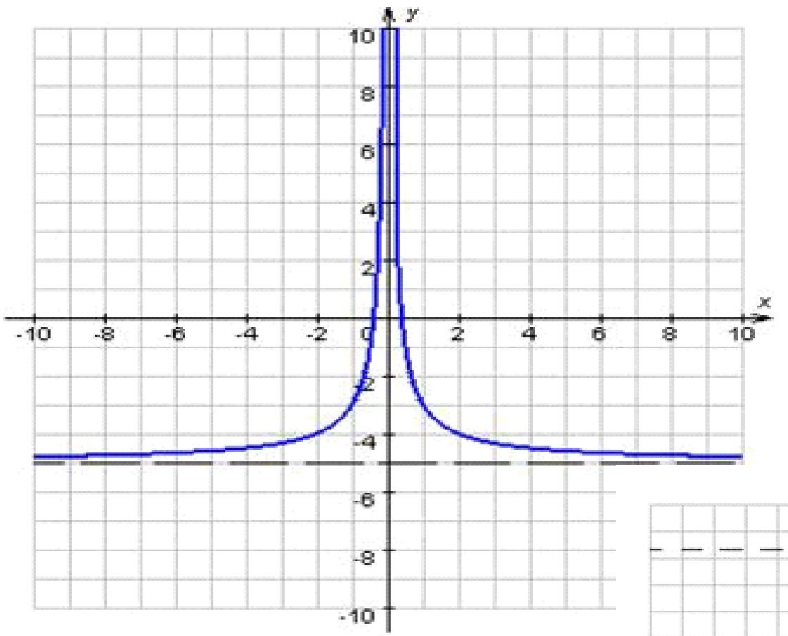
Актуальность моей работы заключается в том, что приобретенные знания и навыки будут в дальнейшем использованы в работе ЕГЭ, в будущей профессии, в различных жизненных ситуациях.

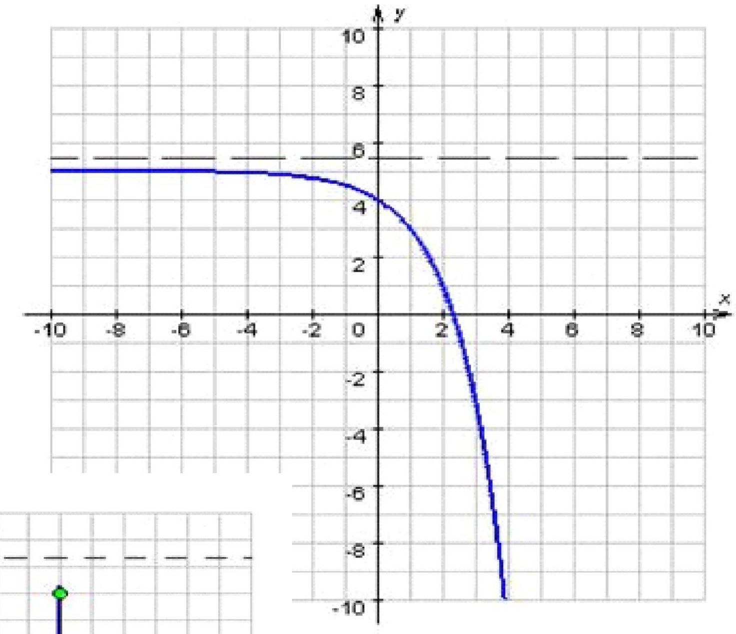
Цель моей работы- ознакомление с нестандартными методами решения уравнений, в частности, на этот год- для решения иррациональных уравнений

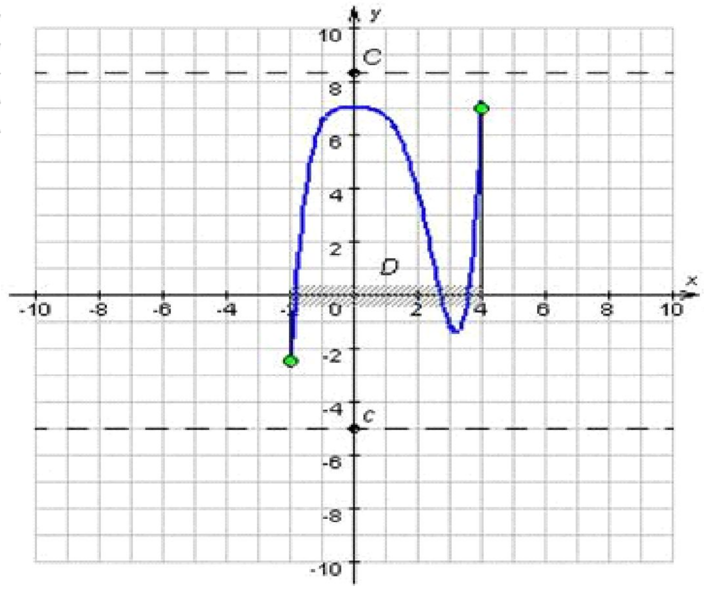
Задачи:

