

Нестандартные методы решения иррациональных уравнений

Выполнила
Тимкова Татьяна Андреевна
МБОУ «Лицей 21»
10 класс

Руководитель проекта
Малахова Людмила Алексеевна
Учитель математики

План

- Введение
- Историческая справка
- Определение уравнения, виды уравнений
- Свойства функций
- Нестандартные методы решения уравнений
- Заключение

Актуальность

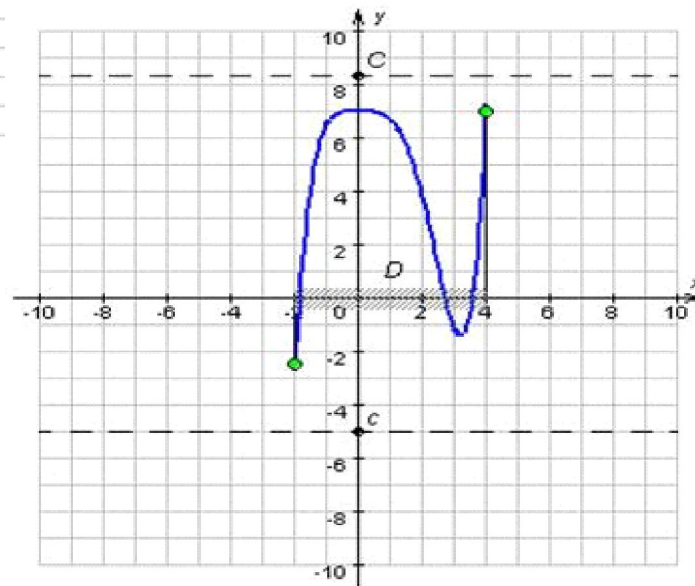
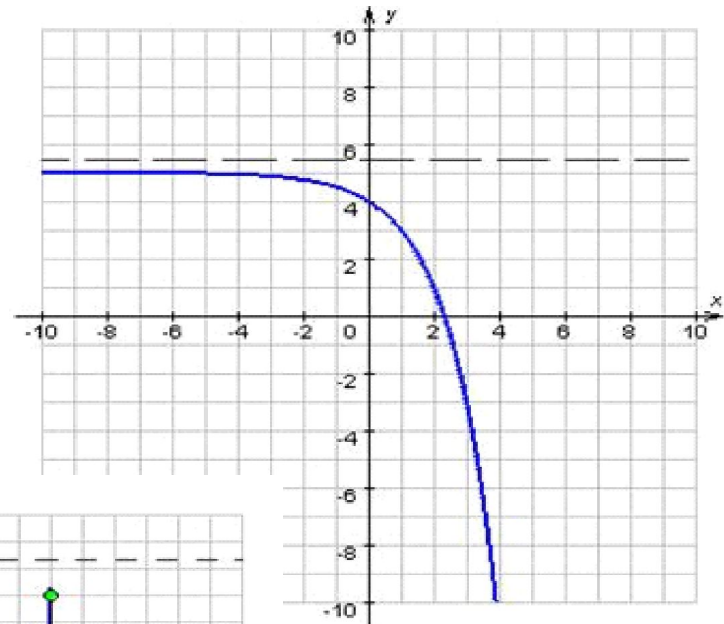
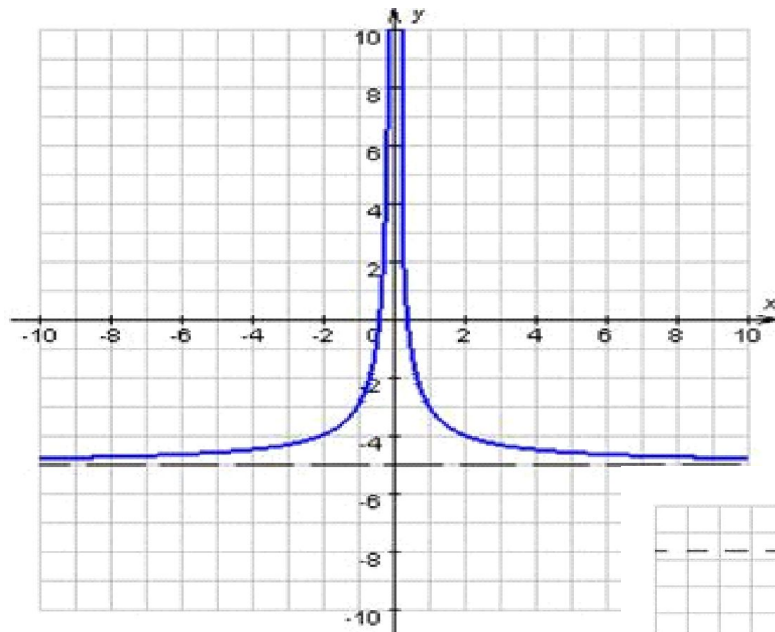
Актуальность моей работы заключается в том, что приобретенные знания и навыки будут в дальнейшем использованы в работе ЕГЭ, в будущей профессии, в различных жизненных ситуациях.