- собрать сведения из истории математики о решении уравнений
- применить имеющиеся знания по теме «Функция» к решению иррациональных уравнений
- изучить теорию по нестандартным методам решения иррациональных уравнений (в перспективе и другие виды уравнений: тригонометрические , логарифмические и т. д.).

Ограниченность функции







Пример 1

Решите уравнение.

$\sqrt{3-x}$ + $\sqrt{x+5}$ - x^2= 5+2x

Решение. Перепишем уравнение:

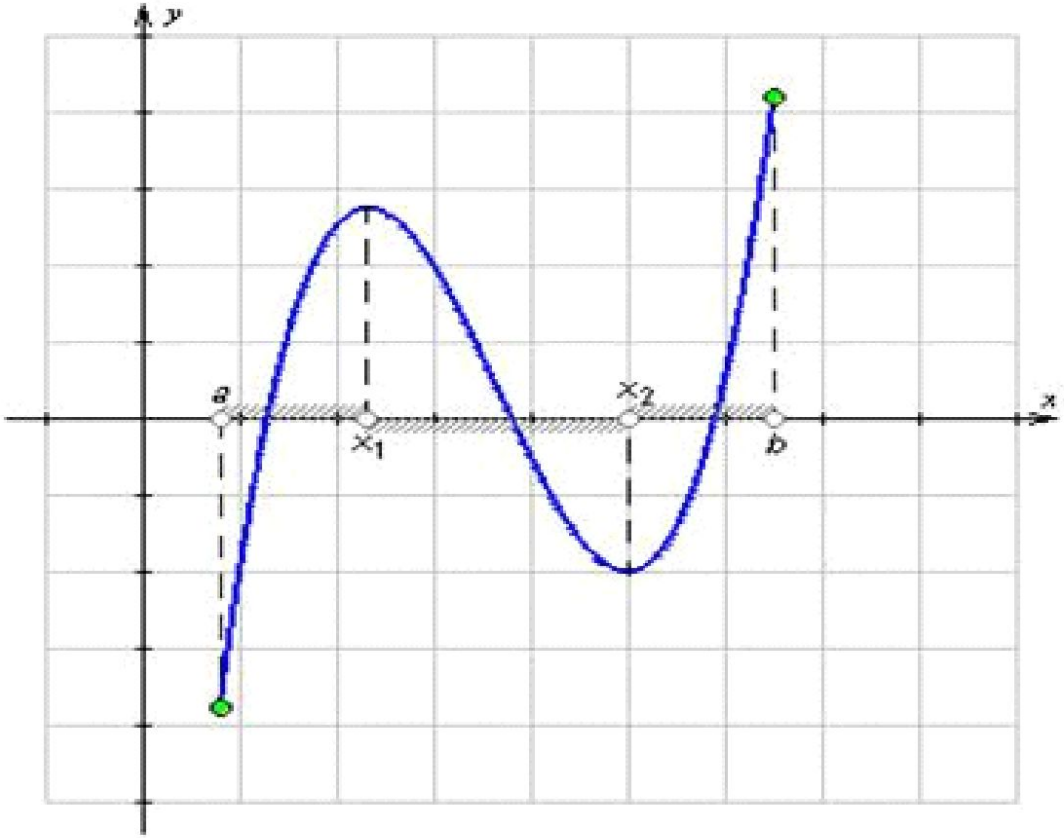
$\sqrt{3-x}$ + $\sqrt{x+5}$ = 5+2x + x^2

Пусть t=$\sqrt{3-x}$ + $\sqrt{x+5}$

Тогда t^2 = 8+2 $\sqrt{15-2x-x^2}$

Наибольшее значение подкоренного выражения достигается при x=-1(в вершине параболы y=15-2x- x^2.При этом t_2 =16.Отсюда следует, что 4.Наименьшее значение правой части исходного уравнения достигается также при x=-1 и тоже равно 4.При левая часть(когда она существует) меньше правой.

Монотонность функции



Теорема о корне.

Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I, число a - любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение f(x)=a имеет единственный корень на этом промежутке I.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую функцию f (в случае, если f - убывающая функция, рассуждения аналогичны). По условию в промежутке I существует такое число b, что f(b)=a. Надо показать, что b - единственный корень уравнения f(x)=a.

Допустим, что на промежутке I есть еще число $c \neq b$, такое, что f(c)=a. Тогда или $c < b$ или $c > b$. Но функция f возрастает на промежутке I, поэтому соответственно либо $f(c) < f(b)$, либо $f(c) > f(b)$. Это противоречит равенству f(c)=f(b)=a. Следовательно, сделанное предположение неверно и кроме числа b, других корней на промежутке I у уравнения f(x)=a нет.

Пример 2

Решите уравнение.

$\sqrt{7x+9}+\sqrt{15x+1}+\sqrt{2x-1} = 9$

Решение. Заметим, что левая часть уравнения — возрастающая функция. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может.Итак, x=1 -единственный корень.

Ответ:1

$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$

Если функция f(x) возрастающая ,то уравнение f(f(x))=x равносильно уравнению f(x)=x.

Доказательство. Всякий корень уравнения f(x)=x есть корень уравнения f(f(x))=x. Пусть x_0 -корень уравнения f(f(x))=x, причем $f(x)\neq x_0$.Тогда либо $f(x_0) > x_0$,но при этом f(f(x0))= $x_0 > f(x)_0$, противоречие; либо $x_0 > f(x)_0$, но в этом случае $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$,т.е. $x_0 < f(x_0)$,что также невозможно. Утверждение доказано.

Пример 3

Решите уравнение

$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ =x

Пусть f(x)=$\sqrt{1+x}$.Наше уравнение имеет вид f(f(x))=x

Чтобы завершить решение, достаточно ре$\sqrt{1+x}$уравнение

x=. $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$

. Ответ:.

ОДЗ

Пример 4

Решите уравнение:

$\sqrt{4-x^2}$ +$\sqrt{x-2}$ = $\sqrt{x+7}$ -$\sqrt{4x+1}$

Решение:

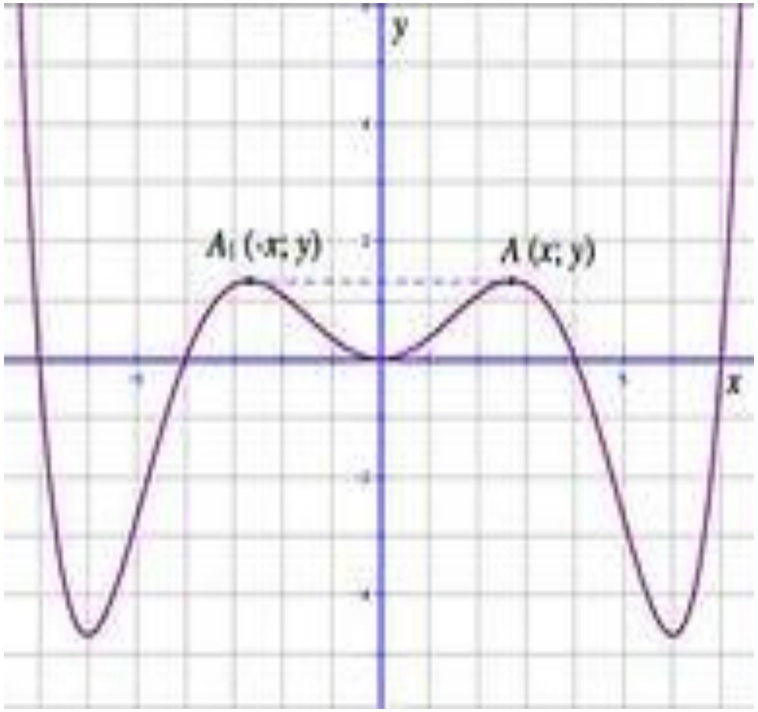
$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ 4x+1 \geq 0 \end{cases}$$