Цель моей работы- ознакомление
с нестандартными методами
решения уравнений, в частности,
на ЭТОТ ГОД- для решения
иррациональных уравнений

Задачи:

- собрать сведения из истории математики о решении уравнений
- применить имеющиеся знания по теме «Функция» к решению иррациональных уравнений
- изучить теорию по нестандартным методам решения иррациональных уравнений (в перспективе и другие виды уравнений: тригонометрические, логарифмические и т. д.).

Ограниченность функции



Пример 1

Решите уравнение.

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} \cdot x^2 = 5+2x$$

Решение. Перепишем уравнение:

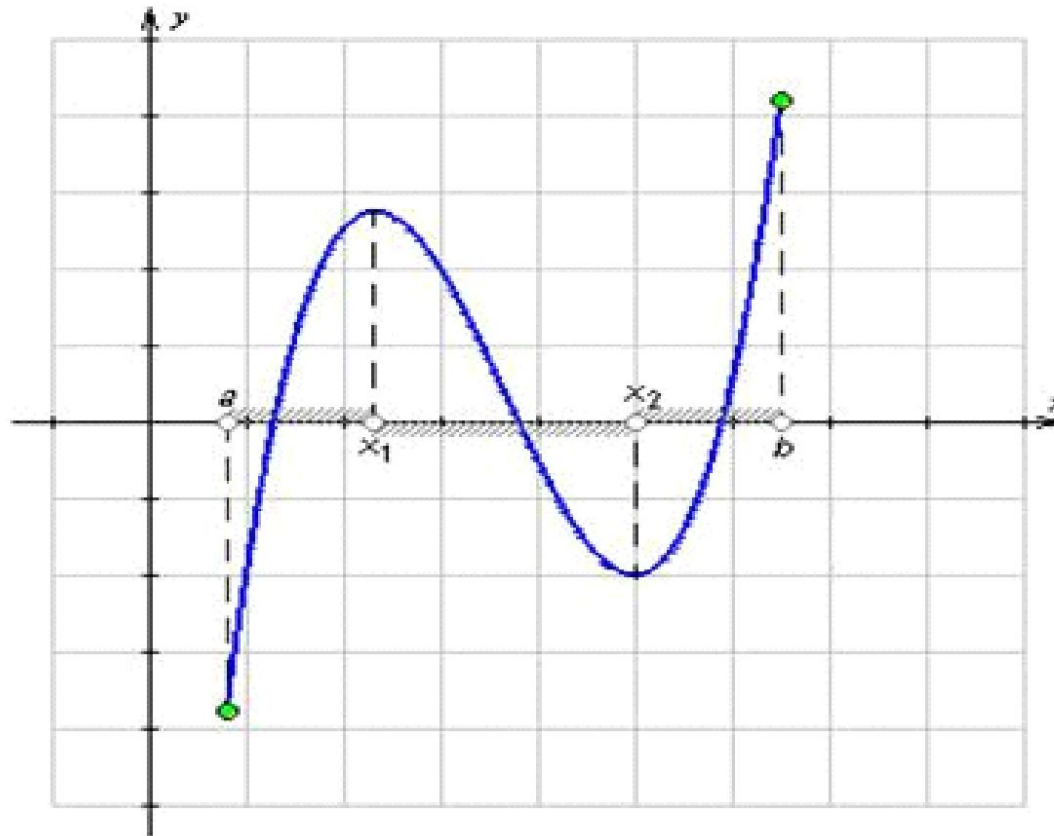
$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} = 5+2x + x^2$$

$$\text{Пусть } t = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$$

$$\text{Тогда } t^2 = \sqrt{15-2x-x^2}$$

Наибольшее значение подкоренного выражения достигается при $x=-1$ (в вершине параболы $y=15-2x-x^2$). При этом $t_2 = 16$. Отсюда следует, что 4. Наименьшее значение правой части исходного уравнения достигается также при $x=-1$ и тоже равно 4. При левая часть (когда она существует) меньше правой.

Монотонность функции



Теорема о корне.

Пусть функция f возрастает (или убывает) на промежутке I , число a - любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень на этом промежутке I .

Доказательство. Рассмотрим возрастающую функцию f (в случае, если f - убывающая функция, рассуждения аналогичны). По условию в промежутке I существует такое число b , что $f(b)=a$. Надо показать, что b - единственный корень уравнения $f(x)=a$.

Допустим, что на промежутке I есть еще число $c \neq b$, такое, что $f(c)=a$. Тогда или $c < b$ или $c > b$. Но функция f возрастает на промежутке I , поэтому соответственно либо $f(c) < f(b)$, либо $f(c) > f(b)$. Это противоречит равенству $f(c)=f(b)=a$. Следовательно, сделанное предположение неверно и кроме числа b , других корней на промежутке I у уравнения $f(x)=a$ нет.

Пример 2

Решите уравнение.

$$\sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1} + \sqrt{2x-1} =$$

Решение. Заметим, что левая часть уравнения — возрастающая функция. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Итак, $x=1$ -единственный корень.

Ответ: 1

$$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=x$$

Если функция $f(x)$ возрастающая, то уравнение $f(f(x))=x$ равносильно уравнению $f(x)=x$.

Доказательство. Всякий корень уравнения $f(x)=x$ есть корень уравнения $f(f(x))=x$. Пусть x_0 - корень уравнения $f(f(x))=x$, причем $f(x) \neq x_0$. Тогда либо $f(x_0) > x_0$, но при этом $f(f(x_0)) = x_0 > f(x_0)$, противоречие; либо $x_0 > f(x_0)$, но в этом случае $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$, т.е. $x_0 < f(x_0)$, что также невозможно. Утверждение доказано.

Пример 3

Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = x$$

Пусть $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Наше уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$

Чтобы завершить решение, достаточно решить уравнение

$$x = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$$

. Ответ:.

ОДЗ

Пример 4

Решите уравнение:

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}$$

Решение:

$$4-x^2 \geq 0$$

$$x-2 \geq 0$$

$$x+7 \geq 0$$

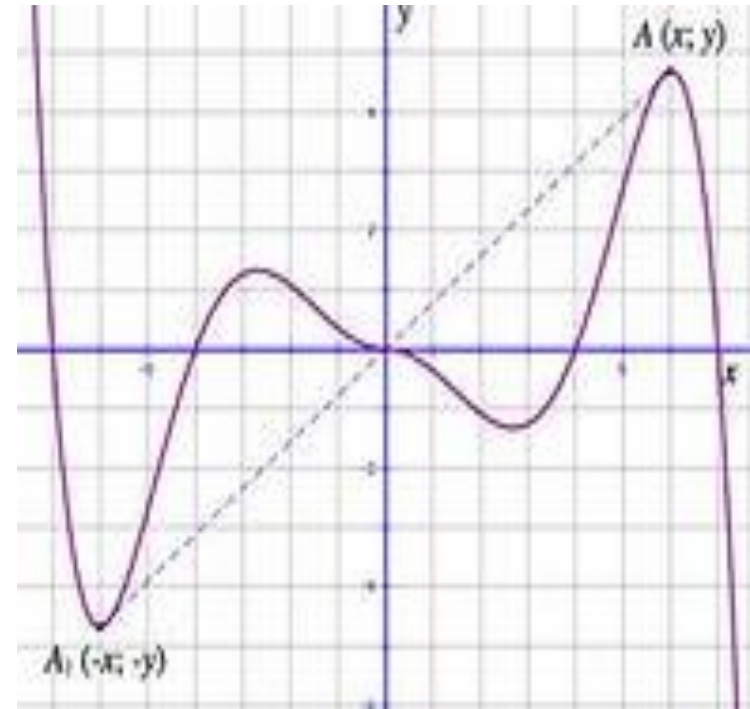
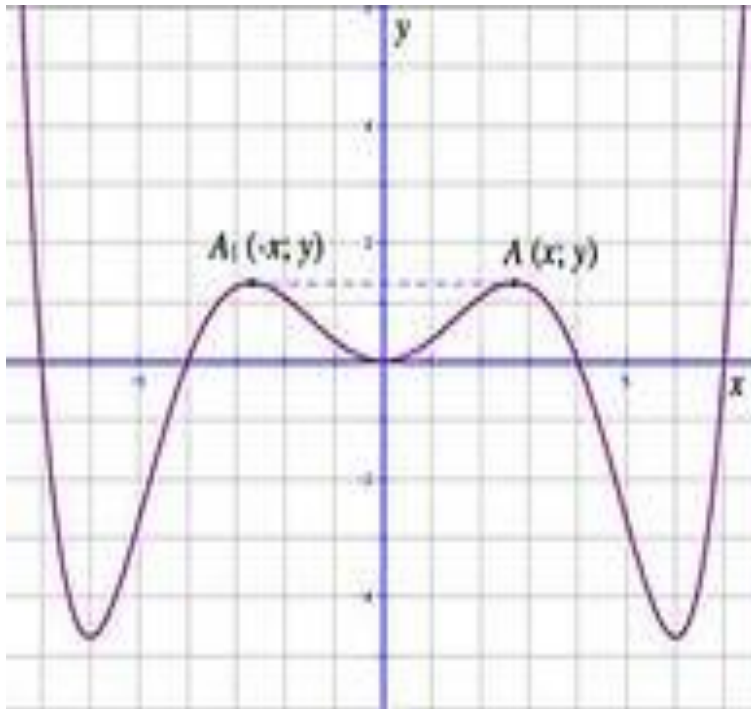
$$4x+1 \geq 0$$