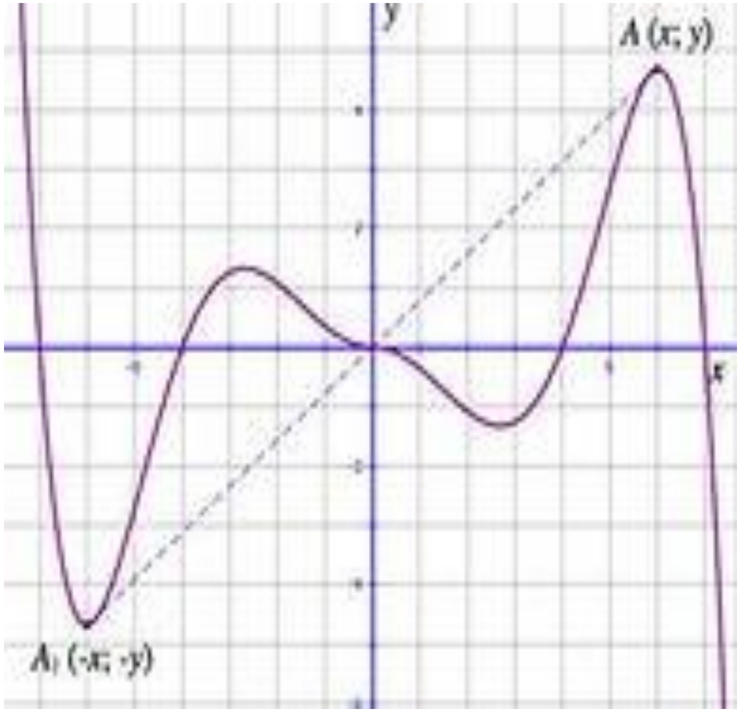
x=2

В области определения данного уравнения должны одновременно выполняться неравенства 4- $x^2 \geq 0$ и $x \geq 2$ что возможно только при x=2.Проверкой убеждаемся ,что 2 -корень.

Ответ:2.

Четность функции





Умножение на сопряженное

В основе рассматриваемого способа лежит формула :
$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$
Выражения $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ мы будем называть сопряженными.Иногда использование этой формулы облегчает решение.

Пример 6

Решите уравнение.

$\sqrt{5x+1}$ $\sqrt{x+3}$ = 2x-1

Решение:

Домножим левую и правую части уравнения на сумму радикалов стоящих в левой части. Получается уравнение:

2(2x-1)=(2x-1)($\sqrt{5x+1}$ + $\sqrt{x+3}$

равносильное такому:

(2x-1)(2-($\sqrt{5x+1}$ + $\sqrt{x+3}$

откуда либо x= $\frac{1}{2}$, либо $\sqrt{5x+1}$ $\sqrt{x+3}$ =2.

Последнее уравнение решим уже рассмотренным способом: пусть

t= $\sqrt{x+3} \geq 0$

Тогда приходим к уравнению :

$\sqrt{5t^2-14}$ = 2-t

Откуда t= $\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$, а x= $\frac{4-\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{4-\sqrt{19}}{2}$

Метод половинного деления

Алгоритм:

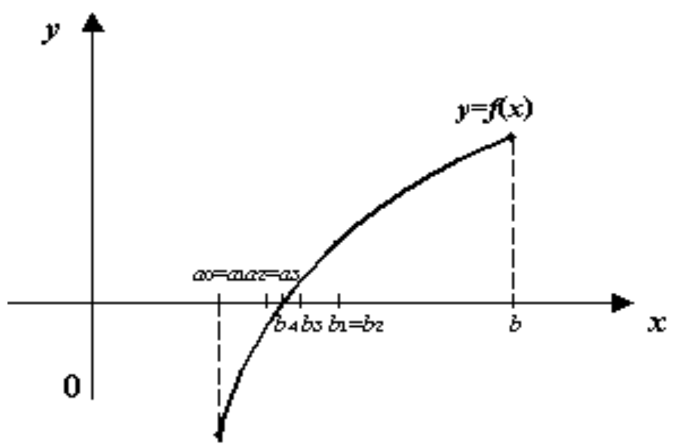
1.Найдем середину отрезка $[a; b]$= (a+b):2

2. Вычислим значения функции в точках а и с и найдем произведение полученных значений : d=f(c)?f(a)

3. Если d>0,то теперь точкой а станет c:a=c;

Если d<0,то точкой b станет c:b=c;

4. Вычислим разность а и b ,сравним ее,если меньше 0 то идем в пункт 1,если нет, то корень с нужной нам точностью найден, и он равен : x=(a+b)/2.



Заключение

В процессе работы над темой «Нестандартные методы решения иррациональных уравнений» я узнала новые теоремы ,научилась применять свойства функций к решению иррациональных уравнений , нашла множество применений данных знаний в решении сложных жизненных задач в разных сферах науки : экономике, строительстве, транспорте.

Данные методы значительно облегчают решение уравнений.

В жизни нужно не только следовать инструкциям, но уметь действовать по ситуации - применять все имеющиеся знания, т.е. иметь «вторую грамотность» - знания в действии.

Спасибо за внимание!!!