$$x=2$$

В области определения данного уравнения должны одновременно выполняться неравенства $4-x^2 \geq 0$ и $x \geq 2$ что возможно только при $x=2$. Проверкой убеждаемся, что 2 - корень.

Ответ: 2.

Четность функции



Умножение на сопряженное

В основе рассматриваемого способа лежит формула :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

Выражения $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ мы будем называть сопряженными. Иногда использование этой формулы облегчает решение.

Пример 6

Решите уравнение.

$$\sqrt{5x+1} \sqrt{x+3} = 2x-1$$

Решение:

Домножим левую и правую части уравнения на сумму радикалов стоящих в левой части. Получается уравнение:

$$2(2x-1) = (2x-1)(\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3})$$

равносильное такому:

$$(2x-1)(2 - (\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3})) = 0$$

откуда либо $x = \frac{1}{2}$, либо $\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+3} = 2$.

Последнее уравнение решим уже рассмотренным способом: пусть

$$t = \sqrt{x+3} \geq 0$$

Тогда приходим к уравнению :

$$\sqrt{5t^2 - 14} = 2 - t$$

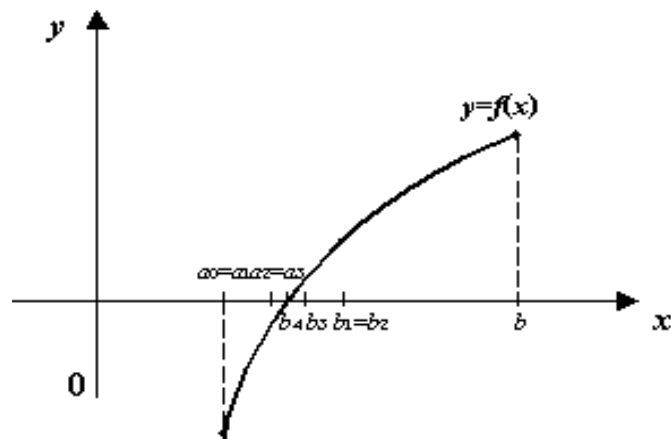
$$\text{Откуда } t = \frac{-1 + \sqrt{19}}{2}, \text{ а } x = \frac{4 - \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}, \frac{4 - \sqrt{19}}{2}$$

Метод половинного деления

Алгоритм:

1. Найдем середину отрезка $[a; b] = (a+b):2$
2. Вычислим значения функции в точках a и c и найдем произведение полученных значений : $d=f(c) \cdot f(a)$
3. Если $d > 0$, то теперь точкой a станет c : $a=c$;
Если $d < 0$, то точкой b станет c : $b=c$;
4. Вычислим разность a и b , сравним ее, если меньше 0
то идем в пункт 1, если нет, то корень с нужной нам точностью найден,
и он равен : $x=(a+b)/2$.



Заключение

В процессе работы над темой «Нестандартные методы решения иррациональных уравнений» я узнала новые теоремы, научилась применять свойства функций к решению иррациональных уравнений, нашла множество применений данных знаний в решении сложных жизненных задач в разных сферах науки: экономике, строительстве, транспорте.

Данные методы значительно облегчают решение уравнений.

В жизни нужно не только следовать инструкциям, но уметь действовать по ситуации - применять все имеющиеся знания, т.е. иметь «вторую грамотность» - знания в действии.

Спасибо за внимание!!!